This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

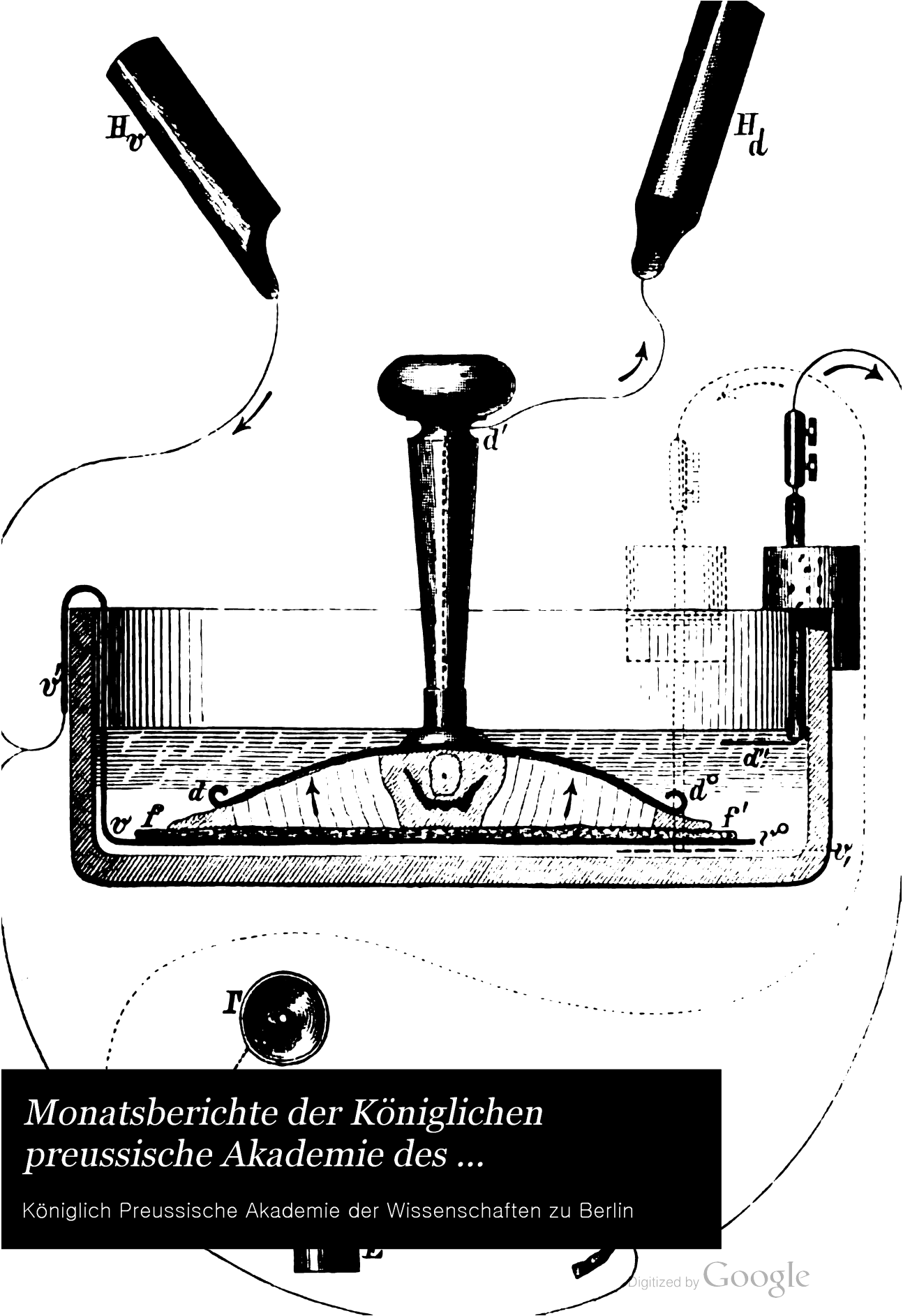
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`



Monatsberichte der Königlichen preussische Akademie des ...

Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin

Digitized by Google

3 2044 106 407 927

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

MATHEMATISCHE

UND

NATURWISSENSCHAFTLICHE

MITTHEILUNGEN

AUS DEN

SITZUNGSBERICHTEN DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

JAHRGANG 1884.

BERLIN, 1884.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION IN FERD. DÜMMLER'S VERLAGS-BUCHHANDLUNG
HARRWITZ & GOSSMANN.

Digitized by Google

Digitized by Google

INHALT.

		Seite
1.	Quincke: Über die Messung magnetischer Kräfte durch hydrostatischen Druck	1
2.	von Wroblewski: Über die Verflüssigung des Wasserstoffs	13
3.	Goldstein: Über elektrische Leitung im Vacuum	15
4.	H. Kronecker und Schmey: Das Coordinationscentrum der Herzkammerbewegungen	27
5.	Johow: Über westindische Hymenolichenen	31
6.	G. Kirchhoff: Über die Formänderung, die ein fester elastischer Körper erfährt, wenn er magnetisch oder diëlektrisch polarisirt wird	47
7.	von Helmholtz: Studien zur Statik monocyklischer Systeme	67
8.	E. du Bois-Reymond: Lebende Zitterrochen in Berlin	87
9.	E. du Bois-Reymond: Bericht über die Wirksamkeit der Humboldt-Stiftung für Naturforschung und Reisen	149
10.	von Helmholtz: Studien zur Statik monocyklischer Systeme (Fortsetzung)	153
11.	Hofmann: Untersuchungen über das Coniin	161
12.	Hofmann: Zur Constitution des Coniins	167
13.	Websky: Über die Ein- und Mehrdeutigkeit der Fundamental-Bogen-Complexe für die Elemente monoklinischer Krystall-Gattungen	169
14.	Spörer: Über die Ermittelung der Knotenlänge und Neigung bei Bestimmung der Rotationselemente der Sonne	185
15.	Mendel: Über paralytischen Blödsinn bei Hunden	191
16.	Fritsch: Ergebnisse der Vergleichungen an den elektrischen Organen der Torpedineen	195
17.	Kossmann: Neueres über Cryptonisciden	207
18.	Wolff: Das Gesetz der Transformation der inneren Architektur der Knochen bei pathologischen Veränderungen der äusseren Knochenform (hierzu Taf. I)	225
19.	Kronecker: Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste	247
20.	Kronecker: Beweis einer Jacobi'schen Integralformel	267
21.	Kronecker: Beweis des Puiseux'schen Satzes	269
22.	Munk: Über die centralen Organe für das Sehen und das Hören bei den Wirbelthieren	275
23.	Eichler: Über den Blüthenbau der Zingiberaceen (hierzu Taf. II)	295
24.	Siemens: Über eine Einrichtung zur Darstellung der von der Pariser Conferenz zur Bestimmung der elektrischen Einheit angenommenen Lichteinheit	311
25.	Christiani: Zur Kenntniss der Functionen des Grosshirns beim Kaninchen	313
26.	Kronecker: Über den dritten Gauss'schen Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste	319
27.	Lipschitz: Bemerkung zu der Abhandlung: Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenem Ausdruck des Linearelements	323
28.	Munk: Zur Kenntniss der Functionen des Grosshirns beim Kaninchen	325
29.	Websky: Über Idunium, ein neues Element	331
30.	Clausius: Über die zur Erklärung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie dienenden mechanischen Gleichungen	333
31.	Fuchs: Über Differentialgleichungen, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen	341
Berichtigungen		353

Digitized by Google

Seite

32. Reden, gehalten von den HH. Waldeyer und Fuchs bei ihrer Aufnahme in die Akademie in der Leibnitz-Sitzung am 3. Juli 1884, und Antworten darauf von den HH. Classensecretaren E. du Bois-Reymond und A. Auwers 355
33. Berichte über die Preisaufgaben der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 369
34. von Helmholtz: Studien zur Statik monocyklischer Systeme (zweite Fortsetzung) 375
35. Kundt: Die elektromagnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes durch Eisen, Cobalt und Nickel 381
36. Wiebe: Über den Einfluss der Zusammensetzung des Glases auf die Nachwirkungs-Erscheinungen bei Thermometern 403
37. Rammelsberg: Über die essigsauren Doppelsalze des Urans (hierzu Taf. III) 411
38. Güssfeldt: Bericht über eine Reise in den centralen Chileno-argentinischen Andes 443
39. Bücking: Über die Lagerungsverhältnisse der älteren Schichten in Attika (hierzu Taf. IV und V) 485
40. Kohlrausch: Die elektrische Leitungsfähigkeit des im Vacuum destillirten Wassers 501
41. Siemens: Beiträge zur Theorie des Magnetismus. 505
42. Voigt: Neue Bestimmungen der Elasticitäts-Constante von Steinsalz und Flussspath 525
43. Schwendener: Zur Lehre von der Festigkeit der Gewächse. 541
44. Kronecker: Die Periodensysteme von Functionen reeller Variabeln 567
45. Behrmann und Hofmann: Umwandlung der Citronensäure in Pyridin-Verbindungen 577
46. Westermaier: Untersuchungen über die Bedeutung todter Röhren und lebender Zellen für die Wasserbewegung in der Pflanze (hierzu Taf. VI) 597
47. Kayser: Über Blitzphotographien (hierzu Taf. VII und VIII) 611
48. Fritsch: Über den Angelapparat des Lophius piscatorius 617
49. G. Kirchhoff: Über einige Anwendungen der Theorie der Formänderung, welche ein Körper erfährt, wenn er magnetisch oder dielektrisch polarisirt wird 625
50. Fuchs: Über eine Form, in welche sich das allgemeine Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung bringen lässt, wenn dasselbe algebraisch ist 641
51. Kronecker: Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen 649
52. von Helmholtz: Verallgemeinerung der Sätze über die Statik der monocyklischen Systeme . . 693
53. König und Richarz: Eine neue Methode zur Bestimmung der Gravitationsconstante 699
54. Hofmann: Beiträge zur Kenntniss der Coniin-Gruppe (erster Theil) 703
55. Hofmann: Beiträge zur Kenntniss der Coniin-Gruppe (zweiter Theil) 727

Namenregister 753
Sachregister 755

Digitized by Google

1. Über die Messung magnetischer Kräfte durch hydrostatischen Druck.

Von G. Quincke
in Heidelberg.

(Vorgetragen am 10. Januar: — gedruckt im Bericht vom 17. Januar [St. III]: — ausgegeben am 24. Januar.)

I.

Im April v. J. habe ich der Königlichen Akademie der Wissenschaften[1] die Resultate einer Untersuchung über die Druckkräfte mitgetheilt, welche isolirende Flüssigkeiten im elektrischen Felde zeigen, wenn sie wie das Glas einer Leidener Flasche elektrisirt werden.

Es zeigte sich dabei im Allgemeinen eine Zugkraft in der Richtung $\pm$ den elektrischen Kraftlinien und eine Druckkraft von nahezu gleicher Grösse $\perp$ zu den elektrischen Kraftlinien, die proportional dem Quadrate der elektrischen Kraft an der betreffenden Stelle des elektrischen Feldes und proportional der Dielektricitäts-Constante der betreffenden Flüssigkeit war.

Ich habe jetzt eine ähnliche Untersuchung für magnetische und diamagnetische Flüssigkeiten durchgeführt mit zum Theil ähnlichen Methoden.

Verhalten sich dielektrisch und magnetisch polarisirte Körper analog, wie es den theoretischen Ansichten von Faraday,[2] Maxwell[3] und Hrn. von Helmholtz[4] entspricht, so muss bei magnetischen Flüssigkeiten unter dem Einfluss magnetischer Kräfte, ähnlich wie bei isolirenden Flüssigkeiten unter dem Einfluss elektrischer Kräfte ein Druck $\perp$ zu den magnetischen Kraftlinien auftreten von der Grösse

$$p = \frac{\mathfrak{K}_1}{8\pi} H_1^2$$

wo H_1 die magnetische Kraft an der betreffenden Stelle des Magnetfeldes und $\mathfrak{K}_1$ eine Constante ist, die der sogenannten Dielektricitäts-

[1] Berl. Sitzungsber. 5. April 1883 S. 413—420.
[2] Faraday, Exp. res. §. 1224; 1297; 1731—36; 2846; 3256; 3266—68.
[3] Maxwell, Electr. and magn. 2 ed. II. p. 257. §. 642.
[4] von Helmholtz, Wissensch. Abh. I. S. 800 und 813.

Digitized by Google

Constante entspricht und die ich deshalb Dimagnetisirungs-Constante der Flüssigkeit nennen möchte.

Die Dimagnetisirungs-Constante der atmosphärischen Luft ist 1, wie die Dielektricitäts-Constante derselben.

Ist eine magnetische Flüssigkeit durch Luft begrenzt, so kann die magnetische Druckdifferenz in der Flüssigkeit und in Luft gleich einem hydrostatischen Druck gemacht und dadurch $\mathfrak{K}_1 - 1$ gemessen werden.

Bei meinen Messungen benutzte ich entweder einen RUHMKORFF'schen Elektromagneten, dessen ebene kreisrunde Polflächen von 140^{mm} Durchmesser in einem Abstande von 1.7 bis 50^{mm} einander gegenüberstanden, oder den grossen Elektromagneten der physikalischen Sammlung der Königlichen Akademie, mit ebenen runden Polflächen von 24^{mm} Durchmesser und 3.5^{mm} Abstand. Der erstere wurde durch eine VOLTA'sche Säule von ein, drei oder zehn, der letztere durch eine solche von ein, zwei oder drei hintereinander geschalteten BUNSEN'schen Elementen erregt.

Die Grösse der magnetischen Kraft H_1 des Magnetfeldes zwischen den Polflächen war nahezu constant und wurde durch die Inductionsströme einer kleinen flachen Spirale von 30^{mm} oder 8^{mm} Durchmesser und ein oder fünf Windungen aus dünnem Kupferdraht gemessen, die aus dem Magnetfelde herausgezogen oder in dasselbe hereingeschoben wurde.

In die von der flachen Inductionsspirale zu dem 15^{m} entfernten Multiplicator führende Drahtleitung war gleichzeitig eine grosse Inductionsspirale von 11 Windungen und 490^{mm} Durchmesser eingeschaltet, in welcher bei Drehung um eine verticale Axe die horizontale magnetische Erdkraft H Inductionsströme erregte.

Nennt man F und F_1 die Flächen der Inductionsspiralen; $2s$ den Ausschlag der Multiplicatornadel, wenn die grosse Inductionsspirale um 180° gedreht wird und in der Anfangs- und Endlage senkrecht zum magnetischen Meridian steht; s_1 den Ausschlag durch den Inductionsstrom der kleinen flachen Spirale, die parallel mit sich selbst aus dem Magnetfelde herausgezogen wird, so ist die magnetische Kraft des Magnetfeldes

$$H_1 = \frac{F}{F_1} \frac{s_1}{s} \cdot H \qquad 1.$$

Die Horizontal-Componente des Erdmagnetismus wurde von Hrn. Dr. WALTER KOENIG mit einem MEYERSTEIN'schen magnetischen Reise-Theodolithen an der Stelle der grossen Inductionsspirale = 0.1935 C.G.S. gefunden.

Die magnetische Kraft des Magnetfeldes schwankte bei dem RUHMKORFF'schen Elektromagneten zwischen 300 und 3000 C. G. S.,

Digitized by Google

bei dem Berliner Elektromagneten zwischen 6000 und 12000 C. G. S. Zur Vergleichung möchte ich erwähnen, dass bei den bekannten Versuchen von VERDET[1] mit einem ähnlichen RUHMKORFF'schen Elektromagneten über die elektromagnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes die magnetische Kraft des constanten magnetischen Feldes 3500 C. G. S. nicht überschritten hat.

Bei kleinem Abstand der Polflächen nahm die magnetische Kraft des Magnetfeldes nur wenig zu mit Verkleinerung des Abstandes.

Der magnetische Rückstand, die magnetische Kraft des Magnetfeldes zwischen den Polflächen nach Unterbrechung des elektrischen Stromes, wurde ebenfalls gemessen und berücksichtigt. Dieser magnetische Rückstand ist nahezu unabhängig von der Stromstärke und nur durch den Abstand der Polflächen bedingt; um so grösser, je näher die Polflächen an einander stehen. Der magnetische Rückstand schwankte bei dem RUHMKORFF'schen Elektromagneten zwischen 15 und 540 C. G. S.; bei dem Berliner Elektromagneten zwischen 400 und 500 C. G. S.

Aus der Ablenkung einer Declinationsnadel in der Nähe des Elektromagneten lässt sich nur auf das magnetische Moment des ganzen Elektromagneten schliessen, nicht auf die magnetische Kraft der einzelnen Stellen des Raumes in der Nähe der Polflächen des Elektromagneten. Bei dem Berliner Elektromagneten verhielten sich die Quadrate der magnetischen Kräfte des Magnetfeldes zwischen den Polflächen nahezu wie die $^3/_2$ Potenzen der magnetischen Momente des ganzen Elektromagneten.

Die Polflächen des RUHMKORFF'schen Elektromagneten konnten vertical oder horizontal gestellt werden, so dass die Magnetkraftlinien des Magnetfeldes zwischen den Polflächen horizontal oder vertical waren.

Ein oben offener quadratischer Trog aus vernickeltem Messingblech hatte verticale Seitenwände aus Spiegelglas und eine eiserne runde Bodenplatte von 150^{mm} Durchmesser. Die letztere wurde auf die untere horizontale Polfläche des RUHMKORFF'schen Elektromagneten gestellt, die obere Polplatte bis auf 1.7^{mm} oder 3.3^{mm} genähert und der Trog mit verschiedenen magnetischen Flüssigkeiten (Sulfaten und Chloriden von Mangan, Eisen, Kobalt und Nickel in Wasser gelöst) gefüllt. Drei Stückchen Spiegelglas oder Messing von gleicher Dicke verhinderten die Berührung der Polflächen beim Magnetisiren.

Von einer centralen Öffnung in der oberen Polfläche führte eine dünne Messingröhre zu einem Schwefelkohlenstoff-Manometer und einem langen Kautschuckschlauch mit Hahn, ähnlich wie bei den Unter-

[1] VERDET, Oeuvres I. p. 119 et 180. Ann. de chim. (3) LII. p. 129 sqq.

Digitized by Google

suchungen über elektrische Druckkräfte.[1] Durch den Hahn wurde eine flache Luftblase in den Raum zwischen den horizontalen Polflächen geblasen, welche beide Polflächen berührte, der Hahn geschlossen und das Schwefelkohlenstoff-Manometer mit einem Kathetometer-Mikroskop[2] beobachtet.

Bei dem Erregen des Elektromagneten vergrösserte sich die Höhendifferenz der Flüssigkeitskuppen in beiden Manometerschenkeln um eine Grösse h; das Manometer zeigte eine Zunahme des Luftdrucks in der flachen Luftblase, die nahezu unabhängig vom Durchmesser der Luftblase, proportional dem Quadrate der magnetischen Kraft H_1 des Magnetfeldes und bei verschiedenen Flüssigkeiten verschieden gross war.

Bezeichnet man das specifische Gewicht der Flüssigkeit im Manometer mit σ, so ist die Differenz des magnetischen Querdrucks auf die Flächeneinheit im Innern der Flüssigkeit und der Luftblase

$$h\sigma = \frac{\mathfrak{K}_1 - 1}{8\pi} H_1^2. \qquad 2.$$

Statt des Schwefelkohlenstoffs kann man auch die magnetische Flüssigkeit selbst als Manometer-Flüssigkeit benutzen.

Die Polflächen des Ruhmkorff'schen Elektromagneten wurden, bei gleichem Abstand wie vorher, einander vertical gegenübergestellt und in das Magnetfeld der enge verticale Schenkel einer U-förmigen Glasröhre gebracht, deren anderer verticaler Schenkel von 25^{mm} Durchmesser in 200^{mm} Entfernung ausserhalb des Magnetfeldes lag. Die U-förmige Röhre war so weit mit magnetischer Flüssigkeit gefüllt, dass die Kuppe im engen Schenkel in der Mitte des Magnetfeldes lag und mit einem Kathetometer-Mikroskop beobachtet werden konnte. Bei dem Erregen des Elektromagneten steigt die magnetische Flüssigkeit um eine solche Höhe, dass die Zunahme des hydrostatischen Druckes gleich der mit dem Schwefelkohlenstoff-Manometer an der flachen Luftblase gefundenen Druckzunahme ist.

Die Druckzunahme ist wieder durch die Gleichung 2 bestimmt, wenn h die Zunahme der Höhendifferenz der Flüssigkeit in den Schenkeln der U-förmigen Röhre, σ das specifische Gewicht der Flüssigkeit bezeichnet.

Diese Druckzunahme findet in einer Richtung $\perp$ zu den magnetischen Kraftlinien statt.

Man findet die gleiche Druckzunahme bei dem Erregen des Elektromagneten, wenn man die magnetischen Kraftlinien zwischen den Polflächen vertical stellt und den einen Schenkel der U-förmigen Röhre durch die centrale Bohrung der Polflächen hindurchführt, so dass die

[1] Quincke, Wied. Ann. XIX. S. 719 und Taf. VIII. Fig. 24. 1883.
[2] Ib. S. 719 und Taf. VIII. Fig. 25. 1883.

Digitized by Google

Kuppe der magnetischen Flüssigkeit sich im Magnetfelde befindet und ∓ den magnetischen Kraftlinien verschoben wird.

Die Zunahme des hydrostatischen Drucks durch magnetische Kräfte zeigte sich unabhängig vom Durchmesser und der Länge der U-förmigen Röhre, sobald die magnetische Kraft an allen Stellen der Flüssigkeitskuppen constant war.

Legt man eine flache Luftblase unter die obere horizontale Polfläche in eine magnetische Flüssigkeit, so dass sie die untere Polfläche nicht berührt, und beobachtet die Luftblase mit einem horizontalen Kathetometer-Mikroskop, so ändert sich die Gestalt der Luftblase nicht bei dem Erregen des Elektromagneten.

Die Capillar-Constante der magnetischen Flüssigkeit an der Grenze mit Luft wird also durch die magnetischen Kräfte nicht merklich geändert. Die von den magnetischen Kräften herrührende Vergrösserung des Drucks auf die Luftblase im Innern der magnetischen Flüssigkeit ist dieselbe ∓ und ⊥ zu den magnetischen Kraftlinien.

Eine ähnliche Luftblase in einer isolirenden Flüssigkeit zwischen horizontalen Condensatorplatten ändert beim Elektrisiren der Condensatorplatten ihre Gestalt sehr bedeutend; wird länger ∓ den elektrischen Kraftlinien und schmaler ⊥ zu den elektrischen Kraftlinien.

Um diesen Unterschied elektrischer und magnetischer Druckkräfte auch bei dem stärkeren magnetischen Felde des Berliner Elektromagneten beobachten zu können, dessen bedeutendes Gewicht (8 Centner) keine Änderung der Lage der horizontalen Magnet-Kraftlinien gestattete, wurde ein anderes Verfahren eingeschlagen.

Ein dünner massiver Flintglasfaden wurde rechtwinklig gebogen, mit dem verticalen gerade abgeschnittenen Theile nach unten zwischen die verticalen Polflächen des Elektromagneten gestellt und an das untere Ende ein Flüssigkeitstropfen gehängt. Der von oben beleuchtete hängende Tropfen wurde von unten mit einem rechtwinkligen Prisma und einem Kathetometer-Mikroskop beobachtet.

Bei dem Erregen des Elektromagneten durch drei BUNSEN'sche Elemente blieb der horizontale Tropfendurchmesser ∓ und ⊥ zu den magnetischen Kraftlinien ungeändert, bei

den magnetischen Flüssigkeiten

Mangansulfat	vom spec.	Gewicht	1.4688
Manganchlorür	»	»	1.3695
Eisenchlorid	»	»	1.5083
Kobaltsulfat	»	»	1.2584

und dem diamagnetischen Wasser.

Auch ein Tropfen Eisenamalgam, an einem amalgamirten Kupferdrahte hängend, behielt denselben Durchmesser ∓ und ⊥ zu den

Digitized by Google

Magnet-Kraftlinien bei Erregen des Elektromagneten. Wenn eine Verschiedenheit vorhanden war, muss sie weniger als $^1/_2$ Procent betragen haben.

Eine bedeutende Änderung der Gestalt der hängenden Tropfen einer magnetischen Flüssigkeit tritt aber sofort auf, wenn das Magnetfeld nicht an allen Stellen gleiche magnetische Kraft besitzt.

Mit der erwähnten Verschiedenheit elektrischer und magnetischer Kräfte ist es in Übereinstimmung, dass isolirende Flüssigkeiten im elektrischen Felde doppeltbrechend werden, während ich bei magnetischen Flüssigkeiten im magnetischen Felde eine solche Doppelbrechung nicht auffinden konnte.

II.

Es folgt aus diesen Versuchen, dass durch das Auftreten der magnetischen Kräfte der hydrostatische Druck an der Grenze von Luft und magnetischer oder diamagnetischer Flüssigkeit $\parallel$ und $\perp$ zu den magnetischen Kraftlinien dieselbe Zunahme oder Abnahme erleidet; dass der von den magnetischen Kräften herrührende Druck $\parallel$ und $\perp$ zu den magnetischen Kraftlinien gleich gross ist.

In einer homogenen Flüssigkeit im Innern eines magnetischen Feldes von constanter magnetischer Kraft müssen sich die magnetischen Druckkräfte das Gleichgewicht halten. Druckunterschiede können nur an der Grenze zweier heterogener Flüssigkeiten auftreten.

Ich habe diese Druckunterschiede für verschiedene magnetische und diamagnetische Flüssigkeiten an der Grenze mit atmosphärischer Luft in U-förmigen Glasröhren gemessen, wenn die Flüssigkeit im engen verticalen Schenkel der U-förmigen Röhre sich zwischen den verticalen Polflächen des Berliner Elektromagneten in einem Magnetfelde von der constanten magnetischen Kraft H_1 befand, der andere weite Schenkel ausserhalb des Magnetfeldes, oder nahezu in einem Magnetfelde von der magnetischen Kraft o.

Die U-förmige Röhre wurde so lange verstellt, bis die Flüssigkeitskuppe in der Mitte des Magnetfeldes lag. Beim Öffnen des erregenden Stromes sank die Kuppe einer magnetischen Flüssigkeit oder stieg die Kuppe einer diamagnetischen Flüssigkeit um die Höhe h, der Druck nahm ab oder zu um eine Grösse

$$h \cdot \sigma = \mathfrak{k} \cdot H_1^2 \ldots \qquad 3.$$

$h\sigma$ misst den Druck in Grammen auf das Quadratcentimeter, wenn h in Centimetern gemessen ist. H_1 ist ebenfalls im C. G. S. System gemessen. $\mathfrak{k}$ entspricht der Grösse $\frac{\mathfrak{K}_1 - 1}{8\pi}$ der Gleichung 2.

Digitized by Google

Die magnetische Steighöhe h erreichte bei meinen Messungen eine Grösse von 32^{mm} und mehr bei den magnetischen Flüssigkeiten; -0.7^{mm} bei den diamagnetischen Flüssigkeiten. Dieselbe wurde für kleinere Steighöhen mit einem Kathetometer-Mikroskop bis auf 0.001^{mm} genau gefunden; für grössere Steighöhen mit einem gewöhnlichen Kathetometer gemessen.

Bei einem durch eine elektrodynamische Maschine erregten Elektromagneten des Karlsruher Polytechnicums, dessen Benutzung ich der Gefälligkeit des Herrn F. BRAUN verdanke und Mangansulfatlösung vom spec. Gewicht 1.4165 zwischen quadratischen Polflächen von 30^{mm} Seite und 6^{mm} Abstand habe ich sogar eine magnetische Steighöhe von 95^{mm} beobachtet, was etwa einer magnetischen Kraft von 20000 C. G. S. entsprechen würde.

In der Tabelle I. ist die magnetische Steighöhe in dem Magnetfelde des Berliner Elektromagneten zwischen Polflächen von 24^{mm} Durchmesser und 3.5^{mm} Abstand gegeben, wenn derselbe durch drei, zwei oder ein BUNSENS'che Elemente erregt war und die magnetische Kraft des Magnetfeldes resp. 12019, 10221 oder 5990 C. G. S. betrug.

Die Temperatur des Zimmers wurde so constant wie möglich erhalten und schwankte etwa zwischen 18° und 20° C.

Tabelle I.

Magnetische Druckkräfte in magnetischem Felde von constanter magnetischer Kraft.

	Spec. Gew.	H_1 C. G. S.			$f \cdot 10^{10}$			$f \cdot 10^{10}$
		12510	10700	6383				
		h						
	σ	3	2	1	3	2	1	Mittel.
		mm	mm	mm				
Mangansulfat No. 1	1.4165	32.464	22.334	8.309	293.4	276.0	288.9	286.1
" No. 2	1.2193	18.568	13.513	4.889	144.5	143.6	146.3	144.8
" No. 3	1.1476	12.031	9.316	3.331	88.12	93.28	93.85	91.75
Manganchlorür No. 1	1.3695	31.944	24.559	9.156	279.2	293.4	307.7	293.4
" No. 2	1.1891	18.127	13.662	5.065	132.6	136.6	142.5	137.2
Manganchlorür No. 1	1.3339	32.631	23.888	8.839	277.8	278.1	289.6	281.8
" No. 2	1.1739	18.614	13.518	4.934	139.4	138.5	142.2	140.0
" No. 3	1.1209	13.248	9.575	3.521	94.71	93.54	96.79	95.01
" No. 4	1.0357	3.831	2.793	1.028	25.33	25.24	26.14	25.57
Manganchlorür in Alkohol.	1.0304	22.739	16.577	6.303	14.95	14.89	15.93	15.26
Eisenchlorid in Wasser....	1.5083	33.679	25.055	9.156	324.1	329.5	338.9	330.8
Eisenchlorid i. Salzsäure No. 1	1.3683	21.272	15.969	5.964	185.8	190.6	200.3	192.2
" " No. 2	1.2600	9.491	7.068	2.609	76.33	77.69	80.68	78.23
" " No. 3	1.2349	6.884	5.132	1.915	54.26	55.29	58.03	55.86
Eisensulfat No. 1	1.2217	12.662	9.132	3.350	98.74	97.34	100.5	99.89
" No. 2	1.1140	6.486	4.700	1.736	46.12	45.67	47.46	46.42
" No. 3	1.0750	4.267	3.073	1.114	29.27	28.81	29.39	29.16

Digitized by Google

	Spec. Gew.	H_1 C. G. S. 12510	10700	6383	$f \cdot 10^{10}$			$f \cdot 10^{10}$
		h						
	σ	3	2	1	3	2	1	Mittel.
		mm	mm	mm				
Ammonium-Eisensulfat	1.1191	4.566	3.348	1.163	32.61	32.68	31.95	32.41
Eisenchlorür No. 1	1.3096	20.643	15.635	5.687	172.5	178.5	182.7	177.9
» No. 2	1.1074	7.840	5.914	2.189	55.38	57.10	59.46	57.31
Kobaltsulfat No. 1	1.2584	11.827	8.550	3.096	94.97	93.85	95.63	94.82
» No. 2	1.1328	6.237	4.524	1.666	45.10	44.71	46.33	45.38
» No. 3	1.0903	4.200	3.022	1.092	29.21	28.74	29.21	29.05
Ammonium-Kobaltsulfat...	1.1055	3.154	2.283	0.840	22.25	22.02	22.79	22.35
Kobaltchlorür No. 1	1.1290	8.723	6.352	2.368	62.85	62.56	65.61	63.67
» No. 2	1.0661	4.166	3.000	1.126	28.34	27.90	29.46	28.57
Nickelsulfat No. 1	1.2921	5.517	3.925	1.386	45.50	44.24	43.96	44.57
» No. 2	1.1495	2.584	1.959	0.697	18.95	19.64	19.66	19.42
» No. 3	1.1020	1.703	1.236	0.441	11.98	11.89	11.93	11.93
Ammonium Nickelsulfat ...	1.0429	0.075	0.062	0.023	0.500	0.563	0.589	0.551
Nickelchlorür No. 1	1.1385	3.444	2.474	0.888	25.02	24.57	24.81	24.80
» No. 2	1.0605	1.381	1.028	0.378	9.344	9.504	9.835	9.561
Kaliumeisencyanid	1.1381	0.886	0.686	0.230	6.434	6.810	6.424	6.556
Kupfersulfat	1.1651	0.660	0.493	0.192	4.908	5.011	5.492	5.137
Äther	0.7152	−0.730	−0.496	−0.184	−3.332	−3.094	−3.229	−3.218
Alkohol	0.7929	−0.684	−0.476	−0.190	−3.461	−3.293	−3.698	−3.484
Benzol (aus Benzoesäure) .	0.8822	−0.605	−0.449	−0.169	−3.407	−3.455	−3.660	−3.507
Terpentinöl	0.8690	−0.652	−0.480	−0.154	−3.616	−3.639	−3.285	−3.513
Salpetersäure	1.3872	−0.401	−0.283	−0.108	−3.549	−3.424	−3.676	−3.550
Kalibichromat	1.0545	−0.534	−0.404	−0.130	−3.592	−3.715	−3.363	−3.557
Benzol (aus Steinkohlenth.)	0.8780	−0.597	−0.479	−0.170	−3.346	−3.668	−3.661	−3.558
Steinöl	0.7988	−0.719	−0.531	−0.185	−3.665	−3.700	−3.627	−3.664
Borwolframs. Cadmium	3.2935	−0.180	−0.130		−3.783	−3.735		−3.759
Zinnchlorür	1.4651	−0.419	−0.283		−3.918	−3.617		−3.767
Schwefelkohlenstoff No. 1..	1.2644	−0.450	−0.367	−0.121	−3.632	−4.049	−3.756	−3.812
Schwefelkohlenst.+Schwefel	1.3976	−0.467	−0.319	−0.102	−4.166	−3.889	−3.499	−3.851
Rapsöl	0.9159	−0.674	−0.483	−0.173	−3.941	−3.859	−3.889	−3.891
Kaliumeisencyanür	1.1723	−0.563	−0.403	−0.118	−4.212	−4.121	−3.395	−3.909
Schwefelkohlenstoff + Jod .	1.2636	−0.502	−0.359	−0.124	−4.049	−3.958	−3.846	−3.951
Schwefelkohlenstoff No. 2..	1.2644	−0.480	−0.370	−0.129	−3.874	−4.082	−4.005	−3.987
Glycerin	1.2518	−0.510			−4.072			−4.072
Ammoniak	0.9307	−0.680	−0.498	−0.184	−4.039	−4.042	−4.204	−4.095
Salzsäure	1.1651	−0.538	−0.407	−0.155	−4.001	−4.137	−4.433	−4.190
Schwefelsäure	1.8326	−0.332	−0.257	−0.102	−3.884	−4.109	−4.588	−4.194
Wasser	0.9983	−0.658	−0.466	−0.179	−4.230	−4.101	−4.484	−4.270
Wismuthnitrat	1.6251	−0.472	−0.295		−4.895	−4.181		−4.538
Magnesiumsulfat.....	1.2500	−0.566	−0.403	−0.155	−4.515	−4.394	−4.755	−4.555
Zinnchlorid	1.8555	−0.409	−0.278		−4.844	−4.500		−4.672
Zinksulfat	1.4393	−0.474	−0.363	−0.147	−4.354	−4.557	−5.193	−4.701
Calciumchlorid	1.3392	−0.597	−0.432	−0.141	−5.103	−5.047	−4.634	−4.928
Jodkalium — Jodquecksilber	3.0843	−0.271	−0.190	−0.066	−5.335	−5.113	−4.997	−5.148
Jodbarium — Jodquecksilber	3.5266	−0.273	−0.194		−6.146	−5.983		−6.064

Digitized by Google

Die Constante $\mathfrak{k}$ ist gleich der mit 8π dividirten Differenz der Dimagnetisirungs-Constanten von Flüssigkeit und atmosphärischer Luft. Die Zahlen der mit $\mathfrak{k} \cdot 10^{10}$ überschriebenen Spalte geben die Druckzunahme in Grammen auf das Quadratcentimeter Grenzfläche von Flüssigkeit und atmosphärischer Luft im Innern der Flüssigkeit, wenn der enge Schenkel der U-förmigen Röhre mit dieser Grenzfläche in ein Magnetfeld von der Kraft 100000 C. G. S. gebracht wird.

Die letzte Spalte enthält die arithmetischen Mittel der für die verschiedenen magnetischen Kräfte gefundenen Werthe von $\mathfrak{k}$.

Dieselben sind je nach der Concentration der Flüssigkeit und der Natur des aufgelösten Salzes verschieden.

Man kann auch h beobachten und daraus mit Gleichung 3 und den in Tabelle I gegebenen Werthen der Grösse $\mathfrak{k}$ auf die Grösse der magnetischen Kraft H_1 des Magnetfeldes schliessen. Schwankungen der magnetischen Kraft, wie sie den Schwankungen der Stromstärke bei einer den Elektromagneten erregenden dynamo-elektrischen Maschine entsprechen, machen sich durch momentane Schwankungen der magnetischen Flüssigkeitskuppe bemerkbar. Es dürfte sich diese Beobachtungsmethode daher für technische Zwecke zur Bestimmung der magnetischen Kraft eines Magnetfeldes sehr empfehlen.

Kommt es nicht auf die äusserste Genauigkeit an, so wird für solche Messungen die magnetische Flüssigkeit in einen langen, horizontalen, schmalen Glastrog gebracht und dieser so aufgestellt, dass ein Theil innerhalb, ein Theil ausserhalb des Magnetfeldes liegt. In den Glastrog wird dann, ähnlich wie in eine Wellenrinne, ein vertikaler Streifen schwarzes Papier getaucht. An dem theilweise benetzten Papierstreifen lässt sich die Curve der Flüssigkeits-Oberfläche erkennen und daraus mit Berücksichtigung des Capillardrucks auf die Vertheilung der magnetischen Kraft des Magnetfeldes schliessen.

Dieselbe Methode lässt sich auch auf Gase anwenden, indem man die atmosphärische Luft über einer diamagnetischen Flüssigkeit durch andere Gase ersetzt. Ich werde die Resultate dieser Untersuchung, mit der ich zur Zeit noch beschäftigt bin, später mittheilen.

III.

Die magnetischen Druckkräfte lassen sich auch benutzen zur Berechnung der Grösse, welche Hr. G. WIEDEMANN[1] Atommagnetismus der Metalle genannt hat bei einer Reihe Salze von ähnlicher chemischer Zusammensetzung.

[1] POGGENDORFF, Ann. 126 S. 23. 1865. G. WIEDEMANN, die Lehre von der Elektricität 3. Aufl. III. S. 852. 1883.

Digitized by Google

Die bei einer Salzlösung von magnetischen Kräften hervorgebrachte Zunahme des Drucks Δp besteht aus zwei Theilen Δp_1 und Δp_2. Der erste Theil Δp_1 rührt her von dem Wasser oder dem Lösungsmittel, das in der Volumeneinheit der Flüssigkeit enthalten ist; der zweite Theil Δp_2 von dem wasserfreien Salz in derselben Volumeneinheit.

Nennt man

G den Procentgehalt der Salzlösung an wasserfreiem Salz,
A das Äquivalentgewicht des Salzes,
H_1 die magnetische Kraft des Magnetfeldes,
σ das specifische Gewicht,
h die magnetische Steighöhe der Flüssigkeit,
σ_w das specifische Gewicht des Wassers,
h_w die magnetische Steighöhe des Wassers für dieselbe magnetische Kraft H_1,

so ist

$$\Delta p = h \cdot \sigma = \Delta p_1 + \Delta p_2 \qquad 4.$$

$$\Delta p_1 = h_w \sigma_w \cdot \frac{100 - G}{100} \qquad 5.$$

$$\Delta p_2 = \mathfrak{A} \frac{G\sigma}{A} \cdot H_1^2 \qquad 6.$$

und daraus

$$\mathfrak{A} = \left(h - h_w \frac{\sigma_w}{\sigma} \cdot \frac{(100 - G)}{100} \right) \frac{A}{G} \frac{1}{H_1^2} \qquad 7.$$

$\mathfrak{A}$ wäre die magnetische Druckkraft in Grammen auf 1 Quadratcentimeter, um welche das wasserfreie Salz stärker drücken würde, als die atmosphärische Luft, in einem Magnetfeld von der magnetischen Kraft 1, wenn in der Volumeneinheit A^{gr} des wasserfreien Salzes vertheilt wären, oder so viel Gramm Salz, wie die Äquivalentzahl desselben angiebt.

Die von Hrn. G. Wiedemann Atommagnetismus genannte Grösse müsste proportional mit der Constante $\mathfrak{A}$ der Gl. 7 sein.

Die letzte Spalte der Tabelle II enthält die Werthe von $\mathfrak{A}$ mit Gl. 7 aus den beobachteten magnetischen Steighöhen h^{cm} berechnet, wenn man folgende Äquivalentzahlen zu Grunde legt:

H =	1	Cr	52.45
N =	14.01	Mn	54.80
O =	15.96	Fe	55.88
S =	31.98	Co	58.60
Cl =	35.37	Ni	58.60
K =	39.03	Cu	63.18
Ca =	39.91	Zn	64.88
Mg =	23.94	Sn	117.35
		Bi	207.5

Digitized by Google

Möglicher Weise waren die von mir benutzten Salze nicht ganz eisenfrei und würde ein solcher sehr geringer Eisengehalt besonders bei kleinen Werthen von $\mathfrak{A}$ einen störenden Einfluss haben, um so mehr, je geringer die Concentration der betreffenden Salzlösung war.

Tabelle II.

		Spec. Gew. σ	Proc. Gehalt G.	$f \cdot 10^{10}$	$\mathfrak{A} \cdot 10^{8}$
Mangansulfat No. 1.....	$MnSO_4$	1.4165	35.74	286.1	8.602
" No. 2.....	"	1.2193	20.96	144.8	8.742
" No. 3.....	"	1.1476	14.83	91.75	8.448
Manganchlorür No. 1.....	$MnCl_2$	1.3695	33.48	293.4	8.114
" No. 2.....	"	1.1891	19.36	137.2	7.918
Manganchlorür No. 1.....	$MnCl_2$	1.3339	31.93	281.8	8.388
" No. 2.....	"	1.1739	18.27	140.0	8.403
" No. 3.....	"	1.1209	12.79	95.01	8.656
" No. 4.....	"	1.0357	4.60	25.57	7.835
Manganchlorür in Alkohol..	$MnCl_2$	1.0304	23.15	15.26	8.174
Eisenchlorid in Wasser....	$FeCl_3$	1.5083	48.18	330.8	7.429
Eisenchlorid i. Salzsäure No. 1	$FeCl_3$	1.3683	30.88	192.2	7.501
" No. 2	"	1.2600	16.17	78.23	6.547
" No. 3	"	1.2349	11.34	55.86	6.892
Eisensulfat No. 1.....	$FeSO_4$	1.2217	20.20	99.89	6.271
" No. 2.....	"	1.1140	11.12	46.42	6.156
" No. 3.....	"	1.0750	7.67	29.16	6.102
Ammonium-Eisensulfat....	$FeSO_4 + (NH_4)_2SO_4$	1.1191	14.61	32.41	6.262
Eisenchlorür No. 1.....	$FeCl_2$	1.3096	27.52	177.9	6.363
" No. 2.....	"	1.1074	10.90	57.31	6.422
Kobaltsulfat No. 1.....	$CoSO_4$	1.2584	21.05	94.82	5.723
" No. 2.....	"	1.1328	11.73	45.38	5.714
" No. 3.....	"	1.0903	8.13	29.05	5.751
Ammonium-Kobaltsulfat...	$CoSO_4 + (NH_4)_2SO_4$	1.1055	12.64	22.35	5.352
Kobaltchlorür No. 1.....	$CoCl_2$	1.1290	12.63	63.67	6.115
" No. 2.....	"	1.0661	6.72	28.57	5.882
Nickelsulfat No. 1.....	$NiSO_4$	1.2921	21.63	44.57	2.647
" No. 2.....	"	1.1495	12.20	19.42	2.554
" No. 3.....	"	1.1020	8.59	11.93	2.619
Ammonium-Nickelsulfat...	$NiSO_4 + (NH_4)_2SO_4$	1.0429	4.89	0.55	2.586
Nickelchlorür No. 1.....	$NiCl_2$	1.1385	11.30	24.80	2.873
" No. 2.....	"	1.0605	6.02	9.56	2.750
Kaliumeisencyanid.....	K_3FeCy_6	1.1381	22.06	6.556	1.295
Kupfersulfat.....	$CuSO_4$	1.1651	14.84	5.137	0.811
Salpetersäure.....	$2(HNO_3)$	1.3872	62.27	— 3.550	— 0.0283
Kalibichromat.....	$K_2Cr_2O_7$	1.0545	10.60	— 3.557	0.0671
Zinnchlorür.....	$SnCl_2$	1.4651	42.53	— 3.767	— 0.0397
Kaliumeisencyanür.....	K_4FeCy_6	1.1723	24.50	— 3.909	— 0.1209

Digitized by Google

		Spec. Gew. σ	Proc. Gehalt G.	$f \cdot 10^{10}$	$\mathfrak{A} \cdot 10^8$
Ammoniak	$2(NH_3)$	0.9307	18.23	— 4.095	— 0.0122
Salzsäure	$2(HCl)$	1.1651	32.82	— 4.190	— 0.0252
Schwefelsäure	H_2SO_4	1.8326	99.59	— 4.194	— 0.0225
Wismuthnitrat	BiN_3O_9	1.6251	45.39	— 4.538	— 0.1177
Magnesiumsulfat	$MgSO_4$	1.2500	22.22	— 4.555	— 0.0533
Zinnchlorid	$SnCl_4$	1.8555	51.00	— 4.672	— 0.0705
Zinksulfat	$ZnSO_4$	1.4393	33.33	— 4.701	— 0.0623
Calciumsulfat	$CaCl_2$	1.3392	34.54	— 4.928	— 0.0510

Bei den verschiedenen Oxydulsalzen des Mn, Fe, Co und Ni ist $\mathfrak{A}$ nahezu dasselbe, unabhängig von der Säure oder den Stoffen, die sonst mit den Metallen verbunden sind.

Dieselbe Beziehung zeigen die von Hrn. G. Wiedemann gegebenen und auf ganz anderem Wege erhaltenen Zahlenwerthe des Atommagnetismus α, die ich in der folgenden Tabelle III mit den entsprechenden Mittel-Werthen von $\mathfrak{A}$ zusammengestellt habe.

Tabelle III.

	$\mathfrak{A} \cdot 10^8$	Atommagnet. α	$\frac{\mathfrak{A} \cdot 10^8}{\alpha}$
Manganoxydulsalze	8.328	100.4	0.0849
Eisenoxydulsalze	6.263	83.1	0.0754
Kobaltoxydulsalze	5.756	67.2	0.0856
Nickeloxydulsalze	2.671	30.5	0.0876
Kaliumeisencyanid	1.295	16.1	0.0804
Kupfersulfat	0.811	10.8	0.0751
			0.0815

Aus dem Atommagnetismus α erhält man also durch Multiplication mit 0.0815 die von mir mit $\mathfrak{A} \cdot 10^8$ bezeichnete magnetische Constante.

Digitized by Google

2. Über die Verflüssigung des Wasserstoffs.

Von S. von Wroblewski
in Krakau.

(Aus einem Schreiben an Hrn. von Helmholtz.)

(Vorgelegt von Hrn. von Helmholtz am 31. Januar; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [S. VI]; — ausgegeben am 7. Februar.)

Krakau, 21. Januar 1884.

. . . . . .

dass es mir gelungen ist, den Wasserstoff zu verflüssigen. Ich comprimirte ihn auf etwa 100 Atm. in einer Glasröhre, die im äusseren Durchmesser etwa 2 und im inneren Durchmesser etwa 0.2 Millimeter hat. Nach der Abkühlung der Röhre im Strome des siedenden Sauerstoffes, wurde der Wasserstoff vom Drucke plötzlich befreit. Bei der Expansion trat die Verflüssigung ein. Das Sieden der Flüssigkeit ist sehr schön zu sehen.

Ich hoffe, dass es mir möglich sein wird, die Temperatur des siedenden Wasserstoffes und hiermit das Minimum zu ermitteln, welches mit den irdischen Stoffen überhaupt zu erreichen ist. Es wird nicht ohne Interesse sein, zu erfahren, in wie weit wir zu dem absoluten Nullpunkt uns nähern können.

Genehmigen Sie u. s. w.

Digitized by Google

Digitized by Google

3. Über elektrische Leitung im Vacuum.

Von E. Goldstein
in Berlin.

(Aus dem physikalischen Institut der Universität.)

(Vorgelegt von Hrn. von Helmholtz am 31. Januar: — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. VI]: — ausgegeben am 7. Februar.)

Gegenüber der Anschauung, dass die Entladung in einem gaserfüllten Raume zum Substrat die Gastheilchen selbst hat, sei es, dass letztere in einem convectiven Process, sei es als Leiter eines Stromes die Entladung vermitteln, habe ich[1], und zwar, wie ich glaube, zuerst[2], den freien Aether als den Träger der Entladung betrachtet. Hierbei zeigte ich, dass die scheinbare Isolation, welche möglichst evacuirte Räume elektrischen Ladungen gegenüber bisher boten, nicht auf einem Widerstande des leeren Raumes beruht, sondern nur durch einen an der Oberfläche der Kathode auftretenden, mit der Verdünnung stark wachsenden Widerstand bedingt ist. Der Widerstand des Gases selbst erwies sich um so geringer, je weiter die Verdünnung fortschritt. Der Wunsch, die von mir behauptete Leitungsfähigkeit des Vacuums direct nachzuweisen, hat mich seit nahe einem Decennium wiederholt zu dahin abzielenden Versuchsreihen veranlasst. Die nachfolgenden Seiten sollen einer Schilderung einiger dieser Versuche, welche schliesslich zu dem gehofften Ergebniss geführt haben, gewidmet sein.

Mit Rücksicht auf das eben erwähnte Resultat, wonach der hemmende Widerstand an der Kathode geringer wird in dichterer Gasumhüllung, der Widerstand einer Gasstrecke sich vermindert mit zunehmender Verdünnung, versuchte ich zunächst an der Kathode eine merkliche Gasdichte herzustellen, während der Raum in der Nähe der Anode möglichst evacuirt blieb.

[1] Goldstein, Wiedemann's Annalen u. s. w. Bd. XII S. 256.

[2] Die bezüglich dieses Gegenstandes in neuerer Zeit vielfach und fast ausschliesslich citirte Arbeit von Hrn. Edlund wurde der schwedischen Akademie zwei Monate später vorgelegt, nachdem meine Arbeit in Wiedemann's Annalen erschienen war. Weder die in wesentlichen Punkten mit meinen Ausführungen übereinstimmende Original-Veröffentlichung Hrn. Edlund's, noch eine der mehrfachen seitdem von ihm veranlassten Reproductionen derselben (z. B. Wiedemann's Annalen Bd. XV S. 514) enthält einen Hinweis auf meine Arbeit.

Digitized by Google

Zu diesem Behuf wurde eine lange gebogene Cylinderröhre (Fig. 1) mit an den Enden eingeschmolzenen Platinstiften bis zum Erlöschen des von einem grossen Ruhmkorff gelieferten Stromes evacuirt. Der mit dem negativen Öffnungspol verbundene Stift *a* war überlagert von gekörntem metallischem Cadmium, das in der Rothglühhitze flüchtig zu werden beginnt. Das Cadmium wurde nun in der aus schwer schmelzbarem Glase gefertigten Röhre von aussen erhitzt, während der mittlere Theil der Röhre stark gekühlt wurde, um die Metalldämpfe dort wieder zu condensiren und das letzte Drittel der Röhre also dampffrei zu lassen. In der That gelang es, auf diese Weise die Entladung wieder herzustellen, die dann in dem Kathodenschenkel durch Cadmiumdampf mit schön grünem Lichte ging, während in dem ebenfalls wieder leuchtenden Anodenschenkel letzteres nicht sichtbar wurde. Doch befriedigte das Resultat nicht völlig, weil das Spectroskop, nachdem ursprünglich Luft in der Röhre gewesen, nach der Cadmiumverdampfung in dem Anodenschenkel stets Spuren kohlehaltigen Gases nachwies. Ich vermochte mir kohlefreies Cadmium oder ein kohlefreies anderes, hier ebenfalls verwendbares Metall nicht zu verschaffen.

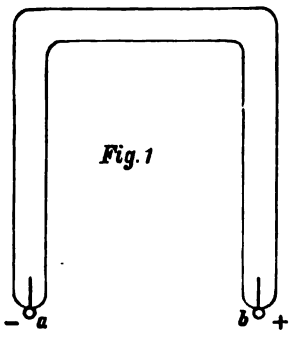


Fig. 1

Beruhte diese Methode gerade auf der Anwendung eines in der Hitze flüchtigen negativen Pols, so beruhte das schliesslich zum Ziele führende Verfahren gerade auf der Erhitzung einer möglichst schwer flüchtigen Kathode:

Der weissglühende Kohlefaden einer elektrischen Incandescenzlampe ist, einer anderen Elektrode gegenübergestellt, eine Kathode, deren Widerstand einen minimalen Bruchtheil des bei gewöhnlicher Temperatur auftretenden bildet, und klein genug ist, um durch einen möglichst evacuirten Raum nicht nur ein Inductorium, sondern sogar die geringen Spannungen schwacher galvanischer Batterien zu entladen.

Die Experimente, welche dieses Resultat ergaben, knüpften an an eine Versuchsreihe, zu der mich vor längerer Zeit eine Stelle des Hittorf'schen Aufsatzes im Jubelband von Poggendorff's Annalen angeregt hatte. Hr. Hittorf geht daselbst von den hier nicht acceptirten Annahmen aus, dass die Gastheilchen Träger des Stromes wie des ihm gebotenen Widerstandes seien, dass der entladunghemmende Widerstand auch in der weiteren Umgebung der Kathode existire, und dass es für seine Beseitigung nur darauf ankomme, die Gasumhüllung

Digitized by Google

der Kathode zu erhitzen und sie hierdurch analog Flammengasen leitend zu machen. Um dem Gase die entsprechende Wärmemenge zuzuführen, will Hr. HITTORF dasselbe mit galvanisch glühend gemachter Retortenkohle in Berührung bringen und sagt von deren Anwendung die Erzeugung von Glimmentladungen in verdünnten Gasen mit »überraschend kleinen Spannungen« voraus.

Vom Standpunkte meiner eigenen Theorie, welche den Gastheilchen eine durchaus secundäre Rolle bei der Entladung zuweist und den scheinbaren Widerstand des Vacuums nicht in einer merklich dicken Schicht, sondern an der Kathodenoberfläche selbst sucht, konnte man indess ebenfalls gespannt sein, welches der Einfluss einer so eingreifenden Zustandsänderung der Kathode auf ihre Widerstandsverhältnisse sein würde, wenn man die Kathode selbst zu möglichst hoher Temperatur erhitzte. Eine Reihe zunächst an galvanisch glühend gemachten Platin-Kathoden in stark evacuirten Röhren ausgeführter Versuche zeigte indess, dass das damals benutzte Platin bei den erforderlichen Stromintensitäten nicht hinreichend lange sich ungeschmolzen erhalten lässt, um eine völlig bestimmte Antwort auf die gestellte Frage zu gestatten, während auf der anderen Seite die zu jener Zeit existirenden Kohlensorten wegen der reichlichen Dampfmengen, die sie in Kurzem entwickelten, sich als unverwendbar erwiesen.

Ich liess das Problem daher von Neuem ruhen, bis vor einigen Jahren das Auftauchen der EDISON'schen und SWAN'schen Glühlampen mit ihren so widerstandsfähigen Kohleschlingen mich zur Wiederaufnahme meiner Versuche veranlasste.

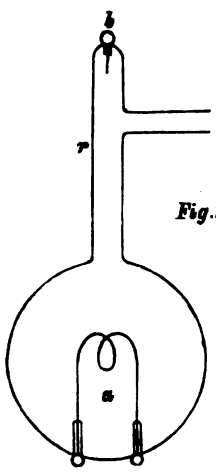


Fig. 2

Eine SWAN-Lampe wurde durch Aufsetzen eines ca. 8^{mm} weiten, 12^{cm} langen Röhrchens r (Fig. 2), das an seinem geschlossenen Ende eine Aluminium-Elektrode b trug, zu einer GEISSLER'schen Röhre ergänzt, und die Röhre, an einer Quecksilberpumpe angeschmolzen, möglichst stark evacuirt. Die Kohlenschlinge a, sowie der Aluminiumstift b wurden mit den Polen eines Inductoriums verbunden und von a und b eine Nebenschliessung zu einem Funkenmikrometer geführt. Die Anfangs einander berührenden Kugeln des letzteren wurden bis dahin auseinandergeschraubt, wo eine weitere Distanzvergrösserung die Entladung wieder hätte durch die Röhre schlagen lassen. Die Distanz der Kugeln betrug alsdann nahe 10^{mm}; der Widerstand der Röhre war dann also angenähert gleich dem Widerstande einer 1^{cm} langen Funkenstrecke

Digitized by Google

in freier Luft. Der Schliessungsstrom des Inductoriums war durch eine Luftlücke ausgeschaltet. Durch die Schlinge *a* wurde der entsprechend regulirte Strom der dynamo-elektrischen Maschine des physikalischen Instituts geleitet und die Schlinge zu intensiver Weissgluth erhitzt. Unter diesen Umständen war eine Änderung der Widerstandsverhältnisse durch die Erhitzung nicht bemerkbar, wenn die Kohlenschlinge zur Anode, der Aluminiumstift zur Kathode gemacht war.[1] Wurde aber die Kohlenschlinge zur Kathode gemacht und in Weissgluth versetzt, so verliess die Entladung sogleich das Funkenmikrometer und ging ausschliesslich durch die Röhre. Sie fuhr beim Zusammenschrauben der Mikrometerkugeln fort, durch die evacuirte Röhre zu gehen, bis die Kugeln auf etwa $^1/_{10}{}^{mm}$ einander genähert waren. Der Widerstand der Röhre war also bei glühender Kathode ca. 100 Mal kleiner als wenn die letztere kalt war. Wurde der von der dynamo-elektrischen Maschine gelieferte Glühstrom unterbrochen, so hörte die Entladung in der Röhre sofort wieder auf, um von Neuem hindurchzugehen, so oft die Kathode wieder weissglühend gemacht war.

Das Glühen der Kathode stellte ebenso die Entladung durch den entleerten Raum wieder her in den Fällen, in denen der Widerstand der möglichst evacuirten Röhre so gross war, dass auch bei beliebig grosser Poldistanz des Funkenmikrometers keine Entladung durch die Röhre mehr erfolgte.

Die Thatsache, dass das Glühen der Kohlenschlinge die Entladung nur wiederherstellt, wenn die Schlinge Kathode ist, zeigt, dass der Wiederdurchgang der Entladung nicht beruhen kann auf einer Gas- oder Dampfentwickelung, welche durch die Erhitzung, sei es an der Schlinge selbst, sei es an der Glaswand, stattfindet. Dafür spricht auch der Umstand, dass die Röhre nach dem Unterbrechen des Glühstromes sofort die Entladung wieder isolirt, auch wenn sie durch einen Hahn gegen die Pumpe abgesperrt ist, wenn also alle während des Glühens etwa entwickelten Gase auch nach dem Glühen in der Röhre verbleiben müssen.

In dem Kugeltheil der Röhre wird das Entladungslicht fast völlig überstrahlt durch das Incandescenzlicht, sehr hell aber tritt es in dem cylindrischen Theil *r* hervor.

Ist in den Schliessungsbogen des Inductoriums keine Luftlücke eingeschaltet, so tritt, wenn die glühende Schlinge zur Anode des Öffnungsstromes gemacht ist, in dem aufgesetzten Rohr *r* ebenfalls helles Entladungslicht auf; dies rührt aber von der Wiederherstellung des

[1] Natürlich musste durch wiederholtes Glühen der Schlinge im Vacuum, Auspumpen und Ausspülen mit trockenem Gase die Austreibung und Entfernung der in und an der Schlinge resorbirten Gase und Dämpfe bewirkt sein.

Digitized by Google

Schliessungsstromes her, dessen Kathode die glühende Schlinge alsdann ist. Der Öffnungsstrom bleibt ausgeschlossen. Die Thatsache, dass bei glühender Öffnungsanode der schwachgespannte Schliessungsstrom übergeht, während der hochgespannte Öffnungsstrom isolirt bleibt, zeigt von Neuem, dass die Verminderung des Röhrenwiderstandes nicht auf einer Dichtesteigerung des Gefässinhalts oder einer Erhitzung der Gesammtmasse desselben beruhen kann.

Es ist eine kleine Vorsicht erforderlich, um sich durch den Schliessungsstrom nicht täuschen zu lassen. Schaltet man nämlich zu seiner Beseitigung schon bei kalter Kathode eine Luftlücke ein, so gross, wie sie erfahrungsmässig, oder nach specieller Probe bei successiver Evacuirung, genügt, den Schliessungsstrom auch bei geringstem Widerstande der Röhre abzusperren, so tritt er bei der geringsten Gasdichte auf Glühen der Schlinge doch wieder auf und kann so im ersten Augenblick eine durch Glühen der Anode veranlasste Entladung vortäuschen. Die Ablenkung durch den Magnet, die Orientirung der positiven Schichten, und vor Allem der Umstand, dass eine Vergrösserung der Luftlücke diese Entladung definitiv beseitigt, zeigen indess, dass man es nur mit dem Schliessungsstrom, also wieder nur mit der Wirkung einer glühenden Kathode zu thun habe. Was wir aus dieser kleinen Beobachtung schliessen dürfen, ist aber, dass der Widerstand der kalt isolirenden Entladungsröhre bei glühender Kathode noch kleiner wird, als der kleinste Widerstand, den die Röhre mit kalter Kathode bei der günstigst gewählten Gasdichte darbieten kann.

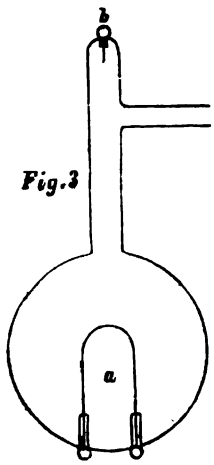


Fig. 3

Es schien mir interessant, noch genauer, als die Angaben des Funkenmikrometers und die oben erwähnte Beobachtung es erkennen lassen, festzustellen, in welchem Maasse die Isolationsfähigkeit des Vacuums durch das Glühen der Kathode vermindert wird, beziehungsweise welche Spannungen an einer glühenden Kathode zur Hervorrbingung einer Entladung durch ein gutes Vacuum noch genügen. Zu den hierauf abzielenden Versuchen wurde eine wie Fig. 3 geformte Röhre benutzt, deren Kohlebügel nur durch das einfache Hufeisen einer kleinen SWAN-Lampe von circa $4^1/_2{}^{cm}$ Durchmesser gebildet war.[1] Der Kohlebügel *a* als die eine, der Aluminium- oder Platinstift *b* als die zweite Elektrode wurden, nachdem

[1] Der Glühstrom wurde der grösseren Bequemlichkeit halber hier entweder einer Batterie von 27 hintereinandergeschalteten, fast frischen BUNSEN-Elementen oder einer Batterie von einigen zwanzig grossplattigen secundären Elementen entnommen, welche letzteren mein Freund Dr. H. ARON construirt hatte.

Digitized by Google

die Röhre sehr stark evacuirt worden, mit den Polen einer kleinplattigen secundären Batterie von PLANTÉ-Elementen verbunden, von denen in Abstufungen von fünf zu fünf bis 500 Elemente eingeschaltet werden konnten.[1]

Blieb der Kohlebügel kalt, so vermochten, wie zu erwarten, auch sämmtliche 500 Elemente hintereinandergeschaltet nicht, eine Entladung durch die sehr stark evacuirte Röhre hervorzubringen. Ebenso trat keine Entladung ein, wenn der Kohlebügel glühte und zugleich mit dem positiven Pol der PLANTÉ-Batterie verbunden war. Die Entladung erfolgte aber schon bei 185 Elementen, wenn der Kohlebügel als Kathode glühte; sie setzte sofort aus, wenn der Glühstrom unterbrochen wurde. Nachdem diese Unterbrechung vorgenommen, wurde die Isolationsfähigkeit des Vacuums, durch welches der Strom der 185 Elemente hindurchgegangen war, mittelst Inductionsstrom und Funkenmikrometer bestimmt. Es ergab sich, dass der Strom des Inductoriums erst durch die Röhre ging, wenn die Spitzen des als Nebenschliessung eingeschalteten Funkenmikrometers weiter als 4 Centimeter von einander entfernt waren. Bei allen kleineren Distanzen ging die Entladung zwischen den Mikrometerspitzen über. Nun hatte jedes der PLANTÉ-Elemente nach der Bestimmung von Dr. HERTZ eine elektromotorische Kraft von 1.8 Daniell, wenn es frisch war; in der vorliegenden Versuchsreihe waren die Elemente indess der Erschöpfung schon ziemlich nahe, ihre elektromotorische Kraft also bei Weitem geringer. Die Angaben über die Spannungsdifferenz, welche zur Hervorbringung eines 40^{mm} langen Funkens zwischen Spitzen erforderlich ist, sind einigermaassen schwankend. Doch dürfen wir als sicher betrachten, dass Zehntausende von Daniells dazu gehören. Es würde also ebenso eine Batterie von mehreren Myriaden Daniells nöthig gewesen sein, um bei kalter Kathode die Entladung durch die evacuirte Röhre zu liefern. In einem andern Falle bewirkten schon 175 PLANTÉ-Elemente den Durchgang durch ein Vacuum, das einen Inductionsstrom von mehrere Centimeter Schlagweite isolirte.

Wurde in die Röhre trockene Luft oder Wasserstoff bis zu Drucken von einigen Centimetern eingelassen, und dann bei kalter Kathode wieder stetig evacuirt, so dass die Röhre durch das Leitungsmaximum hindurchgeht, welches bei successiver Verdünnung auftritt, so genügte dieses Leitungsmaximum doch niemals, eine Entladung der 500 oder gar der 175 Elemente zu bewirken. Ebensowenig trat bei kalter Kathode eine Entladung ein, wenn man vorher bei glühender Kathode

[1] Die Benutzung dieser Batterie verdanke ich Hrn. Dr. H. HERTZ, welcher dieselbe für sich aufgebaut hatte. (Vgl. WIED. Ann. Bd. XIX.)

Digitized by Google

eine starke Quantität kohlehaltigen Gases durch elektrische Zerstiebung des Bügels sich hatte entwickeln lassen. Man kann daraus abermals schliessen, dass nicht eine Gasentwickelung in der Röhre nur scheinbar das Vacuum zu einem Leiter macht: es lässt sich vielmehr bei kalter Kathode überhaupt kein Gasdruck herstellen, welcher eine so schwache Batterie noch entladet.

Wenn das Glühen der Kathode den Widerstand eines sonst isolirenden Vacuums so sehr reducirt, so werden wir von der entsprechenden Behandlung der Kathode allgemein einen Einfluss auf den Widerstand GEISSLER'scher Röhren auch bei höheren Dichten, in denen die Entladung noch spontan durchgeht, erwarten dürfen. Nur wird die Wirkung des Kathodenglühens auf den Gesammtwiderstand der Röhre dann vielleicht eine verhältnissmässig geringere sein, weil je grösser die Gasdichte, auch desto grösser der Widerstand des positiven Lichtes wird, den das Glühen der Kathode ungeändert lässt.

In der That ist nun auch bei höheren Dichten der Einfluss der Kathodenerhitzung zu constatiren. Lässt man nämlich in ein isolirendes Vacuum (Röhre Fig. 2) ein wenig Gas einströmen, so dass die Entladung auch bei kalter Kathode leicht hindurchgeht, so zeigt die Entladung in dem Rohre r, zum Zeichen der eintretenden Widerstandsverminderung, eine ausserordentliche Helligkeitszunahme, sobald die Kathode weissglühend wird. Welche Helligkeitsänderung das Entladungslicht in dem Kugeltheil erfährt, ist wegen des grellen Lichtes des Kohlefadens nicht zu bestimmen.

Die Versuche bei diesen weniger starken Verdünnungen sind deshalb interessant, weil sie wenigstens an dem positiven Lichte der Entladung das Aussehen und den Charakter der letztern bei glühender und bei kalter Kathode vergleichen lassen. Zweitens kann bei der grösseren Masse des noch vorhandenen Gases eine geringe Menge etwa secundär entbundenen Gases das Resultat viel weniger fälschen, als eventuell bei einem isolirenden Vacuum. Endlich liefert auch die spectroskopische Untersuchung dieser Entladungen eine Anzahl beachtenswerther Daten, auf die ich noch zurückkomme.

Was nun den ersten Punkt anbelangt, so bleibt der Charakter der Entladung, soweit Lichterscheinungen darauf schliessen lassen, durchaus der nämliche, wie bei kalter Kathode. Die Grenze des positiven Lichtes ist ihrer Form und Lage nach ganz oder fast dieselbe wie bei kalter Kathode; die Entladung zeigt ebenfalls geschichtetes positives Licht bei glühender Kathode, falls es vor dem Glühen vorhanden war, und die Lage und Ausdehnung der Schichten scheint in beiden Fällen wenig zu differiren. Auch die Phosphorescenz erregenden Kathodenstrahlen scheinen an der glühenden Kathode noch

Digitized by Google

zu existiren; denn man nimmt an der von dem Bügel hell erleuchteten Glaswand als Andeutung des Phosphorescenzlichtes ein Flimmern wahr, das bei Unterbrechung des Inductionsstromes wegfällt. Es tritt also unter dem Einfluss des Kathodenglühens nicht etwa Bogenentladung ein, sondern es gehen, wenigstens unter den hier vorausgesetzten Bedingungen, auch dann noch Glimmentladungen über.

Der Einfluss des Kathodenglühens bei minder starken Verdünnungen lässt sich am anschaulichsten mittelst des Schliessungsstromes demonstriren. — Eine Röhre, deren Öffnungsanode in einem ziemlich engen Röhrentheil liegt, braucht nämlich auch bei sonst ganz metallischen Schliessungsbogen gar nicht sehr stark evacuirt zu werden, damit der Schliessungsstrom nicht mehr hindurchgehen kann. Der Öffnungsstrom geht dann noch mit Leichtigkeit hindurch. Glüht man nun bei solcher Dichte den zur Öffnungsanode gemachten Kohlenbügel, so tritt der Schliessungsstrom mit sehr heller Lichterscheinung von Neuem auf; er cessirt, sobald der Glühstrom wieder unterbrochen wird.

Das Spectroskop wurde nun auf ein mit verdünntem Wasserstoff beschicktes derartiges Rohr gerichtet. Das vor dem Glühen der Kathode sichtbare Spectrum ist das des Öffnungsstromes; es zeigt die Bänder des Wasserstoffes und die Hauptlinien des Quecksilbers. Wird nun durch Glühen der Schliessungsstrom hervorgerufen, so leuchten im Spectrum die Wasserstoffbänder und die Quecksilberlinien hell auf, ohne dass das Spectrum eines dritten Stoffes hinzutritt. Analoges zeigt sich, wenn man mit verdünntem Stickstoff arbeitet; beim Auftreten des Schliessungsstromes erhellen sich dann die bekannten schönen Bänder dieses Gases.

Daraus folgt, dass auch nicht im Moment der Entladung oder ihr unmittelbar vorausgehend eine Gasentwickelung und Dichtesteigerung in der Röhre statthat, welche nachher wieder verschwindet.

Man könnte nämlich etwa noch annehmen, dass die negative Ladung der Kathodenfläche zusammen mit der hohen Temperatur derselben schon vor der Entladung eine Abstossung und Verflüchtigung der Kohle hervorbringt, wie sie unter dem Einfluss genügend gesteigerter Temperatur ja schon constatirt worden ist. Dann würde die wiederhergestellte Entladung nicht in ein Vacuum, sondern in eine Atmosphäre von Kohledampf erfolgen, der schwerflüchtige Kohledampf aber würde nach der Entladung sich sofort wieder condensiren und das frühere Vacuum zurücklassen. Alsdann könnte immerhin, wie oben beobachtet, auch die durch einen Hahn abgeschlossene Röhre nach Unterbrechung des Glühstroms sogleich wieder die Entladung isoliren, ohne dass darin ein Beweis für eine voraufgegangene Permanenz des

Digitized by Google

Vacuums läge. Dann müsste aber das Spectroskop in dem wiederhergestellten Öffnungsstrom ganz vorwiegend die Maxima des Kohlenstoffes zeigen, in dem wiederhergestellten Schliessungs- oder dem verstärkten Öffnungsstrom diese Maxima wenigstens neben denen des ursprünglichen Gases hervortreten lassen. Dies ist nun, wie bemerkt, nicht der Fall. Auch das Spectrum des im Vacuum wiederhervorgerufenen Öffnungsstromes zeigt, wenn die Entladungen nicht zu lange andauern, noch nicht die von der Zerstiebung herrührenden Kohlenmaxima, sondern scheint im ersten Augenblick ein fast reines, von Kohlespuren jedenfalls freies Quecksilberspectrum zu sein.

In den Kreis einer bis zum Erlöschen des Schliessungsstromes evacuirten, mit verdünnter Luft gefüllten Röhre war eine Luftlücke eingeschaltet, gross genug, um den Schliessungsstrom auch bei glühender (Schliessungs-) Kathode abzusperren. Im Spectralapparat erblickt man dann ein mattes Spectrum des Öffnungsstromes, dessen Helligkeit bei kaltem Kohlebügel nur ganz wenig sich steigert, wenn die Luftlücke geschlossen wird; sie wächst gar nicht, wenn bei offener Lücke die Öffnungsanode glühend gemacht wird. Wird jetzt aber die Luftlücke geschlossen, so erscheint ein brillantes Stickstoffspectrum von ausgezeichneter Helligkeit: das Licht des schon erloschen gewesenen Schliessungsstromes wird bedeutend heller als das des Öffnungsstromes; es war mir sogar zweifelhaft, ob diese Helligkeit die vom Öffnungsstrom (bei kalter Kathode) unter dem günstigsten Gasdruck gelieferte nicht mindestens erreicht.

Neben der allgemeinen Helligkeitsänderung veranlasst das Glühen der Kathode aber auch weitergehende Änderungen des Gasspectrums.

Öffnungsstrom und Schliessungsstrom in derselben Röhre unmittelbar einander folgend, haben im Allgemeinen identisches Spectrum. Nicht so in den vorliegenden Versuchen. Ich habe darauf aufmerksam gemacht,[1] dass das Spectrum des positiven Lichts in verdünnter Luft bei abnehmender Gasdichte (oder zunehmender Entladungsintensität) durch unendlich viele Zwischenstufen übergeht in ein gewöhnlich nur vom blauen Kathodenlicht geliefertes Spectrum. Hat nun in dem letztbeschriebenen Versuche das Spectrum des positiven Lichts, wie es der Öffnungsstrom zeigt, dem des Kathodenlichts sich schon beträchtlich genähert, so zeigt der restituirte Schliessungsstrom wieder ganz das bei höheren Dichten beobachtete gewöhnliche Spectrum des positiven Lichts. Ist die Gasdichte so gering, dass das Spectrum bei kalter Kathode dem des Kathodenlichts schon völlig gleich geworden,

[1] GOLDSTEIN, Monatsber. d. Berl. Akad., Mai 1876; — Sitzungsber. d. Wien. Akad., Octob. 1881; — WIEDEMANN'S Annalen, Bd. XV. S. 280.

Digitized by Google

so wird durch das Glühen das Auftreten eines intermediären Spectrums bewirkt. Die Erscheinung beruht nicht auf Erhitzung oder Dichtesteigerung des Gases, da das Spectrum des Öffnungsstromes unverändert bleibt.

Eine Erklärung der Erscheinung könnte vielleicht gegeben werden, wenn man erstens annimmt, dass jeder Öffnungs- oder Schliessungsstrom des Inductoriums aus einer sehr grossen Anzahl von Partialentladungen besteht, von denen jede einzelne einen Einfluss hat auf die Elektricitätsmenge, welche für die ihr folgende Partialentladung erforderlich ist, und wenn man zweitens berücksichtigt[1], dass die Annäherung des positiven Spectrums an das Kathodenspectrum auch eintreten kann bei successiver Vermehrung der auf einmal übergehenden Elektricitätsmengen. Doch würde es mir voreilig scheinen, schon jetzt eine abschliessende Erklärung abgeben zu wollen.

Nachdem ich die bisher geschilderten Resultate erlangt hatte, versuchte ich nochmals an Stelle der Kohle ein anorganisches Kathodenmaterial mit gleichartigen Leistungen aufzufinden. Es gelang mir auch hier, indem ich nochmals auf Platin zurückgriff, das Gewünschte, wenn auch unter mehr Schwierigkeiten, zu erreichen. Ich habe jetzt bei einer Anzahl von Gefässen, in denen der Kohlefaden durch einen dünnen Platindraht ersetzt war, ebenfalls, nachdem der Draht galvanisch glühend gemacht war, die im Vorhergehenden beschriebenen Erscheinungen der Widerstandsverminderung beobachten können. Ebenso traten die zuletzt erwähnten Änderungen der Spectra ganz entsprechend bei Anwendung glühend gemachter Platinkathoden auf. — Jedoch kann ich bisher durchaus nicht für einen beliebigen Platindraht von bestimmter Länge und Dicke im Voraus sicher sein, die gewünschten Phänomene zu erhalten, wie dies bei jedem beliebigen Kohlefaden gestattet ist. Viele Platindrähte schmelzen, ohne einen Strom wiederhergestellt oder den Widerstand merklich vermindert zu haben. Der Grund liegt möglicherweise darin, dass die hier erforderlichen Temperaturen dem Schmelzpunkt des Platins unter allen Umständen sehr nahe liegen. Die Drähte, an denen die Versuche gelingen, werden stets sehr weich; vielleicht existiren Platinsorten, deren Schmelzpunkt schon unter den hier erforderlichen Temperaturen liegt; die aus ihnen gefertigten Kathoden müssen dann schmelzen, ohne die gewünschte Wirkung ausüben zu können. Es stimmt mit dieser Vermuthung, dass eine Anzahl Drähte nur einen Moment z. B. den Schliessungsstrom wiederherstellten und im nächsten Augenblick geschmolzen waren. Ich habe aber auch Platinschlingen gefunden, die eine Zeitlang vor-

[1] Goldstein, Monatsber. d. Berl. Akad. 1876. S. 281.

Digitized by Google

trefflich wirkten und die vorher beschriebenen Phänomene bei zahlreichen Wiederholungen zeigten, die dann aber versagten, auch wenn sie bis zum Schmelzen erhitzt wurden. Für eine gewissse Zahl der betreffenden Fälle könnte die Erklärung in den leitenden Depositis gefunden werden, welche in Folge der Entladungen von dem Platin auf die Wand übertragen werden und welche bei einigermaassen starker Verdünnung die Entladung der eigentlichen Kathode zum grössten Theil zu entziehen pflegen, um sie selbst zu vermitteln. Doch scheinen mir jedenfalls noch verschiedene der Aufklärung bedürftige Punkte hier vorzuliegen.

Ich habe indess die Veröffentlichung dieser Versuche nicht weiter verzögern wollen, nachdem Hr. HITTORF in dem vor einigen Tagen ausgegebenen Januarheft von WIEDEMANN's Annalen ebenfalls den Einfluss besprochen hat, welchen die Kathodenerhitzung auf die Leitungsfähigkeit evacuirter Räume hat. Hr. HITTORF hat galvanisch glühend gemachte CARRÉ'sche Kohlenstäbchen als Kathoden angewandt; mit sehr geringen Spannungen erzielte er dann eine ganz lichtlose Entladungsform durch das Gas. Um Entladungen von der im vorliegenden Aufsatz besprochenen Art zu restituiren, liess Hr. HITTORF einen, zerstiebende Materie überführenden Flaschenfunken oder einen galvanischen Lichtbogen in der Nähe der erhitzten Kathode übergehen. Das reine Vacuum wurde dadurch, wie mir scheint, indess wohl alterirt.

Indem ich mir für einen zweiten Aufsatz ein näheres Eingehen auf die theoretischen Auffassungen der HITTORF'schen Arbeit und die Begründung meiner theilweise abweichenden Stellungnahme vorbehalte, erlaube ich mir noch zu bemerken, dass die in der vorliegenden Abhandlung dargelegten Thatsachen in kurzer Darstellung bereits in einem versiegelten Schreiben enthalten sind, das ich unter dem 2. Juli 1882 bei der Wiener Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften deponirt habe, und dessen Veröffentlichung von mir jetzt beantragt worden ist.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

Digitized by Google

Digitized by Google

4. Das Coordinationscentrum der Herzkammerbewegungen.

Von Prof. H. Kronecker und Cand. med. F. Schmey.

(Vorgelegt von Hrn. du Bois-Reymond am 14. Februar; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. VIII]; — ausgegeben am 21. Februar.)

Es war durch mancherlei Erfahrungen wahrscheinlich gemacht, dass beim Frosche in der Herzkammer unterhalb der Querfurche nervöse Organe vorhanden sind, welche die gesonderte rhythmische Bewegung des Ventrikels vermitteln.

Volkmann beobachtete (1844), dass ein isolirter Froschherzventrikel, welcher der Länge nach von der Basis zur Spitze gespalten wird, coordinirt zu schlagen aufhört, wenn der Schnitt über $^3/_4$ der Längsaxe beträgt. Es pulsiren dann die beiden Hälften in verschiedenem Rhythmus. Ludwig und Hoffa fanden (1850), dass ein Froschherzstumpf, in Froschblut aufbewahrt, $^1/_4$—$^1/_2$ Stunde nach seiner Trennung von den Ganglienhaufen (im Sulcus), mit einer Nadel bestrichen, durch längere Zeit wieder in rhythmische Bewegung gerathen kann. Bidder wies (1852) mikroskopisch, sowie durch Reiz- und Durchschneidungsversuche nach, dass in dem Vorhofsrande des Froschherzventrikels ein die reflectirten Bewegungen bewirkendes Centrum enthalten sein müsse, dessen Einfluss auf den Vorhof, wenn vorhanden, wenigstens minder sicher sei. Nach Abtrennung des Ventrikelrandes mit seinen Ganglien sah er aber in einigen Fällen doch noch Reflexbewegung an der abgetrennten Kammer, in welcher er jedoch keine Ganglien finden konnte. H. Munk postulirte (1861) »Ventrikelganglien an der Mitte des oberen Ventrikelrandes, Vorhofsganglien an der Scheidewand in etwa $^1/_4$ der Vorhofshöhe über den ersteren Ganglien, Bulbusganglien in der unteren Hälfte des Bulbus«. Löwit beschrieb (1881) ausführlich »das Bulbusganglion«; Engelmann zeigte (1882) mikroskopisch, dass der Bulbus aortae des Froschherzens keine Ganglien enthält.

Remak hat (1844) makroskopische Ganglien an den Nerven abgebildet, welche auf den Kammerwandungen und in der Kammerscheidewand des Kalbsherzens verlaufen. In neuester Zeit (1883) hat Wooldridge unter Leitung von C. Ludwig die Function der Kammernerven des Säugethierherzens untersucht und kam zu dem Schlusse,

Digitized by Google

dass die Kammernerven nicht mehr als motorische im weiteren Wortsinne zu betrachten seien. Dagegen hat er von den vorderen Kammernerven sehr interessante sensible Wirkungen auf Pulsfolge und Blutdruck beobachtet. Nach zerquetschender Ligatur »der gesammten Vorhofswand unmittelbar über den Klappensegeln« »setzen die Ventrikel ebenso wie die Vorhöfe ihre Schläge fort, jeder jedoch in einem besonderen Takte,« Vagus und Accelerans innervirten aber jetzt nur noch die Vorkammern, nicht mehr die Kammern.

Die Wege, auf welchen die coordinirenden Erregungen der Ventrikel geleitet werden, waren bisher dunkel geblieben: Nervengeflechte mit und ohne Ganglienzellen, sowie auch die Herzmuskelgeflechte selbst wurden dafür in Anspruch genommen. Folgende Beobachtungen werfen auf diese Wege neues Licht.

Der Zweite von uns hat seit mehreren Monaten eine Reihe von Versuchen angestellt, welche die Contractionsart der Herzkammermuskeln verdeutlichen sollten. Bei dieser Gelegenheit stiessen wir auf folgendes sehr merkwürdige Phänomen:

Ein Hund war narkotisirt und curarisirt, künstliche Athmung war eingeleitet, das Herz war freigelegt, auf dem angespannten Perikard zur Thoraxapertur gehoben; die Vagi waren zur Tetanisirung präparirt, Kymographion und Schreibvorrichtungen waren in Ordnung gebracht, um die Contractionen des sehr kräftig schlagenden Herzens von dem grossen Hunde auf den rotirenden Cylinder zu übertragen. Der Eine von uns senkte eine Nadel in das Herz, um die Bewegungen der getroffenen Stelle zu registriren. — Da hörten, momentan gelähmt, die Herzkammern zu pulsiren auf und verfielen, diastolisch erweitert, in fibrilläre Zuckungen, wie man solche bei acut absterbenden Herzen zu sehen pflegt. Sofort wurde die Nadel entfernt, der Zustand blieb. Kneten des Herzens war erfolglos. Die Coronargefässe waren unverletzt. Die Vorhöfe pulsirten normal weiter. Als die Vagi tetanisirt wurden, blieben die Vorhöfe, wie normal, in Diastole ruhig, die Ventrikel aber setzten ihr Flimmern unbeeinflusst fort. — Das Thier starb, ohne dass die Kammern noch einen Schlag ausgeführt hätten.

Nun erinnerten wir uns, bei den früheren Versuchen schon ähnliche Erscheinungen beobachtet zu haben; doch war dies meist in vorgeschrittenen Stadien der Experimente geschehen, nach wiederholten Einstichen und localen Zerrungen des Herzens. Wir wiederholten den Versuch unter einfachsten Bedingungen und fanden ohne Ausnahme bei acht Hunden, wie bei Kaninchen, dass die Verletzung einer kleinen noch nicht umgrenzten und anatomisch bestimmten Stelle an der unteren Grenze des oberen Drittels der Kammerscheidewand genügt, um die Herzkammern dauernd zu lähmen.

Digitized by Google

Hier — am geschütztesten Orte des Herzens — muss also ein Kreuzungspunkt der Innervationswege liegen, welcher in der Norm als Coordinationscentrum für die Musculatur der Herzkammern dient und wirksame Pulse ermöglicht. Wenn dies ordnende System zerstört ist, so arbeiten die Muskelgeflechte anfangs nicht weniger kräftig aber erfolglos, weil ungleichzeitig.

Die Acupunctur des Herzens ist seit Jung (Berichte der naturforschenden Gesellschaft in Basel 1836) wohl von allen Physiologen als ein ganz unschädliches Hilfsmittel benutzt worden, um die Bewegungen des Herzens oder einzelner Abschnitte desselben am unversehrten Organe zu studiren. Steiner hat (1871) die Elektropunctur des Herzens zur Lebensrettung bei Chloroformsynkope empfohlen. Vulpian hat (1874) vor solcher Elektropunctur gewarnt, weil Inductionsströme auch nur mässiger Intensität das Herz tödten können.

Bardeleben sagt in seinem Lehrbuch der Chirurgie (1865, Bd. III S. 627, 628): »Die Herzwunden sind nicht alle absolut tödtlich. Dies gilt zunächst ohne Zweifel für diejenigen, welche zwar in die Herzsubstanz eindringen, aber keine der Herzhöhlen geöffnet und keines der Kranzgefässe des Herzens verletzt haben. Aber auch diejenigen, welche in eine der Herzhöhlen, namentlich in einen Ventrikel gelangt sind, tödten nicht immer. Erfahrungen der Art sind von Jägern häufig an Thieren gemacht worden, in deren Herzsubstanz sie nicht blos in die Ventrikel eindringende Narben, sondern auch in diesen Höhlen selbst liegende Kugeln vorfanden. Dupuytren hat vorzugsweise darauf aufmerksam gemacht, dass auch die Richtung der Wunde im Verhältniss zur Anordnung der Muskelfasern der Ventrikel und der Umstand, ob das verletzende Instrument längere Zeit in der Wunde verweilt hat, oder sogleich wieder ausgezogen ist, für die Frage nach der Lebensgefahr überhaupt, und namentlich nach der unmittelbaren Lebensgefahr von Bedeutung ist. Tödtlich werden Herzwunden entweder durch Blutung nach aussen oder durch strotzende Füllung des Herzbeutels mit Blut und dadurch bedingte Behinderung der Herzbewegung.«

Digitized by Google

Digitized by Google

5. Über westindische Hymenolichenen.

Von Friedrich Johow
in Bonn.

(Vorgelegt von Hrn. Pringsheim am 21. Februar; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. X]; — ausgegeben am 28. Februar.)

So sicher und unumstösslich die Lehre vom Organismus der Flechten als eines Consortiums von Pilzen und Algen durch die Arbeiten Schwendener's, Stahl's, Bornet's und anderer Forscher seit längerer Zeit begründet ist, so räthselhaft erschien bis in die neueste Zeit in dieser Lehre die Beschränkung der Flechtensymbiose auf die Gruppe der ascosporen Pilze. Erst vor zwei Jahren haben wir zum ersten Mal durch Mattirolo[1] von dem Vorkommen einer Symbiose zwischen Algen und basidiosporen Pilzen gehört, und zwar hat sich dabei eine längst gekannte, aber in ihrer Organisation unerforschte Gattung tropischer Flechten, das Genus *Cora* Fries, als eine Gruppe von Hutpilzflechten entpuppt. Die Untersuchungen Mattirolo's an *Cora pavonia, glabrata* und *ligulata* ergaben als Resultat, dass diese Gewächse einerseits heteromere Laubflechten, andererseits Hymenomyceten aus der Familie der Telephoreen sind, und dass sie als Pilze die nächste Verwandtschaft zeigen zu den Gattungen *Kneiffia, Stereum* und *Hypochnus*. Das Material, welches diesen Untersuchungen zu Grunde lag, war leider wegen seiner Spärlichkeit und seines schlechten Erhaltungszustandes weder zur Feststellung der Entwicklungsgeschichte, noch zur zweifellosen Erledigung mancher wichtigen anatomischen Fragen geeignet, und es dürfte daher eine allseitige Überzeugung von der Richtigkeit der Resultate Mattirolo's bisher keineswegs erzielt sein.

Die Ausfüllung der vorhandenen Lücken und die endgültige Aufklärung der interessanten Frage erheischte eine erneute, eingehende Untersuchung an frischem und reichlichem Material, ein Erforderniss, dem nur durch eine nach dem Vaterlande der fraglichen Gewächse unternommene Reise entsprochen werden konnte. Eine solche Reise liess neben neuen Ermittelungen über die wenigen bisher bekannten Hymenolichenen auch eine Eweiterung dieser systematisch so wichtigen

[1] Contribuzione allo studio del genere *Cora* Fries. Nuovo giornale botanico italiano. Fasc. IV. Ott. 1881.

Digitized by Google

Gruppe durch Auffindung neuer hierher gehöriger Formen erhoffen. Verfasser unternahm demgemäss mit Unterstützung der Königlichen Akademie der Wissenschaften im December des Jahres 1882 eine auf mehrere Monate berechnete Reise nach West-Indien und Venezuela, welche neben anderen botanischen Zwecken die Erforschung der Hymenomyceten-Flechten zur Aufgabe hatte. Es sei gestattet, die Ergebnisse der in America angestellten Untersuchungen über die Hymenolichenen nachstehend im Auszuge mitzutheilen. Die ausführliche Publication, welche an dieser Stelle aus Mangel an Raum nicht erfolgen kann, findet man nebst den zugehörigen Abbildungen in einem der nächst erscheinenden Hefte der »Jahrbücher für wissenschaftliche Botanik«.

I.

Cora pavonia Fr.

Das erste Object der Untersuchung bildete die auch von Mattirolo am eingehendsten studirte *Cora pavonia* Fr. In Anbetracht der Seltenheit dieser Pflanze in den Herbarien und des besonderen Interesses, welches sich an die geographische Vertheilung so eigenartiger Gewächse knüpfen muss, wird eine kurze Erläuterung der natürlichen Standortsverhältnisse von *Cora* hier zunächst am Platze sein.

Nach den Standortsangaben der Herbarien, sowie nach eigenen Befunden zu urtheilen, wächst die Pflanze niemals in den heissen Ebenen und tief gelegenen Thälern, sondern ausschliesslich an bergigen, 1000 Fuss und mehr über den Meeresspiegel sich erhebenden Örtlichkeiten, welche ein kühles und dabei andauernd feuchtes Klima besitzen. Weder auf Dominica noch auf Trinidad und in Venezuela war in der Ebene eine Spur der Pflanze aufzufinden, dagegen gedieh sie in üppigen und zahlreichen Exemplaren in dem etwa 2000 Fuss hoch gelegenen, kühlen und feuchten Bergthal der Niederlassung Laudat auf Dominica, sowie in den höher gelegenen Theilen des Marácas-Thales auf Trinidad. Ein Haupterforderniss für das Gedeihen der Pflanze ist ferner eine bedeutende Beleuchtungs-Intensität des Standorts, was sich daraus ergiebt, dass sie nur auf Lichtungen vorkommt, dagegen in den unteren Regionen des eigentlichen Urwaldes gänzlich fehlt. Da nun ohne Zweifel der Wald, welcher erwiesenermaassen die oben genannten Inseln früher ausschliesslich bedeckt hat, der ursprüngliche Herkunftsort der Pflanze sein muss, so ist es in hohem Grade wahrscheinlich, dass dieselbe in analoger Weise wie die phanerogamischen Epiphyten in dem vom Lichte getroffenen Baum-

Digitized by Google

kronen des Waldes ihren eigentlichen (unerreichbaren) Standort hat, und dass sie nur gelegentlich der Entstehung von Waldblössen zugleich mit dem Lichte zur Erde herabsteigt.

Diese einseitige Anpassung der Pflanze an gleichzeitig kühle, feuchte, helle und hoch gelegene Standorte erklärt einerseits ihre scheinbare Seltenheit, andererseits die Schwierigkeit, sie in der Ebene längere Zeit am Leben zu erhalten. In dem heissen Küstenort Roseau auf Dominica, wo aus äusseren Gründen die mikroskopische Untersuchung angestellt werden musste, gingen die gesammelten Exemplare trotz sorgfältiger Pflege gewöhnlich schon nach einigen Tagen zu Grunde.

An den Fundorten von der geschilderten Beschaffenheit findet man die Flechte epiphytisch an den Rinden von Sträuchern und alten Baumstümpfen, nach der Art eines *Polyporus* oder einer *Thelephora* an dem Substrat befestigt. Ein häutiger Thallus von rundlichem Umriss sitzt einseitig einer Baumrinde an oder umfasst nierenförmig einen dünnen Zweig. Da der Thallus schräg nach unten gerichtet ist, kann man eine beleuchtete Ober- und eine beschattete Unterseite unterscheiden. Der Rand des Thallus ist im Allgemeinen kreisbogenförmig, doch fast immer durch zahlreiche Einschnitte gelappt. Die einzelnen Lappen richten sich durch gegenseitigen Druck wulstförmig aneinander auf und schieben sich oft seitlich übereinander; es entstehen dadurch später grosse Familien miteinander zusammenhängender Thalli, welche grosse Areale des Substrats überziehen.

Eine für den Habitus der Flechte sehr charakteristische Eigenschaft, welche sie mit der namensverwandten Alge *Padina pavonia* theilt, besteht in den zahlreichen, mit dem Rande parallel verlaufenden Zonen, welche auf beiden Seiten des Thallus hervortreten. Diese Zonen beruhen nicht, wie MATTIROLO will, auf erhabenen Wülsten, sondern auf der wellig hin- und hergebogenen Gestalt der Thallusscheiben und sind auf örtliche Ungleichmässigkeit des intercalaren Wachsthums von Ober- und Unterseite zurückzuführen.

Der äusserste Rand der Thallusscheiben ist ferner ausnahmslos nach oben (nicht nach unten, wie MATTIROLO angiebt) ein wenig einwärts gerollt, eine Erscheinung, die durch das stärkere marginale Wachsthum der Hyphen der Unterseite veranlasst wird. Durch späteres, intercalares Wachsthum werden die eingerollten Theile allmählich gerade gestreckt. Intercalares Wachsthum findet überhaupt in allen Theilen des Thallus in sehr ausgiebigem Maasse statt.

Was die Farbe der Thallusscheiben betrifft, so giebt schon O. SWARTZ[1] richtig an, dass sie wie bei den gewöhnlichen Flechten

[1] *Flora Indiae occidentalis.* 1806.

Digitized by Google

in auffälliger Weise wechselt, je nachdem die Pflanze benetzt oder trocken ist. Im erstgenannten Zustande erscheint die Oberseite glänzend blaugrün, im letzteren Fall bewirkt die zwischen die Hyphen eindringende Luft eine gleichmässige Weissfärbung, die nur in einer schmalen Randzone (da wo die Gonidien unmittelbar zu Tage treten) nicht eintritt. Die Unterseite ist im Zustande der Benetzung grünlich weiss, im trockenen Zustande rein weiss gefärbt.

Die geschilderte Beschaffenheit trifft zunächst für sterile Thallusscheiben zu. Im Zustande der Fructification bietet nur die untere Fläche ein davon abweichendes Bild dar. Die Fructificationsorgane, die wir als Hymenien kennen lernen werden, bedecken meist den grössten Theil der Unterseite als häutige Lamellen von verschiedener Ausdehnung und Anordnung. In der Mehrzahl der Fälle ist die Randparthie des Thallus von Hymenien entblösst oder nur spärlich mit kleinen Areolen oder Papillen bestanden, während auf den hinteren Theilen entweder continuirliche Häute oder concentrische Reihen distincter Papillen vorhanden sind. Letztere schliessen im befeuchteten Zustande ebenfalls auf grössere Strecken hin zu einheitlichen oder durch Risse und Furchen gefelderten Hymenien zusammen; bei der Austrocknung trennen sie sich wieder von einander, wobei sich ihr freier Rand etwas nach oben einrollt. Die Vermuthung Mattirolo's, dass die Hymenien im jugendlichen Zustande gleichmässig über die untere Fläche ausgebreitet seien, habe ich nicht bestätigt gefunden. Vielmehr beginnt die Fructification an einzelnen, getrennten Punkten: es werden zuerst kleine Papillen oder Knötchen sichtbar, die in immer wachsender Zahl und Dichtigkeit auftreten und sich zu continuirlichen Häuten zusammenordnen.

Dem grünen, lamellös entwickelten Thallus von *Cora* steht als ein zweiter wesentlicher Bestandtheil der Pflanze ein der grünen Färbung entbehrendes, weil ausschliesslich myceliales Gebilde gegenüber: der Haftkörper. Wie andere Laubflechten besitzt nämlich auch *Cora* besondere Hyphen, welche den Thallus an der Ansatzstelle mit dem Substrat befestigen. Sind aber diese zur Befestigung dienenden Myceltheile bei den gewöhnlichen Flechten auf eine Anzahl Rhizinen- oder Hyphenbündel beschränkt, welche niemals irgend wie beträchtliche Glieder des Pflanzenkörpers darstellen, so sehen wir die entsprechenden Organe bei *Cora* oft zu einem Volumen entwickelt, welches die Function derselben als blosser Haftapparat in Frage stellt. Nicht selten freilich hat es auch bei *Cora* mit der Bildung weniger Hyphenbündel sein Bewenden, welche den Thallus locker mit dem Substrat befestigen; doch trifft dieses Verhalten nur für diejenigen Exemplare zu, deren Substrat relativ uneben und rissig und daher zum Festhalten von

Digitized by Google

Feuchtigkeit in hervorragendem Grade geeignet ist. An relativ glatten und daher trockeneren Rinden bilden sich dagegen die »Rhizinenbündel« zu einem voluminösen Polster aus, welches dem schräg nach unten gerichteten Laubthallus keilförmig untergeschoben erscheint, so zwar, dass es den Raum zwischen dem letzteren und dem Substrat bis zu einer gewissen Entfernung von der Insertionskante ausfüllt. Die Individuen ganzer Thallusfamilien hängen vermittelst ihrer in Continuität stehenden Haftkörper innig mit einander zusammen und lassen sich auf das leichteste als Ganzes von dem Substrat ablösen.

Das in Rede stehende Gebilde hat, wie schon die blosse Betrachtung der Oberfläche zeigt, eine lacunöse, badeschwammartige Beschaffenheit. Dieselbe giebt sich ferner bei Befeuchtung mit Wasser in auffälligster Weise dadurch kund, dass grosse Mengen von Flüssigkeit auf das begierigste eingesogen werden. Es weist diese Eigenschaft des Gebildes sowie seine besonders reichliche Ausbildung bei Exemplaren relativ trockener Standorte mit Deutlichkeit darauf hin, dass es die Function eines Feuchtigkeitsreservoirs für die Pflanze erfüllt. Eines solchen Organes ist die Pflanze mit Rücksicht auf den lockeren Bau ihrer oberflächlichen Hyphenschichten und den gänzlichen Mangel einer festen, die Austrocknung verhindernden Rinde besonders bedürftig.

Wenden wir uns nun zur anatomischen und entwicklungsgeschichtlichen Betrachtung der Flechte und erörtern auch hier zunächst die Structur des fertigen, grünen Laubthallus. Wie Mattirolo richtig angiebt, zeigt die sterile Thallusscheibe im Querschnitt drei Schichten, eine mittlere Gonidienzone und eine obere und untere Hyphenschicht. Die letztere Schicht erschien Mattirolo, vermuthlich deshalb, weil ihm nur fructificirende Exemplare vorlagen und er daraus die Ansicht gewann, der ganze Thallus von *Cora* sei als ein analoges Gebilde wie der Fruchtkörper eines Hutpilzes beständig mit Hymenium bekleidet, als blosse Übergangsschicht zu dem reproductiven Theil; er bezeichnete sie daher als stratum intermedium. Da diese Annahme indessen nicht zutrifft, haben wir neben dem stratum gonidiale und superius ein stratum inferius zu unterscheiden.

Im Gegensatze zu den ächten Laubflechten sind die beiden oberflächlichen Schichten aus ganz locker verflochtenen Hyphen aufgebaut und bilden niemals eine pseudoparenchymatische Rinde. Die Hyphenschicht der Oberseite übertrifft diejenige der Unterseite ein wenig an Höhe, wogegen sie in der Dichtigkeit der Hyphenverflechtung der unteren erheblich nachsteht. In der oberen Schicht verlaufen die Hyphen einigermaassen regelmässig, nämlich annähernd parallel mit einander und senkrecht zur Oberfläche, wobei sie grosse longitudinale

Digitized by Google

Lufträume zwischen sich lassen; in der unteren Schicht sind die Hyphen reichlicher verzweigt und lassen keinerlei Regelmässigkeit des Verlaufs erkennen. Auf beiden Seiten legen sich die Hyphenäste der Oberfläche annähernd parallel der letzteren und bilden so eine etwas dichtere, das lacunöse Innere des Thallus unvollkommen abschliessende Decke. Auf der Unterseite endigen die dort zu Tage tretenden Hyphenäste mit sonderbaren, knorrigen Auszweigungen.

Die Gonidienzone ist die dichteste Schicht des vegetativen Thallus und die einzige, in welcher die Hyphen sich zu einer Art Pseudoparenchym vereinigen. Nur an der Grenze gegen die beiden oberflächlichen Schichten ragen die Lufträume eine Strecke weit in die Gonidienschicht hinein. Die sehr eleganten Gonidien sind lebhaft blaugrün gefärbte Chroococcus-Zellen von verschiedener Grösse, welche sich durch Allwärtstheilung vermehren, sich durch gegenseitigen Druck polygonal abplatten und in grösseren oder kleineren Gruppen aneinander liegen bleiben, bis die Pilzhyphen zwischen die einzelnen Individuen eindringen. Die Umspinnung der Gonidien durch die Pilzhyphen ist eine ausserordentlich innige; die Gonidiengruppen sind von einem dicht anschliessenden Netzwerk von Hyphengewebe umstrickt.

Das Bild, welches ein tangentialer Querschnitt darbietet, zeigt dieselbe Anordnung der Elemente wie ein radial geführter Schnitt. Auch aus der Flächenansicht des Thallus ist keinerlei Verschiedenheit der Structur in den beiden Richtungen ersichtlich. Es ist daher ein radialer Verlauf der Hyphen oder eine centrische Anordnung der Elemente (wenigstens eine kurze Strecke weit hinter dem Rande) im Thallus von *Cora* nicht gegeben.

Was den anatomischen Bau des eingerollten Randes als des Ortes des marginalen Wachsthums betrifft, so ist die auffallendste Erscheinung in dieser Thalluspartie das Fehlen der oberen Hyphenschicht in dem eingerollten Theil selbst und eine Strecke weit hinter demselben. Die Gonidien liegen daher in einer schmalen, mit blossem Auge deutlich erkennbaren Randzone frei zu Tage. Da die Gonidiengruppen mit ihrer Pilzumstrickung hier so locker im Thallus inserirt sind, dass sie sich mit einem weichen Haarpinsel auf das leichteste abheben lassen, so ist es im hohen Grade wahrscheinlich, dass an dieser Stelle ein Freiwerden von Gonidien auch in der Natur erfolgt, dass daher die Pflanze in analoger Weise wie die gewöhnlichen Flechten sich durch »Soredien« zu vermehren vermag.

Um auch auf die Entwicklung des vegetativen Thallus in Kürze einzugehen, so sei hier erwähnt, dass die kleinsten und jüngsten Thalli, welche ich in der Natur auffand, kleine rundliche Scheiben darstellten, welche einseitig am Substrat festsassen und am freien Rande durch

Digitized by Google

vorspringende Gonidiengruppen unregelmässig eingebuchtet waren. Die für spätere Zustände charakteristische Einrollung des Randes besassen diese jüngsten Thalli noch nicht, im Übrigen stimmten sie in Gestalt und Structur vollkommen mit den älteren Stadien überein. Nach erfolgter Einrollung des Randes, welche schon an ganz jungen Thallis von wenigen Millimetern Breite sich zu bilden beginnt, treten bis zur Fructification keine wesentlichen Veränderungen mehr auf. Die Scheibe vergrössert sich durch marginales und intercalares Wachsthum und bildet entsprechend der Beschaffenheit ihres Standorts den Haftkörper aus.

Über die Structur des letzteren ist wenig zu berichten. Eine grosse Anzahl von Hyphenbündeln laufen im Allgemeinen parallel mit einander und senkrecht zu der freien Basis des keilförmigen Kissens, welches den Haftkörper darstellt. In anderen Fällen breiten sich die »Rhizinenbündel« unregelmässig über das Substrat aus und bilden auf demselben eine spongiöse, leicht ablösbare Haut.

Zu den geschilderten, vegetativen Theilen des Thallus kommt im Stadium der Fructification das Fruchtlager hinzu. Im fertigen Zustand zeigt ein Querschnitt dasselbe zusammengesetzt aus einzelnen, schon mit blossem Auge unterscheidbaren Papillen von pyramidenförmiger Gestalt, welche mit ihren Spitzen in das stratum inferius übergehen, während ihre Basen zu einer nur stellenweise unterbrochenen, die freie Ebene des Hymeniums darstellenden Fläche zusammenschliessen. Jede Papille besteht aus einer Garbe reichlich verästelter Hyphen, deren letzte Endigungen die Basidien, beziehungsweise Paraphysen repräsentiren.

Die Entwickelung der Papillen zeigt einen Verlauf, wie er schon aus dem morphologischen Bau mit Wahrscheinlichkeit hervorgeht. An getrennten Punkten der anfangs sterilen Unterseite sieht man zahlreiche Gruppen von Hyphenästen aus dem statum inferius hervortreten, sich immer reichlicher verästeln und schliesslich büschelförmige Endzweige bilden, die sich in senkrechter, paralleler Lage neben einander ordnen. Haben die Papillen eine bestimmte Höhe und Breite erreicht, so stossen sie seitlich an einander, und ihre freien Flächen nehmen durch gegenseitigen Druck eine polygonale Gestalt an. In vielen Fällen sind die Papillen nicht zahlreich genug und in hinreichend regelmässiger Vertheilung vorhanden, um eine allseitig geschlossene Schicht zu bilden, und es bleiben dann die oben geschilderten, unregelmässigen Risse und Lücken als sterile Stellen zurück. In der Nähe des Thallusrandes ist das Hymenium gewöhnlich in Gestalt zerstreuter, kleiner Areolen ausgebildet, während auf den hinteren Theilen des Thallus in der Regel grössere, mehr zusammenhängende Hymeniumportionen anzutreffen sind.

Digitized by Google

Eine auffallende Abweichung von dem normalen Bau des Fruchtlagers kommt zuweilen dadurch zu Stande, dass einige der keulenförmigen Endigungen der scheinbar fertigen Basidienschicht sich unter erneuter Verlängerung und Verzweigung aus der Ebene der übrigen erheben und so über der ursprünglichen Basidienschicht ein secundäres Hymenium bilden, welches mit dem ersten in ähnlicher Weise wie dieses mit dem vegetativen Thallus zusammenhängt. Derselbe Vorgang der Überwachsung kann sich sogar noch mehrere Male wiederholen.

Von den Elementen der Basidienschicht wird nur ein ausserordentlich geringer Theil zu sporentragenden Basidien, die überwiegende Mehrzahl bleibt steril und fungirt als Paraphysen. Beiderlei Gebilde unterscheiden sich von einander weder in ihrer Gestalt noch merklich in der Grösse. Die fertilen Basidien führen aber stets ein körnigeres Plasma als die Paraphysen und sind dadurch leicht kenntlich.

Die Zahl der Sterigmen war in allen beobachteten Fällen durchweg vier, ihre Gestalt und Entstehungsweise ebenfalls durchaus die der typischen Hymenomyceten, speciell des von DE BARY eingehend untersuchten *Corticium amorphum*. »Einsporige Basidien mit einem einzigen niedrigen Sterigma«, wie sie MATTIROLO gefunden zu haben glaubt, habe ich niemals beobachten können, und ich bin geneigt, diese Anzahl auf eine Verwechselung von Sterigmen mit zapfenförmigen Paraphysenendigungen zurückzuführen.

II.

Dictyonema sericeum MONT.

Ausser der Gattung *Cora* hat MATTIROLO noch eine zweite, zu den Hymenolichenen gehörige Form an's Licht gezogen, welche er mit dem Gattungsnamen *Rhipidonema* belegt hat, und welche bereits von KREMPELHUBER für eine mit *Cora* verwandte Flechte gehalten worden war. Ich hatte leider nicht Gelegenheit, diese seltene, von MATTIROLO nur ganz unvollständig erforschte Pflanze, deren Vaterland Borneo ist, selbst zu untersuchen, bin hingegen in der Lage, über eine vielleicht derselben Gattung zuzutheilende Hymenolichene aus Westindien, das *Dictyonema sericeum* MONT., Einiges nach eigenen Untersuchungen zu berichten. Ich sammelte diese Pflanze auf Dominica, woselbst sie als grosse Rarität an lichten Stellen der Bergwälder zu finden ist.

Der Thallus der Flechte besteht wie der von *Cora* und *Rhipidonema* aus halbkreis- bis nierenförmigen Scheiben, welche, einer

Digitized by Google

Baumrinde einseitig angewachsen oder einen dünnen Zweig rings umfassend, eine schräg nach unten gerichtete Stellung haben. Theilungen der Scheibe kommen vor, und es pflegen dann die Segmente derartig übereinander zu sitzen, dass sie von unten nach oben successive an Grösse abnehmen. Auch eine schwache Andeutung concentrischer Zonen war an älteren Thallusscheiben zu beobachten, wogegen der freie Rand niemals die bei *Cora* so charakteristische Einrollung zeigte, vielmehr stets in eine grosse Anzahl feiner Spitzen und Fransen unregelmässig zertheilt war. Die Farbe der Oberseite ist ein tiefes, mattes Blaugrün, die der Unterseite ein unscheinbares Grau; der gefranste Rand bildet eine mehrere Millimeter breite Zone von elegantester, weisslich-grüner Färbung.

Das Fruchtlager findet sich wie bei *Cora* auf der Unterseite der Thalluscheibe. Bei dem einzigen damit behafteten Exemplar, welches ich nach langem und mühevollem Suchen auf Dominica aufzufinden vermochte, war nur ein kleiner Theil der unteren Fläche damit bestanden, doch hatte ich in Kew Gelegenheit, Exemplare mit viel ausgebildeterem, fast die ganze Unterseite des Thallus bekleidendem Hymenium zu sehen. Die Beschaffenheit des Fruchtlagers ist die einer weichen, schmiegsamen Haut, welche durch Risse und Furchen in ähnlicher Weise wie bei *Cora* und vielen Thelephoreen unregelmässig gefeldert erscheint.

Was die innere Structur des Thallus betrifft, so weist schon das äussere Ansehen auf einen sehr lockeren, spinnewebartigen oder schwammigen Bau hin. Eine schwache Vergrösserung des in toto unter das Mikroskop gebrachten Thallus zeigt zahlreiche Hyphenbündel, welche in unregelmässig geschlängeltem Verlaufe nach der Peripherie streben, sich an vielen Stellen spalten, verschmelzen, Hohlräume umschliessen, rippen- oder leistenartig auf beiden Seiten des Thallus vorspringen und so ein Geflecht von anfangs radiärer, später ziemlich unsymmetrischer Structur erzeugen. In den Hyphenbündeln der oberen Schichten eingebettet oder zwischen denselben frei zu Tage tretend, verlaufen annähernd parallel mit den Hyphen und mit einander die Gonidien oder Gonidienbündel, lebhaft blaugrün gefärbte, starke Scytonema-Fäden, deren jeder von einer geschlossenen Scheide von Pilzhyphen auf das innigste umsponnen ist.

Von den specielleren, anatomischen Befunden sei hier nur die sehr auffallende und im Flechtenreiche einzig dastehende Art der Umspinnung der Gonidien etwas eingehender geschildert. Von allen beschriebenen Flechtengonidien lassen sich nur diejenigen der Gattung *Coenogonium* und *Cystocoleus* mit jenen vergleichen. Diese Flechten bestehen, wie SCHWENDENER und THWAITES gefunden haben, aus langen, verzweigten und zu einem ähnlichen Fächer wie der Thallus von

Digitized by Google

Dictyonema verfilzten Fäden grüner Algen und zwar, wie Bornet nachgewiesen hat, grüner oder röthlicher Chroolepus-Fäden, welche von längs verlaufenden Hyphen scheiden- oder netzartig umsponnen sind. Ich habe Gelegenheit gehabt, zwei Vertreter der Gattung *Coenogonium* in Westindien und Venezuela lebend zu untersuchen, und meiner ausführlicheren Darstellung in Pringsheim's Jahrbüchern mehrere Abbildungen zum Vergleiche mit *Dictyonema* beigefügt. Bei keiner der beiden *Coenogonium*-Arten wird die fortwachsende Spitze des Algenfadens so vollständig in die Umstrickung des Pilzes hineingezogen wie bei *Dictyonema*, wo sie von einer lückenlosen, aus Pilzzellen bestehenden Kapuze überkleidet wird, und niemals werden bei *Coenogonium* die Pilzhyphen durch den Contact mit dem Algenfaden so auffallend modificirt, wie es bei *Dictyonema* der Fall ist.

Die starken Scytonema-Fäden, welche als Gonidien von *Dictyonema sericeum* fungiren, bestehen aus lebhaft blaugrün gefärbten Zellen mit körnigem, in der Mitte etwas heller tingirtem Plasma und aus gelbbraunen Heterocysten, welche zwischen die grünen Glieder gewöhnlich in regelmässigen Abständen eingestreut sind. Eine Gallertscheide ist nicht vorhanden, dieselbe ist vollständig ersetzt durch das Netz der Pilzumspinnung, welches als eine allseitig geschlossene Scheide um den centralen Algenfaden lückenlos zusammenschliesst. Diese Scheide besteht aus acht oder neun längsverlaufenden Hyphen, deren Seitenwände wie die Zellen einer Epidermis wellenförmig in einander greifen, und welche in regelmässigen Abständen durch Scheidewände gefächert sind. Die ursprünglich vorhandene Gallertscheide des Scytonema-Fadens wird von dem Pilz in der Weise angegriffen und verzehrt, dass einzelne Hyphen in's Innere derselben eindringen, unter der Oberfläche in geschlängeltem Längsverlauf weiter wachsen, sich im spitzem Winkel verzweigen und schliesslich an Dicke zunehmen, wobei sie seitlich auf einander treffen und mit undulirten Wänden mit einander verwachsen.

Da die Hyphenumspinnung als fester, lückenloser Überzug die Alge umgiebt, muss das Wachsthum der letzteren mit dem des Pilzes genau gleichen Schritt halten. Diese Harmonie des Wachsthums macht sich besonders bei dem Eintritt einer Verzweigung bemerklich. Wie die frei lebenden Arten der Gattung *Scytonema* zeigen nämlich auch die Gonidien von *Dictyonema* eine »falsche« Astbildung, welche dadurch vollzogen wird, dass sich an den Grenzzellen die beiderseitigen Fadentheile der Alge an einander vorbei schieben, wobei entweder nur das eine Fadenstück einen Ast liefert oder beide Theile sich gleichsam an einander aufrichten und an einander haftend in derselben Richtung weiter wachsen. Die Pilzumspinnung verhält sich

Digitized by Google

nun so, dass dieselbe sich alsbald bei der Erhebung des oder der Zweige des Algenfadens mit hervorwölbt und die Auszweigung mit einer festen Kapuze überkleidet, aus welcher die Hyphenscheide der neuen Äste hervorgeht. Hat sich gleichzeitig ein Astpaar erhoben, so ist dieses im Anfang noch von einer gemeinschaftlichen Kapuze überkleidet; diese spaltet sich erst eine Strecke weit über der Verzweigungsstelle, so dass jeder der beiden Fäden wieder seine besondere Umspinnung erhält und von dem Schwesterfaden isolirt ist.

Der Zusammenhang der Gonidienumstrickungen mit dem eigentlichen Mycel der Flechte findet an nur wenigen, unbestimmten Stellen statt. Bei der überwiegenden Mehrzahl der in der Natur sich findenden Individuen ist er bedingt durch die Entwicklung des Thallus aus »Soredien«, d. h. aus Gonidien, welche mit ihrer Umstrickung von Pilzhyphen aus einem anderen Thallus frei werden und durch Auswachsen einiger Zellen jener Umstrickung ein neues Mycel erzeugen.

Die Structur der Fructifications-Organe, soweit sie sich an dem einzigen fertilen Exemplar ermitteln liess, schliesst sich eng an den geschilderten Bau der gleichen Organe bei *Cora* an. Aus den gonidienlosen Hyphenbündeln der Unterseite erheben sich an zahlreichen Stellen Äste, welche sich immer reichlicher verzweigen und mit ihren letzten Endigungen zu einer geschlossenen Basidienschicht zusammentreten. Basidien mit Sporen oder Sterigmen liess das spärliche Material leider nicht erkennen. Doch dürfte aus dem ganzen, mit *Cora* durchaus analogen Bau der hymenialen Schicht und aus der grossen Übereinstimmung von *Dictyonema* mit der gleich zu besprechenden Flechte auf ein typisches Verhalten in der Sporenbildung mit grösster Wahrscheinlichkeit geschlossen werden können.

III.

Laudatea caespitosa JOHOW.

Während die Gattungen *Cora*, *Rhipidonema* und *Dictyonema* nach ihrem habituellen Wuchs als Laubflechten beziehungsweise als Hymenomyceten mit einseitig angewachsenem Fruchtkörper bezeichnet werden können, zeigt die im Folgenden zu beschreibende Flechte, von welcher sterile Thalli bereits mehrfach aufgefunden und als Varietäten oder Species von *Dictyonema* beschrieben worden sind, einen sehr eigenartigen Thallus und eine sehr bemerkenswerthe Anordnung der Fructifications-Organe (Hymenien).

Ich fand diese Pflanze im April v. J. an demselben Ort, an welchem das Material von *Cora pavonia* gesammelt wurde: auf der

Digitized by Google

oben geschilderten Lichtung Laudat im Innern der Insel Dominica, in 2000 F. Höhe über dem Meeresspiegel. Zu Ehren dieser auch in anderer Hinsicht botanisch interessanten Örtlichkeit, sowie mit Rücksicht auf den rasenartigen Wuchs der Pflanze sei es gestattet, die neue Species *Laudatea caespitosa* zu nennen.

Als Substrat wählt die Flechte entweder umgefallene und vermodernde Baumstämme oder auch aufrechte Bäume, Borken, lebende Blätter u. s. w., mit Vorliebe solche Gegenstände, welche mit einem humusartigen Detritus und alten faserigen Epiphytentheilen bekleidet sind.

Will man den Habitus von *Laudatea* kurz bezeichnen, so kann man sie vielleicht eine »Rasenflechte« nennen. Der Thallus besteht nämlich aus einem Rasen kleiner moos- oder algenähnlicher Stämmchen von blaugrüner Farbe, welche je nach der Gunst der Standortsverhältnisse stärker oder schmächtiger entwickelt sind. Die Spitzen der Stämmchen sind ähnlich wie die Randpartie des Thallus von *Dictyonema* durch eine schön hellgrüne Farbe ausgezeichnet, die Peripherie des Thallus ist von einer weisslichen Zone umrandet. An glatten Substraten breitet sich der Thallus in Gestalt rundlicher Kuchen aus, während er unebene, bucklige Rinden oder Epiphytenwurzeln mit einer continuirlichen Kruste überzieht. Die Consistenz aller Thallustheile ist in frischem Zustande sehr weich und schmiegsam.

Die Fructificationsorgane findet man nach Eintritt der nassen Jahreszeit als häutige Überzüge von weisser Farbe, in einer sehr charakteristischen Anordnung auf dem blaugrünen Rasen vertheilt. Es scheint nämlich eine ausnahmslose Regel zu sein, dass nur die dem Lichte abgekehrten, in tieferem Schatten befindlichen Theile des Thallus zu fructificiren vermögen. Demgemäss entwickeln sich auf solchen Rasen, die über eine höckerige Rinde ausgebreitet sind, die Hymenien immer auf den Schattenseiten der Höcker, bei solchen, welche Epiphytenwurzeln und dergleichen bekleiden, auf den Schattenseiten dieser Körper, bei solchen, welche umgefallene Baumstämme bewohnen, auf der Unterseite dieser Stämme u. s. w. Vegetirt der Rasen auf einem zum Theil vom Stamm abgelösten Borkenstück, so finden sich auf der beleuchteten Vorderseite dieses Körpers nur grüne, gonidienhaltige Thallustheile, während auf der beschatteten Hinterseite ein gonidienloses, aber hymeniumtragendes Mycel sich ausbreitet.

Die Beschaffenheit des frischen Hymeniums ist die einer sehr weichen, wachsartigen Haut, welche ähnlich wie bei vielen Thelephoreen durch zahlreiche Furchen unregelmässig gefeldert oder mit knorpeligen Buckeln versehen erscheint.

Zur Betrachtung der Structurverhältnisse des Thallus wählt man am besten einen Querschnitt durch einen Rasen, welcher auf einem

Digitized by Google

möglichst ebenen Substrat, etwa einem lebenden Lianenblatt, sich ausgebreitet hat. Man gewahrt mit Leichtigkeit zwei aufeinandersitzende Schichten, deren eine (dem Substrat zugekehrte) aus einem freien Pilzmycel besteht, und deren andere (dem Substrat abgekehrte) aus senkrecht dazu gestellten Gonidienbündeln mit ihren Scheiden aus Pilzhyphen sich zusammensetzt. Die erstere Schicht erscheint uns gleichsam als ein Wurzelsystem, die letztere als ein Rasen kleiner Sprosse, welche mit jenem wie die Stämmchen eines Grasrasens mit ihrem unterirdischen Wurzelgeflecht zusammenhängen.

Die Grenze zwischen den beiden Regionen des Thallus ist nichts weniger als scharf bezeichnet. Die Gonidienbündel sind an einem oder mehreren Punkten ihrer basalen Theile mit dem Mycel verbunden und verhalten sich hierin wie überhaupt in allen wesentlichen Verhältnissen der Structur den entsprechenden Organen der vorhergehenden Gattung analog. Einen durchgreifenden Unterschied von den letzteren zeigen sie nur in ihrer Stellung zu den Myceltheilen, indem sie nicht wie bei *Dictyonema* einer aus Hyphen aufgebauten Thallusscheibe eingebettet sind, sondern die morphologische Gliederung der Flechte selbst bedingen.

Die aus den Gonidienbündeln aufgebauten Stämmchen verlängern sich durch apicales und intercalares Wachsthum, vermehren sich durch falsche Astbildung in ganz derselben Weise wie bei *Dictyonema* und sterben in den unteren Partien allmählich ab, so zwar, dass eine Strecke weit noch Gruppen von abgestorbenen Scytonemazellen durch einzelne lebende Glieder unterbrochen sind. Die scheidenartige Umstrickung von Pilzhyphen bleibt lebendig, auch wenn die eingeschlossenen Zellen der Alge bereits abgestorben sind, und es wird auf diese Weise eine lebende Continuität zwischen den wachsenden Theilen der Stämmchen und der eigentlichen Mycelregion des Thallus erhalten.

Sehr abweichend von *Dictyonema* ist der Bau des Mycelkörpers bei unserer Flechte. Derselbe besteht aus einem sehr lockeren Geflecht reichlich verzweigter und unregelmässig durch einander laufender Hyphen von beträchtlicher Dicke. Offene Fusionen zwischen den Hyphenästen sind häufige Erscheinungen. Gewöhnlich findet man in den Zwischenräumen der Hyphen reichliche Einlagerungen von Humus und allerhand Detritus, und da die Pflanze unter diesen Bedingungen besonders üppig gedeiht, ist es wahrscheinlich, dass der Pilz, welcher in der Gonidienregion des Thallus als Parasit erscheint, in der Mycelregion eine saprophytische Lebensweise führt.

Durch die peripherische Ausbreitung des Mycels auf dem Substrat und die damit Hand in Hand gehende seitliche Vermehrung der Gonidien ist auch ein marginales Wachsthum des Thallus gegeben, welches

Digitized by Google

zu der Höhenzunahme durch Verlängerung der Gonidienbündel in einem ähnlichen Verhältniss steht wie das peripherische Wachsthum der Thallusscheiben von *Dictyonema* zu der Dickenzunahme derselben in späterem Alter.

Der anatomische Bau des krustenförmigen Fruchtlagers weicht von den entsprechenden Organen der anderen Gattungen nicht unerheblich ab. Querschnitte durch fructifirende Rasentheile zeigen über der blaugrünen Schicht der Gonidienbündel eine mächtige, subhymeniale Zone von lockerem, aber regelmässigem Gefüge. Dieselbe ist zusammengesetzt aus wiederholt kandelaberartig verzweigten Hyphen, deren Äste mannigfach in einander greifen und häufige Fusionen bilden. Mit dem vegetativen Thallus hängt dieses System von Hyphenästen durch Vermittelung der scheidenartigen Umstrickungen der Gonidien zusammen, indem nämlich die untersten Äste der subhymenialen Schicht direct aus den Zellen der Gonidienumstrickungen entspringen. Die Entwicklungsgeschichte lehrt, dass beim Beginn der Fructification einzelne Zellen der Gonidienumstrickungen schlauchförmig auswachsen und sodann sich reichlich sympodial verzweigen. Nach oben zu wird das Geflecht der Hyphenäste dichter, die Verzweigung spitzer, und die letzten Endigungen setzen eine geschlossene Palissadenschicht zusammen, welche das Hymenium darstellt.

Innerhalb der subhymenialen Schicht bemerkt man zuweilen wiederum eine Aufeinanderfolge von Einzelschichten, deren Grenzen durch dünne Lagen von allerhand undefinirbarem Detritus bezeichnet wird. Es rührt diese Erscheinung daher, dass während der mehrfach eintretenden Wachsthumsunterbrechungen des Fruchtkörpers (in trockenen Perioden) sich fremde Körper, wie kleine Algen, Sporen und dergleichen, auf der freien Oberfläche ansammeln, die später bei erneutem Spitzenwachsthum der Hyphen in das Innere des Fruchtkörpers eingeschlossen werden.

Von den Elementen der Basidienschicht ist wie bei *Cora* ein geringer Theil fertil, während die überwiegende Mehrzahl unfruchtbare Paraphysen darstellt. Anzahl, Gestalt und Entwicklung der Sterigmen und Sporen sind durchaus typisch und bedürfen keiner weiteren Beschreibung.

Überblicken wir nun kurz die geschilderten Betrachtungen, so ergeben sich für unsere Auffassung der Organisation der behandelten Pflanzen folgende Resultate:

1. Die Gattungen *Cora*, *Rhipidonema*, *Dictyonema* und *Laudatea* sind Flechten, denn sie stellen Consortien von Pilzen

Digitized by Google

und Algen dar. Die drei ersteren Gattungen kann man nach ihrem habituellen Wuchs und der Schichtenstructur ihres Thallus als heteromere Laubflechten bezeichnen. Von allen anderen Laubflechten unterscheiden sie sich indessen durch den gänzlichen Mangel einer festen Rinde und die ungewöhnlich innige Umspinnung der als Gonidien fungirenden Algen. Die Gattung *Laudatea* ist ausgezeichnet durch den eigenartigen, rasenähnlichen Wuchs und die damit zusammenhängende Gliederung des Thallus in ein saprophytisches Mycel und grüne, aus Gonidienbündeln mit umstrickenden Pilzhyphen bestehende Stämmchen.

2. Die in Rede stehenden Gewächse sind Hymenomyceten und zwar Thelephoreen aus der Verwandtschaft von *Thelephorea*, *Corticium*, *Hypochnus* u. s. w., denn die einzigen Fructificationsorgane, welche sie besitzen, sind sporenabschnürende Basidien, welche in rissigen oder gefelderten Hymenien auf der Unterseite einseitig angewachsener Hüte (so bei *Cora*, *Rhipidonema* und *Dictyonema*) oder auf krustenförmigen Fruchtkörpern (so bei *Laudatea*) gebildet werden. Die ältere Angabe NYLANDER's von dem Vorkommen von Apothecien auf dem Thallus von *Cora* konnte trotz Untersuchung sehr zahlreicher Exemplare in keiner Weise bestätigt werden.

Was die Homologie der einzelnen Theile des Thallus zwischen den vier Flechten und den typischen Hymenomyceten anlangt, so macht ihre Durchführung bei der Gattung *Laudatea* keine Schwierigkeiten; denn sowohl das saprophytische Mycel als der krustenförmige Fruchtkörper dieser Flechte findet bei zahlreichen Arten von *Telephora* und *Corticium* seines Gleichen. Anders bei den drei übrigen Gattungen, wo wir vergeblich nach einem dem Mycel der Hutpilze entsprechenden Gebilde suchen, es müsste denn sein, dass wir den Haftkörper von *Cora* oder die spärlichen »Rhizinen« von *Dictyonema* als ein Homologon jenes Organes ansprechen wollten. Dass der grüne Laubthallus von *Cora* dem Fruchtkörper einer *Thelephora* homolog ist, kann nach seiner ganzen Gestalt, Structur und Wachsthumsweise keinem Zweifel unterliegen, und wenn wir mit J. SACHS die Anschauung gelten lassen, dass der Fruchtkörper der Hutpilze einen reducirten Spross, das Mycel aber ein Wurzelsystem darstelle, und dass die verhältnissmässig reiche, morphologische Gliederung der Flechten durch die assimilirende Thätigkeit ihrer »Sprosse« bedingt sei, so wird uns auch die reichere Gliederung des Thallus von *Cora* ebenso wie der Mangel eines saprophytischen Mycels als eines durch den Eintritt der Symbiose überflüssig gewordenen Organes nicht mehr befremdend erscheinen.

Nach alledem müssen die fraglichen Organismen als eine besondere Gruppe von Lichenen aufgefasst werden, die der Gesammtheit

Digitized by Google

der bisher bekannten Flechten als systematisch ebenbürtig zu coordiniren ist. Wir acceptiren für die neue Gruppe den von MATTIROLO vorgeschlagenen Namen der »*Hymenolychenes*« und unterscheiden in derselben vier Gattungen: *Cora* FR., *Rhipidonema* MATT., *Dictyonema* AG. und *Laudatea nobis*.

Eine speciellere systematische Behandlung der vier Gattungen muss nebst den bildlichen Demonstrationen der ausführlicheren Darstellung überlassen bleiben.

Digitized by Google

6. Über die Formänderung, die ein fester elastischer Körper erfährt, wenn er magnetisch oder diëlektrisch polarisirt wird.

Von G. Kirchhoff.

(Vorgetragen am 28. Februar; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XII]; — ausgegeben am 6. März.)

Am 17. Februar 1881 hat Hr. von Helmholtz der Akademie eine Mittheilung über die Kräfte gemacht, welche auf die Theile von magnetisch oder diëlektrisch polarisirten Körpern wirken, und Ausdrücke für diese Kräfte mit Hülfe des Princips von der Erhaltung der Energie aus der Annahme abgeleitet, dass Poisson's Theorie des inducirten Magnetismus für starre Körper im Luftraume richtig ist und sich übertragen lässt auf diëlektrisch polarisirbare Nichtleiter. Die Resultate, zu denen er gelangt, stimmen im Übrigen mit den schon früher von Sir W. Thomson und Cl. Maxwell entwickelten überein; nur enthalten sie neben der Inductionsconstanten noch eine zweite von der Natur des Mittels abhängige Grösse, die bestimmt ist durch die Änderung, die jene bei einer Änderung der Dichtigkeit erfährt. Es hat Hr. von Helmholtz bei seinen Betrachtungen vorzugsweise Flüssigkeiten im Auge gehabt. Bei festen Körpern ist zu vermuthen, dass jene Kräfte mitbedingt sein werden durch eine dritte Constante, die eingeführt werden muss, wenn man die Änderung ausdrücken will, die die Induction durch Dilatationen erfährt, welche in verschiedenen Richtungen verschieden sind. Es soll im Folgenden diese Vermuthung geprüft und dann die allgemeine Theorie auf einen einfachen Fall angewandt werden.[1]

1.

Es möge mit einer Betrachtung begonnen werden, die ähnlich einer ist, durch welche die allgemeinen Gleichungen der Poisson'schen Theorie des inducirten Magnetismus begründet zu werden pflegen, und die zeigen soll, wie der magnetische Zustand zu bestimmen ist, den unter dem Einfluss gegebener magnetisirender Kräfte eine Eisenmasse annimmt, deren Theilchen beliebig gegebene, unendlich kleine Ver-

[1] Bei der Correctur dieser Mittheilung erhalte ich das Februarheft von Wiedemann's Annalen, in dem sich eine Arbeit von Hrn. Lorberg »über Elektrostriction« befindet; Bd. 21 S. 300. Es bezieht sich diese auf denselben Gegenstand, der hier abgehandelt ist, und führt durch Betrachtungen von anderer Form zu gleichen Resultaten.

Digitized by Google

schiebungen aus Lagen erfahren haben, bei denen die Masse in ihrem natürlichen Zustande sich befand.

Man denke sich eine Kugel aus Eisen, welches in drei aufeinander senkrechten Richtungen die überall gleichen, als unendlich klein zu betrachtenden Dilatationen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ erlitten hat. Wirkt auf diese Kugel eine constante magnetische Kraft, deren Intensität J_1 ist, in der Richtung von λ_1, so wird die magnetische Axe derselben auch die Richtung von λ_1 haben und, ist μ_1 ihr magnetisches Moment, bezogen auf die Volumeneinheit, so wird man

$$\mu_1 = \left(p - p'(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - p''\lambda_1\right) J_1$$

setzen dürfen, wo p, p', p'' Constanten sind, d. h. nur von der Natur des Eisens und, wie hier noch als möglich angenommen werden muss, von der Grösse der Kugel abhängen können. Wirken gleichzeitig auf die Kugel in den Richtungen von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ constante magnetische Kräfte, deren Intensitäten J_1, J_2, J_3 sind und bedeuten nun μ_1, μ_2, μ_3 die auf die Volumeneinheit bezogenen magnetischen Momente der Kugel für dieselben Richtungen, so gilt auch jetzt noch diese Gleichung und es ist

$$\mu_2 = \left(p - p'(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - p''\lambda_2\right) J_2$$

und

$$\mu_3 = \left(p - p'(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - p''\lambda_3\right) J_3.$$

Nun sei die gedachte Kugel ein unendlich kleiner Theil einer endlichen Eisenmasse, deren Punkte beliebige relative Verschiebungen erlitten haben und die durch gegebene äussere Kräfte magnetisirt ist, welche von einem permanenten Magnet herrühren mögen. Sie befindet sich dann unter den eben vorausgesetzten Verhältnissen. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind ihre Hauptdilatationen; es seien s_1, s_2, s_3 die Coordinaten eines Punktes in ihr in den Richtungen der Hauptdilatationen, V das Potential der äusseren magnetischen Kräfte, Q das Potential der ganzen magnetisch gewordenen Eisenmasse in Bezug auf diesen Punkt und

$$\phi = V + Q.$$

Es ist dann

$$J_1 = \frac{4\pi}{3}\mu_1 - \frac{\partial\phi}{\partial s_1}, \quad J_2 = \frac{4\pi}{3}\mu_2 - \frac{\partial\phi}{\partial s_2}, \quad J_3 = \frac{4\pi}{3}\mu_3 - \frac{\partial\phi}{\partial s_3}.$$

Substituirt man diese Werthe in die Ausdrücke von μ_1, μ_2, μ_3, so erhält man Gleichungen, aus denen zunächst zu schliessen ist, dass p, p', p'' von dem Radius der Kugel unabhängig sind, da alle andern, in ihr vorkommenden Grössen von diesem Radius nicht abhängen. Setzt man

$$\frac{p}{1 - \frac{4\pi}{3}p} = k, \quad \frac{p'}{\left(1 - \frac{4\pi}{3}p\right)^2} = k', \quad \frac{p''}{\left(1 - \frac{4\pi}{3}p\right)^2} = k'',$$

Digitized by Google

und vernachlässigt Grössen von der Ordnung der Quadrate von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, so erhält man aus ihnen weiter

$$\mu_1 = -\left(k - k'(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - k''\lambda_1\right)\frac{\partial\phi}{\partial s_1}$$
$$\mu_2 = -\left(k - k'(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - k''\lambda_2\right)\frac{\partial\phi}{\partial s_2}$$
$$\mu_3 = -\left(k - k'(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - k''\lambda_3\right)\frac{\partial\phi}{\partial s_3}.$$

Man bezeichne nun die Coordinaten des Punktes (s_1, s_2, s_3) in Bezug auf ein beliebiges, rechtwinkliges Coordinatensystem durch x, y, z, die Cosinus der Winkel, welche die Axen der s_1, s_2, s_3 mit den Axen der x, y, z bilden, durch

$$\begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, \end{matrix}$$

und die auf die Volumeneinheit bezogenen magnetischen Momente für die Axen der x, y, z durch α, β, γ; man hat dann

$$\frac{\partial\phi}{\partial s_1} = a_1\frac{\partial\phi}{\partial x} + b_1\frac{\partial\phi}{\partial y} + c_1\frac{\partial\phi}{\partial z}$$
$$\mu_1 = a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma$$

und die Gleichungen, die aus diesen entstehen, wenn statt des Index 1 der Index 2 oder 3 gesetzt wird. Es seien ferner u, v, w die unendlich kleinen Verrückungen, die der materielle Punkt, welcher am Orte (x, y, z) sich befindet, erlitten hat, während die Dilatationen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ erzeugt wurden; dann gelten die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_1^2\lambda_1 + a_2^2\lambda_2 + a_3^2\lambda_3$$
$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = b_1c_1\lambda_1 + b_2c_2\lambda_2 + b_3c_3\lambda_3$$

und diejenigen, die aus ihnen entstehen, wenn x, y, z und u, v, w und a, b, c cyklisch vertauscht werden. Multiplicirt man die Gleichungen für μ_1, μ_2, μ_3 mit a_1, a_2, a_3 oder mit b_1, b_2, b_3 oder mit c_1, c_2, c_3 und addirt sie jedesmal, so erhält man in Folge hiervon

$$\alpha = -a_{11}\frac{\partial\phi}{\partial x} - a_{12}\frac{\partial\phi}{\partial y} - a_{13}\frac{\partial\phi}{\partial z}$$
$$\beta = -a_{21}\frac{\partial\phi}{\partial x} - a_{22}\frac{\partial\phi}{\partial y} - a_{23}\frac{\partial\phi}{\partial z}$$
$$\gamma = -a_{31}\frac{\partial\phi}{\partial x} - a_{32}\frac{\partial\phi}{\partial y} - a_{33}\frac{\partial\phi}{\partial z},$$

Digitized by Google

wo

$$a_{11} = k - k'\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - k''\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$a_{22} = k - k'\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - k''\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$a_{33} = k - k'\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - k''\frac{\partial w}{\partial z}$$
$$a_{23} = a_{32} = -\frac{k''}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$
$$a_{31} = a_{13} = -\frac{k''}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$
$$a_{12} = a_{21} = -\frac{k''}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen sind nun die Bedingungen abzuleiten, denen gemäss das Gesammtpotential ϕ zu bestimmen ist. Man hat

$$Q = \int d\tau\left(\alpha\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + \beta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right),$$

wo $d\tau$ ein Element des vom Eisen eingenommenen Raumes bezeichnet, dessen Coordinaten x, y, z sind, und r die Entfernung dieses von dem Punkte, auf den Q sich bezieht. Durch partielle Integration kann man den Ausdruck von Q in die Summe zweier Potentiale verwandeln, von denen das eine herrührt von Massen, die den Raum des Eisens erfüllen, das andere von Massen, die seine Oberfläche bedecken. Des letzteren wegen erleiden die ersten Differentialquotienten von Q, also auch die von ϕ, an der Oberfläche des Eisens Sprünge. Um die Darstellung zu vereinfachen, soll ein Kunstgriff benutzt werden, dessen sich auch Hr. von Helmholtz bedient hat. Es soll die Vorstellung zu Grunde gelegt werden, dass das Eisen allmälig in die Luft übergeht, die Grössen $a_{11}, a_{12}, \ldots$ also stetig von den Werthen, die im Innern des Eisens ihnen zukommen, bis Null abnehmen, welchen Werth sie in der Luft haben. Erst später soll dann die Annahme eingeführt werden, dass dieser Übergang sich in einer unendlich dünnen Schicht vollzieht. Von der Oberfläche des Eisens kann dann hier im eigentlichen Sinne nicht gesprochen werden; mit diesem Namen soll aber eine Fläche belegt werden, die das Eisen einschliesst, für die schon überall jene Coëfficienten $a_{11}, a_{12}, \ldots = 0$ sind, und die, wenn der Übergang als ein plötzlicher angenommen werden wird, in die wirkliche Oberfläche des Eisens fallen soll. Für die »Oberfläche« des Eisens ist dann $\alpha = \beta = \gamma = 0$ und es wird daher

Digitized by Google

$$Q = -\int \frac{d\tau}{r}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right).$$

Macht man in Betreff der Begrenzung des Magnets, dessen Potential V genannt worden ist, die entsprechende Annahme, so ist Q und V, also auch ϕ mit seinen ersten Differentialquotienten im ganzen Raume stetig und, erstrecken sich weder Eisen noch Magnet in die Unendlichkeit, so ist überdies in der Unendlichkeit $\phi = 0$. Es ist ϕ aus diesen Bedingungen und einer partiellen Differentialgleichung, der im ganzen Raume genügt werden muss, zu bestimmen. Diese findet man, wenn man erwägt, dass aus dem letzten für Q angegebenen Ausdruck folgt

$$\Delta Q = 4\pi\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)$$

und dass andererseits

$$\Delta Q = \Delta\phi - \Delta V$$

ist. Substituirt man in die hieraus sich ergebende Gleichung für α, β, γ die gefundenen Werthe, so erhält man

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\phi}{4\pi} &+ \frac{\partial}{\partial x}\left(a_{11}\frac{\partial\phi}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial\phi}{\partial y}+a_{13}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\\ &+ \frac{\partial}{\partial y}\left(a_{21}\frac{\partial\phi}{\partial x}+a_{22}\frac{\partial\phi}{\partial y}+a_{23}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\\ &+ \frac{\partial}{\partial z}\left(a_{31}\frac{\partial\phi}{\partial x}+a_{32}\frac{\partial\phi}{\partial y}+a_{33}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = \frac{\Delta V}{4\pi}.\end{aligned}$$

Für jeden der 3 Theile, in welche der ganze Raum zerlegt werden kann, nämlich für das Eisen, den Magnet und den Luftraum, nimmt diese Gleichung eine einfachere Gestalt in Folge davon an, dass nur im Eisen die Grössen $a_{11}, a_{12} \ldots$ von Null verschieden sind und nur im Magnet ΔV nicht $=$ Null ist. Für das Eisen ist daher die rechte Seite der Gleichung $=$ Null, für den Magnet ist die Gleichung

$$\Delta\phi = \Delta V$$

und für den Luftraum

$$\Delta\phi = 0.$$

Die allgemeine für ϕ gefundene Differentialgleichung lässt sich ersetzen durch eine Gleichung, die ausspricht, dass die Variation eines gewissen Integrals verschwindet. Man verstehe unter $\delta\phi$ einen unendlich kleinen Zuwachs der Function ϕ, der, wie diese, mit seinen Differentialquotienten überall stetig ist und in der Unendlichkeit verschwindet; man multiplicire die Differentialgleichung für ϕ mit $\delta\phi$ und mit dem Raumelement $d\tau$ und integrire über einen Raum, der

Digitized by Google

durch eine Fläche begrenzt ist, die ganz in der Unendlichkeit liegt. Die Gleichung, die man dann erhält, lässt sich durch partielle Integrationen in die Form bringen

$$o = \delta W - \frac{1}{4\pi}\int ds \frac{\partial \phi}{\partial n}\delta\phi,$$

wo

$$W = -\int d\tau \left\{ \frac{1}{4\pi}\phi\Delta V + \frac{1}{8\pi}\left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right) + G \right\}$$

$$2G = a_{11}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + a_{22}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + a_{33}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 + 2a_{23}\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial z} + 2a_{31}\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial x} + 2a_{12}\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y},$$

δW den Zuwachs bedeutet, den W dadurch erfährt, dass ϕ und $\delta\phi$ wächst, ds ein Element der unendlich grossen Grenzfläche und n die nach Innen gekehrte Normale von ds ist.[1] Daraus, dass ϕ mit seinen ersten Differentialquotienten überall stetig ist, in der Unendlichkeit verschwindet und $\Delta\phi$ nur in einem Raume, der sich nicht in die Unendlichkeit erstreckt, von Null verschieden ist, folgt aber

$$\phi = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{d\tau}{r}\Delta\phi$$

und dann weiter, dass, wenn die Abstände der Elemente der gewählten Grenzfläche von einem im Endlichen liegenden Punkte von der Ordnung der unendlich grossen Länge R sind, in ihr die Werthe von ϕ mindestens von der Ordnung von $\frac{1}{R}$ und die Werthe von $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ mindestens von der Ordnung von $\frac{1}{R^2}$ unendlich klein sind. Hieraus ergiebt sich endlich, dass das zu δW hinzugefügte Integral verschwindet, wenn, wie es sein soll, $\delta\phi$ in der Unendlichkeit verschwindet, dass also

$$o = \delta W$$

ist.

Der für W aufgestellte Ausdruck soll noch einer Transformation unterworfen werden. Indem man erwägt, dass ϕ und seine ersten Differentialquotienten überall stetig und in der Unendlichkeit von den

---

[1] Beiläufig möge bemerkt werden, dass

$$2G = -\alpha\frac{\partial\phi}{\partial x} - \beta\frac{\partial\phi}{\partial y} - \gamma\frac{\partial\phi}{\partial z},$$

also auch bei der eben gebrauchten Bezeichnung

$$= -\mu_1\frac{\partial\phi}{\partial s_1} - \mu_2\frac{\partial\phi}{\partial s_2} - \mu_3\frac{\partial\phi}{\partial s_3}$$

ist.

Digitized by Google

eben angegebenen Grössenordnungen unendlich klein sind, findet man durch partielle Integrationen

$$\int d\tau \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 \right) = -\int d\tau \, \phi \Delta \phi ,$$

wo die Integrale über einen Raum auszudehnen sind, dessen Grenze ganz in der Unendlichkeit liegt. Durch Substitution hiervon ergiebt sich, wenn man noch durch $d\tau_e$, $d\tau_m$, $d\tau_l$ Elemente des Eisens, des Magnets und des Luftraums bezeichnet,

$$\begin{aligned} W = &- \int d\tau_e \left(G - \frac{1}{8\pi} \phi \Delta \phi \right) \\ &- \int d\tau_m \left(\frac{1}{4\pi} \phi \Delta V - \frac{1}{8\pi} \phi \Delta \phi \right) \\ &+ \int d\tau_l \frac{1}{8\pi} \phi \Delta \phi . \end{aligned}$$

2.

Es soll nun durch Betrachtungen, die im Wesentlichen denen ganz gleich sind, durch die Hr. v. HELMHOLTZ zu seinen Resultaten geführt ist, gezeigt werden, in welcher Beziehung die Grösse W zur Energie des aus dem Eisen und dem Magnet gebildeten Systeme steht, und wie aus ihrem Ausdrucke auf die Kräfte geschlossen werden kann, die auf die Elemente des Eisens in Folge seiner Magnetisirung wirken. Zu diesem Zwecke soll zunächst der Zuwachs δW berechnet werden, den W erhält, wenn der Magnet eine unendlich kleine Änderung seiner Lage erfährt, alle Punkte des Eisens aber unverrückt bleiben. Um den Werth zu berechnen, den W nach der Verrückung des Magnets besitzt, ist es nicht nöthig, den wahren Werth zu benutzen, den dann ϕ in jedem Punkte des Raumes hat; es ist gestattet, einen anzuwenden, der von diesem um etwas unendlich Kleines abweicht, wenn er nur, wie dieser, mit seinen ersten Differentialquotienten überall stetig ist und in der Unendlichkeit verschwindet, da, wie im vorigen Paragraph bewiesen, unter dieser Bedingung alle Annahmen über ϕ zu demselben Werthe von W führen. Es darf daher angenommen werden, dass nach der Verschiebung des Magnets in jedem materiellen Punkte des Eisens, des Magnets und der Luft $\Delta\phi$ den ursprünglichen Werth behalten hat, wodurch dann das neue ϕ überall vollständig bestimmt ist. Die Vergrösserung, die sich dabei für das auf irgend einen materiellen Punkt bezogene ϕ ergiebt, sei $\delta\phi$; die entsprechende Vergrösserung von G

Digitized by Google

sei δG. Variirt man den für $2G$ aufgestellten Ausdruck und führt dann die Grössen α, β, γ ein, so findet man

$$\delta G = -\alpha \frac{\partial \delta\phi}{\partial x} - \beta \frac{\partial \delta\phi}{\partial y} - \gamma \frac{\partial \delta\phi}{\partial z}$$

und daher, weil in der Oberfläche des Eisens α, β und $\gamma = 0$ sind,

$$\int d\tau_e \delta G = \int d\tau_e \delta\phi \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right),$$

oder wegen der Differentialgleichung, der ϕ im Eisen genügt,

$$= \int d\tau_e \frac{1}{4\pi} \delta\phi \, \Delta\phi.$$

Erwägt man noch, dass für alle Punkte des Magnets $\Delta\phi = \Delta V$ und für alle Punkte des Luftraums $\Delta\phi = 0$ ist, so ergiebt sich

$$-\delta W = \frac{1}{8\pi} \int d\tau_e \delta\phi \, \Delta\phi + \frac{1}{8\pi} \int d\tau_m \delta\phi \, \Delta\phi.$$

Diese beiden Integrale sind einander gleich; es ist nämlich allgemein

$$\phi = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{d\tau}{r} \Delta\phi,$$

wo die Integration über das Eisen und den Magnet auszudehnen ist, also in dem ersten jener beiden Integrale

$$\delta\phi = -\frac{1}{4\pi} \int d\tau_m \delta \frac{1}{r} \Delta\phi$$

und in dem zweiten

$$\delta\phi = -\frac{1}{4\pi} \int d\tau_e \delta \frac{1}{r} \Delta\phi,$$

also ein jedes von ihnen

$$= -\tfrac{1}{2} \iint d\tau_m d\tau_e \delta \frac{1}{r} \frac{\Delta\phi_m}{4\pi} \frac{\Delta\phi_e}{4\pi},$$

wo $\Delta\phi_e$ sich auf den Ort von $d\tau_e$, $\Delta\phi_m$ auf den Ort von $d\tau_m$ bezieht und r der Abstand dieser beiden Elemente ist. Es ist also

$$\delta W = +\iint d\tau_m d\tau_e \delta \frac{1}{r} \frac{\Delta\phi_m}{4\pi} \frac{\Delta\phi_e}{4\pi}.$$

Dieser Ausdruck stellt aber die Arbeit dar, die fremde Kräfte der magnetischen Anziehung entgegen leisten müssen, um die gedachte Verschiebung des Magnets hervorzubringen; es ist also δW die dieser Verschiebung entsprechende Vergrösserung der Energie des aus dem Eisen und dem Magnet bestehenden Systemes, und W selbst diese

Digitized by Google

Energie (abgesehen von einer additiven Constanten) für Zustände, die von einander durch die Lage des Magnets sich unterscheiden. In dem Falle, dass der Magnet in unendlich grosse Entfernung von dem Eisen gerückt ist, ist W nur von dem Magnet, nicht von dem Eisen abhängig.

Nun sollen Zustände ins Auge gefasst werden, die dadurch entstehen, dass die Theile des Eisens beliebige unendlich kleine Verrückungen erleiden. Bei einem solchen Zustande seien ξ, η, ζ die Verrückungen, die derjenige materielle Punkt, der ursprünglich die Coordinaten x, y, z besitzt, erfahren hat. Auf zwei Weisen denke man sich diesen Zustand aus dem ursprünglichen durch fremde Kräfte, die man auf die Elemente des Eisens wirken lässt, hervorgerufen: das eine Mal soll es geschehen, während der Magnet an seinem Orte sich befindet; das andere Mal soll der Magnet durch fremde Kräfte vorher in die Unendlichkeit geführt sein und nachher an seinen Ort zurückgebracht werden. Nach dem Princip von der Erhaltung der Energie muss die Arbeit der fremden Kräfte in beiden Fällen die nämliche sein. Die Arbeit, welche zum Transport des Magnets in die Unendlichkeit und zurück aufgewendet werden musste, ist die Vergrösserung δW, welche W in Folge der Verschiebungen ξ, η, ζ erfährt; um so viel kleiner muss die Arbeit der auf die Theile des Eisens wirkenden fremden Kräfte in dem zweiten Falle, als in dem ersten sein. Bezeichnet man diese Kräfte, bezogen auf die Volumeneinheit, in dem Falle, dass der Magnet an seinem Orte ist, durch X, Y, Z und in dem Falle, dass der Magnet entfernt ist, durch X_0, Y_0, Z_0, so hat man also die Gleichung

$$\delta W = \int d\tau_e \big((X - X_0)\,\xi + (Y - Y_0)\,\eta + (Z - Z_0)\,\zeta \big);$$

bringt man δW auf die Form

$$\delta W = -\int d\tau_e\,(A\xi + B\eta + C\zeta),$$

so sind daher $Ad\tau_e$, $Bd\tau_e$, $Cd\tau_e$ die inneren Kräfte, welche auf das Element $d\tau_e$ mehr wirken, wenn der Magnet anwesend ist, als wenn er fehlt, es sind die magnetischen Kräfte, welche auf das Eisenelement ausgeübt werden.

Um hiernach A, B, C zu berechnen, muss man den Werth ermitteln, den W nach Eintritt der Verschiebungen ξ, η, ζ besitzt; dabei darf man wegen der Eigenschaft von W, die im §. 1 bewiesen ist, statt des wahren Werthes von ϕ wiederum einen nehmen, der von diesem um unendlich Kleines verschieden ist. Es kann und soll für jeden Punkt des Raumes der Werth von ϕ angenommen werden, der

Digitized by Google

hier galt, bevor die Verschiebungen stattfanden. Es wird dann δW gleich der Vergrösserung, die

$$-\int G d\tau,$$

dadurch erfährt, dass k, k', k'' und u, v, w in jedem Raumelemente des Eisens bei den Verschiebungen sich ändern. In dem Punkte des Raumes (x, y, z) befindet sich nach den Verschiebungen der materielle Punkt, der vor denselben am Orte $(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)$ sich befand; es haben dort k, k', k'' also die Zunahmen

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial k}{\partial x}\xi - \frac{\partial k}{\partial y}\eta - \frac{\partial k}{\partial z}\zeta \\ &-\frac{\partial k'}{\partial x}\xi - \frac{\partial k'}{\partial y}\eta - \frac{\partial k'}{\partial z}\zeta \\ &-\frac{\partial k''}{\partial x}\xi - \frac{\partial k''}{\partial y}\eta - \frac{\partial k''}{\partial z}\zeta \end{aligned}$$

erhalten; die Verschiebungen, die derselbe materielle Punkt erfahren hat, während das Eisen aus demjenigen Zustande, in dem keine Dilatationen vorhanden waren, in den Zustand überging, in dem es nach den Verschiebungen ξ, η, ζ sich befindet, sind $u+\xi, v+\eta, w+\zeta$, d. h. ξ, η, ζ sind die Vergrösserungen, die u, v, w in Folge der Verschiebungen ξ, η, ζ erlitten haben. Es hat hiernach keine Schwierigkeit durch Gleichsetzung der Coefficienten von ξ, η, ζ in δW und in dem Integrale, durch welches A, B, C eingeführt sind, Ausdrücke für diese Kräfte zu bilden. Dieselben werden wesentlich vereinfacht, wenn man benutzt, dass u, v, w unendlich klein sind, annimmt, dass k' und k'' endlich wie k sind, und nur Endliches berücksichtigt. Da an der Oberfläche des Eisens k' und $k''=0$ sind, so erhält man dann

$$\begin{aligned} A = &-\tfrac{1}{2}\frac{\partial k}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right)+\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}k'\left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right) \\ &+\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}k''\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}k''\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}k''\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial z} \end{aligned}$$

und ähnliche Ausdrücke für B und C.

Es lassen sich diese Ausdrücke auf die folgende Weise umformen. Die Differentialgleichung, der ϕ im Eisen genügt, ist, wenn man auch in ihr unendlich Kleines gegen Endliches vernachlässigt,

$$\frac{\partial}{\partial x}(1+4\pi k)\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}(1+4\pi k)\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}(1+4\pi k)\frac{\partial\phi}{\partial z}=0;$$

multiplicirt man sie mit $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ und formt das Resultat um, so erhält man

Digitized by Google

$$\frac{\partial k}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4\pi}+k\right)\left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right)$$
$$-2\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4\pi}+k\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{4\pi}+k\right)\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{4\pi}+k\right)\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right\}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung und der beiden ähnlichen, die sich ihr an die Seite setzen lassen, erhält man

$$A=-\frac{\partial A_x}{\partial x}-\frac{\partial A_y}{\partial y}-\frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$B=-\frac{\partial B_x}{\partial x}-\frac{\partial B_y}{\partial y}-\frac{\partial B_z}{\partial z}$$
$$C=-\frac{\partial C_x}{\partial x}-\frac{\partial C_y}{\partial y}-\frac{\partial C_z}{\partial z},$$

wenn

$$A_x=-\left(\frac{1}{4\pi}+k+\frac{k''}{2}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi}+k-k'\right)\left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right)$$
$$B_y=-\left(\frac{1}{4\pi}+k+\frac{k''}{2}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi}+k-k'\right)\left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right)$$
$$C_z=-\left(\frac{1}{4\pi}+k+\frac{k''}{2}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi}+k-k'\right)\left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right)$$
$$B_z=C_y=-\left(\frac{1}{4\pi}+k+\frac{k''}{2}\right)\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial z}$$
$$C_x=A_z=-\left(\frac{1}{4\pi}+k+\frac{k''}{2}\right)\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial x}$$
$$A_y=B_x=-\left(\frac{1}{4\pi}+k+\frac{k''}{2}\right)\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}.$$

Daraus geht hervor, dass die Kräfte A, B, C sich ersetzen lassen durch die Druckkräfte A_x, A_y, B_z . . . , wo A_y z. B. die x-Componente des auf die Flächeneinheit bezogenen Druckes bedeutet, die in einem auf der y-Axe senkrechten Flächenelement auf die Masse auf derjenigen Seite des Elementes wirkt, nach welcher die y-Ordinaten wachsen.

Die Druckcomponenten A_x, A_y, . . können auch auf die Punkte des Luftraumes, in dem $k, k', k''=0$ sind, bezogen werden und haben auch hier von Null verschiedene Werthe, während die Kräfte A, B, C im Luftraume verschwinden.

Die hier entwickelten Ausdrücke gehen, abgesehen von einer Verschiedenheit der Bezeichnung, in die von Hrn. VON HELMHOLTZ gefundenen über, wenn man $k''=0$ setzt.

So lange wurde der Übergang des Eisens in die umgebende Luft als ein allmäliger vorausgesetzt; es soll nun die Annahme einge-

Digitized by Google

führt werden, dass dieser Übergang in einer unendlich dünnen Schicht sich vollzieht, und dass innerhalb des Eisens k, k', k'' constant sind. In Folge des letzteren Umstandes findet man

$$A = + \tfrac{1}{2}\left(k' + \frac{k''}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right)$$

mit zwei ähnlichen Ausdrücken für B und C. Zu diesen Kräften, welche auf das Innere des Eisens wirken, kommen aber noch solche hinzu, die auf die Elemente seiner Oberfläche ausgeübt werden. Ihre Componenten, bezogen auf die Flächeneinheit, seien $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$. Um diese zu finden, behalte man die eingeführten Zeichen in Bezug auf das Eisen bei, bezeichne die entsprechenden, auf die Luft bezogenen Grössen durch mit einem Strich versehene Buchstaben; man nenne ferner n eine nach dem Innern des Eisens gerichtete Normale seiner Oberfläche. Aus der Differentialgleichung, der bei stetiger Veränderlichkeit von k die Function ϕ genügt, folgt dann, dass, bei der nun gemachten Annahme, an der Oberfläche des Eisens

$$(1 + 4\pi k)\frac{\partial\phi}{\partial n} = \frac{\partial\phi'}{\partial n} \text{ und } \phi = \phi'$$

ist, woraus sich weiter ergiebt

$$\frac{\partial\phi'}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + 4\pi k\frac{\partial\phi}{\partial n}\cos(nx)$$
$$\frac{\partial\phi'}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial y} + 4\pi k\frac{\partial\phi}{\partial n}\cos(ny)$$
$$\frac{\partial\phi'}{\partial z} = \frac{\partial\phi}{\partial z} + 4\pi k\frac{\partial\phi}{\partial n}\cos(nz).$$

Ferner hat man

$$\bar{A} = A'_n - A_n$$
$$A_n = A_x\cos(nx) + A_y\cos(ny) + A_z\cos(nz)$$
$$A'_n = A'_x\cos(nx) + A'_y\cos(ny) + A'_z(\cos(nz)$$
$$A'_x = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\phi'}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{8\pi}\left(\left(\frac{\partial\phi'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi'}{\partial z}\right)^2\right)$$
$$A'_y = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\phi'}{\partial x}\frac{\partial\phi'}{\partial y}, \quad A'_z = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\phi'}{\partial x}\frac{\partial\phi'}{\partial z}.$$

Daraus findet man

$$\bar{A} = -2\pi k^2\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)^2\cos(nx) - \frac{k-k'}{2}\left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right)\cos(nx) + \frac{k''}{2}\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial n}$$

und zwei ähnliche Ausdrücke für $\bar{B}$ und $\bar{C}$.

Digitized by Google

Es sind diese Ausdrücke durch die Discussion eines Processes gewonnen, der nicht immer ausführbar ist. Es sollte der Magnet in die Unendlichkeit geführt werden, ohne dass dabei das Eisen eine Änderung der Gestalt oder Lage erlitte; das ist nicht möglich, z. B. wenn das Eisen ein Hohlkörper ist, in dessen Höhlung der Magnet sich befindet. Aber auch in solchen Fällen werden die für A, B, C und $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ aufgestellten Ausdrücke gelten, da es in Bezug auf die Kräfte, die auf ein Element des Eisens ausgeübt werden, gleichgültig sein muss, wie die magnetischen Flüssigkeiten, welche gewisse Werthe des Gesammtpotentials ϕ in seinen Punkten hervorbringen, soweit sie in endlicher Entfernung von dem Elemente liegen, vertheilt sind.

Die in Bezug auf einen Eisenkörper angestellten Betrachtungen lassen sich auf ein Diëlektricum übertragen, wenn dieses an Stelle des Eisens und ein elektrisirter Nichtleiter an Stelle des Magnets gesetzt wird. Der Nichtleiter kann aber auch durch Leiter ersetzt werden, da es für die Kräfte, die auf ein Element des Diëlektricums wirken, gleichgültig ist, ob die elektrischen Flüssigkeiten, von denen diese Kräfte herrühren, soweit sie in endlicher Entfernung von dem Elemente liegen, in ihren Trägern beweglich sind, oder nicht.

Nun ist es leicht, die Differentialgleichungen für die Formänderungen aufzustellen, die ein fester elastischer Körper erfährt, wenn er magnetisch oder diëlektrisch polarisirt wird. Man bezeichne in üblicher Weise durch $X_x, X_y, \ldots$ die Componenten der durch die Verschiebungen u, v, w hervorgerufenen elastischen Drucke, durch X, Y, Z und $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ die Componenten der auf die Volumeneinheit bezogenen Kräfte und der auf die Flächeneinheit bezogenen Druckkräfte, welche auf das Innere und auf die Oberfläche des Körpers ausgeübt werden und von anderen Ursachen, als der Elasticität und der Polarisirung desselben herrühren; man hat dann für jeden Punkt im Innern des Körpers

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = X + A$$
$$\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = Y + B$$
$$\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = Z + C$$

und für jedes Element der Oberfläche, wenn n die nach dem Innern des Körpers gerichtete Normale desselben bedeutet,

$$X_n = \bar{X} + \bar{A}, \quad Y_n = \bar{Y} + \bar{B}, \quad Z_n = \bar{Z} + \bar{C}.$$

Dabei ist allgemein, wenn n eine beliebige Richtung bezeichnet,

Digitized by Google

$$X_n = X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz)$$
$$Y_n = Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) + X_z \cos(nz)$$
$$Z_n = Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz)$$

und

$$X_x = -2K\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \Theta\sigma\right) \qquad Y_z = Z_y = -K\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$
$$Y_y = -2K\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \Theta\sigma\right) \qquad Z_x = X_z = -K\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$
$$Z_z = -2K\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \Theta\sigma\right) \qquad X_y = Y_x = -K\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

wo

$$\sigma = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

und K und Θ die beiden Constanten der Elasticität sind.

3.

Es möge eine Betrachtung hier erwähnt werden, durch die man glauben könnte ebenfalls zur Kenntniss der A, B, C genannten Kräfte zu gelangen, die aber nicht zu diesem Ziele führt.

Man stelle sich einen durch eine geschlossene Fläche begrenzten Theil des magnetisch oder diëlektrisch polarisirten Körpers vor und berechne die Summe der x-Componenten der Kräfte, welche auf diesen Theil von allen ausserhalb desselben befindlichen magnetischen oder elektrischen Flüssigkeiten ausgeübt werden. Die in ihm enthaltenen Flüssigkeiten können dabei ersetzt werden durch eine Schicht an seiner Oberfläche, in der auf das Flächenelement ds die Flüssigkeitsmenge

$$k\frac{\partial \phi}{\partial n}\, ds$$

kommt, wenn n die nach seinem Innern gerichtete Normale von ds bedeutet. Die auf diese Schicht wirkenden Kräfte lassen sich aus zwei Theilen zusammensetzen. Für den ersten Theil ist ϕ das auf einen Pol von der Flüssigkeitsmenge 1 bezogene Potential. Der zweite Theil rührt her von einer Flüssigkeitsschicht, die an der Fläche, deren Element ds genannt worden ist, ausserhalb derselben sich befindet und im Elemente ds die Dichtigkeit

$$-k\frac{\partial \phi}{\partial n}$$

besitzt. Es sei U das Potential dieser Schicht in Bezug auf einen

Digitized by Google

Punkt, dessen Entfernung von dem Elemente ds durch r bezeichnet werden möge, so dass

$$U = -k\int\frac{ds}{r}\frac{\partial\phi}{\partial n}$$

ist, und U_i sei der Werth von U in Bezug auf einen inneren, U_a der in Bezug auf einen äusseren Punkt. Der erste Theil der gesuchten Summe der x-Componenten ist dann

$$-k\int ds\frac{\partial\phi}{\partial n}\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

und der zweite

$$-k\int ds\frac{\partial\phi}{\partial n}\frac{\partial U_i}{\partial x}.$$

Dieser zweite Theil lässt sich aber auch noch auf andere Weise ausdrücken. Er ist nämlich gleich der negativ genommenen Summe der x-Componenten derjenigen Kräfte, welche die innere von den beiden betrachteten Schichten auf die äussere ausübt; d. h. er ist

$$= k\int ds\frac{\partial\phi}{\partial n}\frac{\partial U_a}{\partial x},$$

also auch

$$= \frac{k}{2}\int ds\frac{\partial\phi}{\partial n}\left(\frac{\partial U_a}{\partial x}-\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)$$

oder

$$= -2\pi k^2\int ds\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)^2\cos(nx).$$

Man kann hiernach die Summen der Componenten nach den Coordinatenaxen der Kräfte, welche auf die Flüssigkeiten in dem abgegrenzten Theile des Körpers von allen ausserhalb desselben befindlichen Flüssigkeiten ausgeübt werden, berechnen, indem man annimmt, dass auf jedes Element seiner Oberfläche ein Druck wirkt, dessen Componenten, bezogen auf die Flächeneinheit, sind

$$X_n = -k\frac{\partial\phi}{\partial n}\frac{\partial\phi}{\partial x}-2\pi k^2\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)^2\cos(nx)$$

$$Y_n = -k\frac{\partial\phi}{\partial n}\frac{\partial\phi}{\partial y}-2\pi k^2\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)^2\cos(ny)$$

$$Z_n = -k\frac{\partial\phi}{\partial n}\frac{\partial\phi}{\partial z}-2\pi k^2\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)^2\cos(nz).$$

Eine nahe liegende Hypothese ist nun die, dass hierdurch erschöpfend die magnetischen oder elektrischen Kräfte angegeben sind, die auf den gedachten Theil des Körpers wirken. Wäre das richtig, so würde man jene Kräfte A, B, C finden, indem man mit Hülfe dieser Ausdrücke für ein Raumelement des Körpers die Componenten-

Digitized by Google

summen ermittelte und durch die Grösse des Raumelementes dividirte; es müssten die Quotienten von Gestalt und Grösse des Raumelementes unabhängig sich ergeben. Das ist nun aber nicht der Fall; ja im Allgemeinen finden sich die Componentensummen nicht als von der Grössenordnung des Raumelements, sondern als von der seiner Oberfläche. Man sieht das leicht ein, indem man als Raumelement ein Tetraeder wählt, bei dem drei Kanten den Coordinatenaxen parallel sind, und sich überzeugt, dass die Gleichung

$$X_n = X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz)$$

nicht erfüllt wird. Es ist daraus zu schliessen, dass ausser den durch die Fernwirkung der Flüssigkeiten unmittelbar hervorgerufenen Drucken X_n, Y_n, Z_n auf die Oberfläche des abgegrenzten Theiles in Folge der Polarisirung noch andere Drucke wirken. Es fallen diese fort, wenn der Theil von seiner Umgebung durch eine unendlich dünne Luftschicht getrennt ist; sie müssen aber vorhanden sein, wenn die Continuität des Körpers erhalten ist, weil sonst ein Gleichgewicht gar nicht stattfinden könnte.

Hr. Boltzmann hat in seiner Abhandlung »Zur Theorie der sogenannten elektrischen Ausdehnung oder Elektrostriction II.«[1] allgemeine Gleichungen aufgestellt, welche für die Deformation eines beliebigen festen elastischen Körpers durch Magnetisirung oder Diëlektrisirung gelten sollen. Den Betrachtungen, durch welche er dieselben ableitet, liegt aber die eben besprochene Hypothese zu Grunde, deren innerer Widerspruch bei dem Wege, den Hr. Boltzmann eingeschlagen hat, nicht hervortritt. Aus den Gesetzen der magnetischen oder elektrischen Kräfte und Induction entwickelt er nämlich die Werthe von X_n, Y_n, Z_n nur für die Fälle, dass n mit der Normale der Fläche $\phi = \text{const.}$ zusammenfällt oder senkrecht darauf ist, und berechnet aus diesen die allgemeinen Werthe von X_n, Y_n, Z_n durch die Gleichung $X_n = X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz$ und die beiden entsprechenden Gleichungen.

4.

Es sollen nun die im §. 2 aufgestellten Gleichungen auf den Fall eines Kugelcondensators angewendet werden, der auch von Hrn. Boltzmann[2] und Hrn. Korteweg[3] behandelt ist.

---

[1] Sitzungsberichte der K. Akad. d. Wiss. zu Wien 2. Dec. 1880.

[2] Sitzungsberichte der K. Akad. d. Wiss. zu Wien 4. Nov. 1880 und 2. Dec. 1880.

[3] Wied. Ann. Bd. 9. pag. 48.

Digitized by Google

Bezieht man die Zeichen $X, Y, Z, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ auf alle Kräfte und Druckkräfte, die auf die Theile und die Oberfläche des zu betrachtenden Körpers neben den durch die Elasticität hervorgerufenen ausgeübt werden, so sind die Differentialgleichungen für die Verrückungen u, v, w

$$-\frac{1}{K}X = \Delta u + (1+2\Theta)\frac{\partial\sigma}{\partial x}$$
$$-\frac{1}{K}Y = \Delta v + (1+2\Theta)\frac{\partial\sigma}{\partial y}$$
$$-\frac{1}{K}Z = \Delta w + (1+2\Theta)\frac{\partial\sigma}{\partial z}.$$

Der Körper soll nun eine Glasmasse sein, die durch zwei concentrische Kugelflächen begrenzt ist, und deren Punkte Verrückungen in den Richtungen ihrer Radien erlitten haben. Der Anfangspunkt der Coordinaten sei der Mittelpunkt,

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

und ρ die Grösse der Verrückung, die nur von r abhängig sein soll, positiv gerechnet in der Richtung in der r wächst. Es ist dann

$$u = \rho\frac{x}{r}, \quad v = \rho\frac{y}{r}, \quad w = \rho\frac{z}{r},$$

also
$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = \rho\,dr,$$

woraus folgt, dass u, v, w die partiellen Differentialquotienten nach x, y, z einer Function von r sind. Es werde diese U genannt; dann ist

$$\sigma = \Delta U = \frac{d^2U}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dU}{dr}$$

oder
$$\sigma = \frac{d\rho}{dr} + 2\frac{\rho}{r} = \frac{1}{r^2}\frac{d(r^2\rho)}{dr}.$$

Die Kräfte X, Y, Z sollen den Gleichungen genügen

$$X = R\frac{x}{r}, \quad Y = R\frac{y}{r}, \quad Z = R\frac{z}{r},$$

wo R eine Function von r ist; da dann

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = R\,dr,$$

so sind auch X, Y, Z die partiellen Differentialquotienten nach x, y, z einer Function von r; nennt man diese P, führt P und U in die Differentialgleichungen für u, v, w ein, multiplicirt dieselben mit dx, dy, dz, addirt und integrirt dann, so erhält man

Digitized by Google

$$-\frac{1}{K}P = \Delta U + (1+2\Theta)\sigma \text{ d. h. } = 2(1+\Theta)\sigma,$$

oder

$$\sigma = -\frac{1}{2K(1+\Theta)}\left(a + \int_{r_1}^{r} R dr\right),$$

wo r_1 den Radius der inneren Oberfläche des Glaskörpers, a eine willkürliche Constante bezeichnen soll. Daraus folgt dann weiter

$$\rho = -\frac{1}{2K(1+\Theta)}\left(\frac{a}{3}r + \frac{b}{r^2} + \frac{1}{r^2}\int_{r_1}^{r} r^2 dr \int_{r_1}^{r} R dr\right),$$

wo b eine zweite Constante ist.

Betrachtet man Punkte, für die $y = 0$, $z = 0$ und x positiv ist, so ist für diese $x = r$, $u = \rho$, $X_r = R_r$; daraus folgt

$$R_r = -2K\left(\frac{d\rho}{dr} + \Theta\sigma\right) \text{ oder } = 2K\left(2\frac{\rho}{r} - (1+\Theta)\sigma\right),$$

und daher

$$R_r = \frac{1+3\Theta}{3(1+\Theta)}a - \frac{2}{1+\Theta}\frac{b}{r^3} + \int_{r_1}^{r} R dr - \frac{2}{1+\Theta}\frac{1}{r^3}\int_{r_1}^{r} r^2 dr \int_{r_1}^{r} R dr.$$

Bezeichnet r_2 den Radius der äusseren Oberfläche des Glases, ist

$$\text{für } r = r_1 \quad R_r = \bar{R}_1$$
$$\text{für } r = r_2 \quad R_r = -\bar{R}_2$$

und sind $\bar{R}_1$ und $\bar{R}_2$ gegeben, so hat man in dieser Gleichung $r = r_1$ und $r = r_2$ zu setzen, um die Gleichungen zu finden, aus denen a und b zu bestimmen sind.

Nun sei der Glaskörper mit zwei leitenden Belegungen versehen, die man sich als von ihm durch unendlich dünne Luftschichten getrennt vorstellen möge. In der inneren Belegung sei das Potential $= \phi_0$, in der äusseren $= 0$; im Glase ist dann

$$\phi = \phi_0 \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}.$$

Nach dem im §. 2 für A aufgestellten Ausdruck ist ferner

$$R = \left(\frac{k'}{2} + \frac{k''}{4}\right)\frac{d}{dr}\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2,$$

also, wenn man

Digitized by Google

$$c = \frac{\phi_0}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}$$

setzt,

$$R = -(2k' + k'')\frac{c^2}{r^5}.$$

Wären die Glasflächen von den Belegungen insofern frei, als Druckkräfte, die auf diese ausgeübt werden, sich auf jene nicht übertrügen, so wäre nach dem für $\bar{A}$ aufgestellten Ausdruck

$$\bar{R}_1 = -\left(2\pi k^2 + \frac{k - k' - k''}{2}\right)\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2 \text{ für } r = r_1$$

und

$$\bar{R}_2 = \left(2\pi k^2 + \frac{k - k' - k''}{2}\right)\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2 \text{ für } r = r_2.$$

Nun soll aber angenommen werden, dass im Gegentheil Drucke, die auf die Belegungen wirken, sich ohne Änderung auf die Glasflächen übertragen; die Werthe von $\bar{R}_1$ und $\bar{R}_2$ sind dann um gewisse Glieder zu vergrössern.

Die innere Fläche der inneren Belegung enthält keine Elektricität; die elektrische Dichtigkeit der äusseren Fläche derselben Belegung ist

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{d\phi'}{dr},$$

wenn das Zeichen ϕ' sich auf die Luftschicht bezieht, die die Belegung von dem Glase trennt; die Kraft, die auf die Einheit der Elektricitätsmenge in einem Flächenelemente hier in der Richtung von r wirkt und herrührt von aller vorhandenen Elektricität mit Ausnahme derjenigen, die auf dem Flächenelemente sich befindet, ist

$$-\frac{1}{2}\frac{d\phi'}{dr}.$$

Hiernach ist der Werth von $\bar{R}_1$ zu vergrössern um

$$\frac{1}{8\pi}\left(\frac{d\phi'}{dr}\right)^2 \text{ d. h. um } \frac{(1 + 4\pi k)^2}{8\pi}\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2.$$

Die Dichtigkeit der Elektricität in der äusseren Fläche der äusseren Belegung ist $= 0$, in der inneren Fläche derselben

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{d\phi'}{dr};$$

daher ist dem Werthe von $\bar{R}_2$ hinzuzufügen

$$-\frac{(1 + 4\pi k)^2}{8\pi}\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2.$$

Digitized by Google

Setzt man noch für $\frac{d\phi}{dr}$ seine Werthe, so ergiebt sich daher

$$\bar{R}_1 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi} + k + k' + k''\right)\frac{c^2}{r_1^4}$$
$$\bar{R}_2 = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi} + k + k' + k''\right)\frac{c^2}{r_2^4}.$$

Es können jetzt die Constanten a und b berechnet werden. Um diese Berechnung zu erleichtern, möge die Annahme gemacht werden, dass die Dicke der Glaswand, $r_2 - r_1$, unendlich klein gegen die Radien r_1 und r_2 ist. Es ergiebt sich dann

$$\frac{2(1+3\Theta)}{1+\Theta} r_1^4 a = -\left(\frac{1}{4\pi} + k - 3k' - k''\right)c^2$$
$$\frac{3}{1+\Theta} r_1 b = -\left(\frac{1}{4\pi} + k + \frac{k''}{2}\right)c^2.$$

Von besonderem Interesse ist die Kenntniss der Vergrösserung, welche der Radius r_1 erfahren hat. Wird diese ρ_1 genannt, so ist

$$\rho_1 = -\frac{1}{2K(1+\Theta)}\left(\frac{a}{3} r_1 + \frac{b}{r_1^2}\right).$$

Führt man statt der Grösse K den Elasticitätscoefficienten des Glases E durch die Gleichung

$$E = 2K\frac{1+3\Theta}{1+2\Theta}$$

ein, so findet man hiernach

$$\rho_1 = \frac{1}{2E}\frac{c_1^2}{r_1^3}\left(\frac{1}{4\pi} + k - \frac{k' - k''\Theta}{1+2\Theta}\right).$$

Diese Gleichung stimmt überein mit einer, die Hr. Korteweg in der oben citirten Arbeit durch Betrachtungen abgeleitet hat, die den hier durchgeführten im Wesentlichen ähnlich, wenn auch in ein anderes Gewand gekleidet, und von geringerer Allgemeinheit sind. Statt der Grössen k, k', k'', die hier vorkommen, hat er 3 andere $\mathrm{k}, \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2$ eingeführt, die mit diesen in den Relationen stehen

$$\mathrm{k} = 1 + 4\pi k$$
$$\mathrm{x}_1 = 4\pi(k' + k'')$$
$$\mathrm{x}_2 = 4\pi k'.$$

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

Digitized by Google

7. Studien zur Statik monocyklischer Systeme.

Von H. von Helmholtz.

(Vorgetragen am 6. März; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XIII]; — ausgegeben am 13. März.)

Ich verstehe unter monocyklischen Systemen solche mechanische Systeme, in deren Innerem eine oder mehrere stationäre, in sich zurücklaufende Bewegungen vorkommen, die aber, wenn es mehrere sind, in ihrer Geschwindigkeit nur von einem Parameter abhängen. Ich setze ferner voraus, dass zwischen den einzelnen Körpern, welche das System bilden, nur conservative Kräfte wirken, beziehlich feste Verbindungen bestehen, während die äusseren Kräfte, welche noch hinzukommen, nicht nothwendig conservativ zu sein brauchen. Ich bezeichne die Aufgaben, die ich behandeln will, als statische, insofern vorausgesetzt wird, dass die Änderungen, welche im Zustande des Systems erfolgen, mit so geringer Geschwindigkeit vor sich gehen, dass das System sich während solcher Änderungen niemals merklich von solchen Zuständen entfernt, in denen es dauernd verweilen könnte.

Das Hauptinteresse solcher Untersuchungen liegt darin, dass auch die Wärmebewegung, wenigstens in ihren nach aussen hin beobachtbaren Wirkungen, die wesentlichen Eigenthümlichkeiten eines monocyklischen Systems zeigt, und dass auch die beschränkte Verwandlungsfähigkeit der Arbeitsäquivalente, die in die Form von Wärme übergegangen sind, denen der monocyklischen Systeme unter gewissen Bedingungen zukommt. Zwar ist die Wärmebewegung nicht im strengen Sinne monocyklisch. Jedes einzelne Atom wechselt wahrscheinlich in der Art seiner Bewegung, und erst dadurch, dass in einer ungeheuer grossen Anzahl von Atomen fortdauernd alle möglichen Stadien der Bewegung repräsentirt sind, wenn auch jedes einzelne Stadium bald von diesem bald von jenem Atome ausgeführt wird, tritt der mechanische Charakter einer monocyklischen Bewegung ein. In den theoretischen Untersuchungen über Wärmebewegung, so weit solche bisher durchführbar waren, müssen wir fortdauernd mit Durchschnittswerthen der in der Zeit für dasselbe Theilchen auf einander folgenden Werthe rechnen. Diejenigen Gesetze der Bewegung, welche trotz des Schwankens der Einzelwerthe, sich hierbei nachweisen lassen, können dadurch nicht ungültig werden, dass der Durchschnittswerth bei den monocyklischen

Digitized by Google

Systemen aus lauter gleichen Einzelwerthen zu nehmen ist. In diesem Sinne schliesse ich die vorzulegenden Studien an die Theorie der Wärme an.

§. 1.

Recapitulation der Gesetze der Wärme.

Wir setzen voraus, dass wir den Zustand eines in allen seinen Theilen gleich temperirten Körpers oder Systems von Körpern vollständig charakterisiren können durch die absolute Temperatur ϑ und durch eine gewisse Zahl von Parametern p_a, welche so gewählt sind, dass Änderung der Temperatur ohne Änderung der Grössen p_a die Einnahme oder Ausgabe keiner anderen Arbeitsform als eines Quantums Wärme nach aussen hin bedingt. Es werden in diesem Falle die Parameter p_a Raumabmessungen, im weiteren Sinne genommen, sein müssen. Unter ihnen kommt sehr gewöhnlich das Volumen des Ganzen oder einzelner Theile vor, aber sie können auch angeben, wie viel von einer besonderen Substanz oder wie viel Elektricität in einem bestimmten Raume zu finden sei.

Die frei verwandelbare, also nicht in Wärme übergeführte Arbeit, welche das betrachtete System nach aussen hin abgiebt, wenn der Parameter p_a in den Werth $(p_a + dp_a)$ übergeht, bezeichne ich mit $P_a \cdot dp_a$. Die Grösse P_a ist also das Kraftmoment der innern Kräfte, welches auf Vergrösserung des Parameters p_a hinwirkt. Es wäre, wie mir scheint, nichts dagegen einzuwenden, dass man P_a als Kraft in Richtung von p_a bezeichnete, wie dies schon in vielen Beispielen der Anwendung geschehen ist. Jede der Grössen P_a ist im Allgemeinen Function des ϑ und der sämmtlichen p_a. Wie die den einzelnen P_a das Gleichgewicht haltenden Componenten gegebener äusserer Kräfte zu finden und zu sondern sind, ist in den Lehrbüchern genügend behandelt.

Wir bezeichnen ferner mit U die gesammte innere Energie des Systems und mit S seine Entropie. Beide Grössen sind ebenfalls Functionen von ϑ und den p_a. Endlich nennen wir dQ die während einer verschwindend kleinen Änderung der Grössen ϑ und p_a in das System eingetretene Wärme, gemessen durch ihr Arbeitsäquivalent. Dann ist bekanntlich

$$\left.\begin{aligned} dQ &= dU + \Sigma(P_a \cdot dp_a) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \vartheta \cdot dS \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} 1.$$

Diese beiden Gleichungen sind bekanntlich die Grundlage der mechanischen Wärmetheorie. Aus ihnen folgt in bekannter Weise, dass

Digitized by Google

von der Wärme dQ_1, die bei der Temperatur ϑ_1 des Körpers in ihn eintritt, immer nur ein Theil in frei verwandelbare Arbeit übergeführt werden kann. Wenn so viel Wärme dQ_0 in der Temperatur ϑ_0 abgegeben wird, dass schliesslich der ursprüngliche Zustand des Körpers in einem vollkommen reversiblen Processe wieder hergestellt werden kann, ist bekanntlich

$$\frac{dQ_1}{\vartheta_1} = \frac{dQ_0}{\vartheta_0}$$

und in andre Arbeit ist verwandelt

$$dQ_1 \cdot \frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{\vartheta_1} = dQ_0 \cdot \frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{\vartheta_0}.$$

Mit Bezug auf das Folgende erlaube ich mir noch folgende Bemerkungen zu machen: Die wesentliche physikalische Bedeutung der Temperatur ϑ ist die, dass ihre Gleichheit oder Ungleichheit zwischen zwei Körpern darüber entscheidet, ob Wärme und in welcher Richtung vom einen zum andern übergehen könne. Zwei Körper von gleicher Temperatur, die sich gegenseitig berühren, stören sich gegenseitig nicht in ihrer Wärmebewegung. Sie bilden, so lange vollkommene Ausgleichung der Temperatur zwischen ihnen stattfinden kann, wiederum ein einziges zusammengesetztes Körpersystem, auf welches die Gleichungen 1 angewendet werden können. Unterscheiden wir die Grössen, welche sich auf die einzelnen Theilsysteme beziehen, durch die Indices 1 und 2, so ist für gleichzeitige Änderungen

$$dQ_1 = dU_1 + \Sigma(P_a \cdot dp_a) = \vartheta \cdot dS_1$$
$$dQ_2 = dU_2 + \Sigma(P_b \cdot dp_b) = \vartheta \cdot dS_2$$

also wenn wir addiren:

$$d(Q_1 + Q_2) = d(U_1 + U_2) + \Sigma(P \cdot dp) = \vartheta \cdot d(S_1 + S_2).$$

Die Summe der Kraftmomente ist in der letzten Gleichung auf alle Kräfte beider Systeme zu erstrecken; $(U_1 + U_2)$ ist die gesammte Energie des vereinigten Systems, $d(Q_1 + Q_2)$ die gesammte zugeleitete Wärme, und die Gleichung zeigt, dass $(S_1 + S_2)$ die Entropie des vereinigten Systems ist.

Ohne Zuleitung von Wärme, wenn also $dQ = 0$, ist in jedem Einzelsystem auch $dS = 0$, oder S constant für alle reversiblen Processe.

Dies gilt für S_1 und S_2, so lange die beiden Körper einzeln sind, gilt aber für die Summe $(S_1 + S_2)$ auch wenn sie mit gleicher Temperatur vereinigt werden. Die Summe der Entropiewerthe S kann also weder in der Trennung noch in der Verbindung durch reversible Processe geändert werden.

Digitized by Google

Dasselbe gilt, wie leicht zu sehen, für beliebig viele Körper, die beliebig getrennt und in gleicher Temperatur verbunden werden können, und diese Folgerung fliesst vollständig aus den beiden Gleichungen 1 her.

Die Entscheidung über die Richtung des Wärmeflusses oder aber das Stattfinden von Wärmegleichgewicht würde auch nach der Ungleichheit oder Gleichheit von Werthen einer beliebig gewählten Function der Temperatur entschieden werden können, die deren Werth eindeutig bestimmt. Aus

$$\vartheta_1 = \vartheta_2$$

folgt auch

$$f(\vartheta_1) = f(\vartheta_2).$$

Die verschiedenen Thermometerscalen des Quecksilber-, Alkohol-, Luftthermometers geben bekanntlich solche nach der Art des thermometrischen Körpers verschiedene Functionen von ϑ. Aber in die Gleichungen 1 kann keine andere Function von ϑ eintreten, als diese selbst, höchstens mit einer willkürlichen Constanten multiplicirt, mit der man dann S zu dividiren hat.

Andererseits, wenn man unter s eine Function von S versteht, so würde man zu setzen haben

$$dQ = \vartheta \cdot \frac{\partial S}{\partial s} \cdot ds,$$

und wenn man bezeichnet:

$$\vartheta \cdot \frac{\partial S}{\partial s} = \eta$$

so erhält man

$$dQ = \eta \cdot ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \; 1_a.$$

Das s als Function von S ist, wie dieses, eine Function der p_a und des jetzt aus den Gleichungen verschwundenen ϑ. Da η nach seiner obigen Definition eine Function des ϑ und der p_a ist, so kann ϑ aus η und den p_a bestimmt, und η an Stelle von ϑ als unabhängige Variable in die Werthe von U, p_a und s eingeführt werden. Die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} dQ &= dU + \Sigma(P_a \cdot dp_a) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \eta \cdot ds \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \; 1_b$$

haben dann genau dieselbe Form, wie die Gleichungen 1, aber es findet der wichtige Unterschied statt, dass η nicht mehr diejenige Grösse ist, deren Gleichheit das Wärmegleichgewicht zwischen zwei Körpern anzeigt. Diese Eigenschaft kommt nur der einen $\eta = \vartheta$ in der ganzen Reihe der Functionen zu, die durch die Gleichung 1_a gegeben sind.

Endlich ist noch auf den Umstand zu merken, den ich schon in meiner ersten thermodynamischen Abhandlung vom 2. Februar 1882 betont habe. In den Gleichungen 1 kommt als Arbeit keine lebendige

Digitized by Google

Kraft der Theile des Systems vor, d. h. es ist vorausgesetzt, dass die Änderungen dp_a so langsam erfolgen, dass die lebendigen Kräfte der in geordneter Bewegung begriffenen Massen gegen die übrigen Arbeitsäquivalente verschwinden. Auch ist vorausgesetzt, dass die Änderungen der einzelnen Theile des Systems nicht schnell genug erfolgen, um vollständige Ausgleichung ihrer Temperaturen zu verhindern. Also gelten die Gleichungen 1 nur für Änderungen $d\vartheta$ und dp_a von verschwindender Geschwindigkeit. In diesem Sinne sind die besprochenen Gleichungen der Thermodynamik also auch nur in dem oben erörterten Sinne als Gesetze der Statik thermischer Systeme zu betrachten, und wir haben nur in den Gesetzen der Statik monocyklischer Systeme die Analoga zu suchen. Übrigens sind beide dem Gesetze von den virtuellen Geschwindigkeiten, welches sich auf ganz unbewegte Systeme bezieht, darin gleich, dass auch dieses die bei langsamer Bewegung ausführbaren Arbeitsübertragungen umfasst.

Die Zurückführung der in den Gleichungen 1 vorkommenden Functionen auf die Differentialquotienten einer einzigen Function, wie sie Hr. Massieu[1] zuerst ausgeführt hat, kann, wie schon Hr. Gibbs[2] gezeigt hat, auch an der allgemeinen Form 1_b ausgeführt werden, wenn man η und die p_a als unabhängige Variable benutzt. Dann ist zu setzen

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot d\eta + \sum_a \left[\frac{\partial U}{\partial p_a} \cdot dp_a \right]$$

$$ds = \frac{\partial s}{\partial \eta} \cdot d\eta + \sum_a \left[\frac{\partial s}{\partial p_a} \cdot dp_a \right]$$

und es folgt, wenn wir setzen

$$H = U - \eta \cdot s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \; 1_c$$

aus den Gleichungen 1_b:

$$\frac{\partial U}{\partial p_a} + P_a = \eta \cdot \frac{\partial s}{\partial p_a}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = \eta \cdot \frac{\partial s}{\partial \eta}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} P_a &= -\frac{\partial H}{\partial p_a} \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s &= -\frac{\partial H}{\partial \eta} \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U &= H - \eta \cdot \frac{\partial H}{\partial \eta} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} 1_d.$$

[1] Mémoires des Savants étrangers t. XXII. Journal de Physique par d'Almeida t. VI. p. 216.

[2] Transactions Connecticut Acad. III. p. 108—248; 343—524. Silliman's Journal 1878. XVI. p. 441—458.

Digitized by Google

Dies sind die drei Beziehungen, welche ich meinen thermodynamischen Folgerungen in meinen früheren Mittheilungen zu Grunde gelegt hatte, mich beschränkend auf den engeren Fall, wo $\eta = \vartheta$. Die Function H ist dort mit $\mathfrak{H}$ bezeichnet und freie Energie genannt.

Der Werth des H ist natürlich verschieden je nach der Wahl des η. Denn das in seinem Werthe 1_c vorkommende Product

$$\eta \cdot s = \vartheta \cdot s \cdot \frac{\partial S}{\partial s}$$

variirt mit der Wahl des s als Function von S. Diese verschiedenen Werthe des H sind also alle in Jacobi's Sinne Kräftefunctionen für die mechanischen Leistungen des Systems, aber sie entsprechen der unterscheidenden Bedingung, dass ihre besondere Variable η constant sei. Die von mir gebrauchte Kräftefunction ist die isotherme, man kann aber, wie Hr. Gibbs zeigte, auch eine adiabatische u. s. w. bilden; die letztgenannte fällt zusammen mit der Function U.

Nun liegt in dem Umstande, dass wir das Arbeitsäquivalent der Wärmemenge

$$dQ = dU + \Sigma (P_a \cdot dp_a) .$$

in der Form

$$dQ = \eta \cdot ds$$

ausdrücken können, nichts für die hier vorkommenden physikalischen Grössen charakteristisches. Denn diese Umformung kann jedenfalls für jede Art von Abhängigkeit zwischen den Functionen U, P_a und p_a vollzogen werden, wenn nur die P_a mit U und den p_a sich continuirlich ändern. Es muss sich immer das Integral der Gleichung

$$dQ = 0$$

in der Form

$$s = \text{Const.}$$

oder

$$S = f_{(s)} = \text{Const.}$$

bilden lassen, welches das Gesetz der adiabatischen Änderungen ausdrückt. Dann ist für beliebige Änderungen des U und der p_a gleichzeitig:

$$0 = dU + \Sigma [P_a \cdot dp_a]$$
$$0 = \frac{\partial s}{\partial U} \cdot dU + \Sigma \left[\frac{\partial s}{\partial p_a} \cdot dp_a \right],$$

welche Gleichungen für beliebige Werthe des dU und der dp_a nur dann neben einander bestehen können, wenn

$$\frac{\partial s}{\partial U} = \frac{1}{P_a} \cdot \frac{\partial s}{\partial p_a} .$$

Digitized by Google

Wenn wir also die erste der Gleichungen 1_b mit $\frac{\partial s}{\partial U}$ multipliciren, erhalten wir

$$\frac{\partial s}{\partial U} \cdot dQ = ds,$$

und wenn wir η definiren durch die Gleichung

$$\eta \cdot \frac{\partial s}{\partial U} = 1,$$

so ergiebt sich

$$dQ = \eta \cdot ds.$$

Das für die physikalischen Eigenthümlichkeiten der Wärmebewegung charakteristische ist also nicht der Umstand, dass der Ausdruck für dQ sich in die letztgenannte Form bringen lässt, sondern liegt allein darin, dass einer unter den möglichen integrirenden Nennern η der Gleichung $dQ = 0$ gleichen Werth haben muss für je zwei Körper, zwischen denen Wärmegleichgewicht besteht.

§. 2.

Die allgemeinen Gleichungen der Mechanik auf entsprechende Form gebracht.

Wir setzen zunächst voraus ein beliebig zusammengesetztes mechanisches System, zwischen dessen einzelnen Theilen nur conservative Kräfte wirken, beziehlich feste Verbindungen bestehen, und dessen augenblickliche Lage durch eine Anzahl allgemeiner Coordinaten p_a (die also nothwendig Abmessungen räumlicher Grössen sein müssen), vollständig bestimmbar ist. Die Momente äusserer Kräfte dagegen, welche nicht conservativ zu sein brauchen, und welche auf Vergrösserung der Coordinaten p_a hinwirken, bezeichnen wir, wie vorher, mit $(-P_a)$, so dass

$$P_a \cdot dp_a$$

die Arbeit ist, welche die inneren Kräfte des Systems in der Überwindung jener äusseren Kraftmomente während der Änderung dp_a ausüben. Wir setzen ferner zur kürzeren Bezeichnung die Differentialquotienten

$$\left.\frac{dp_a}{dt} = q_a, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right\} 2$$

die potentielle Energie des Systems gleich Φ, die lebendige Kraft gleich L. Die erstere, Φ, ist unter den genannten Bedingungen eine

Digitized by Google

Function der Coordinaten p_a allein, die zweite, L, eine homogene Function zweiten Grades der Grössen q_a, deren Coefficienten Functionen der p_a sind. Bei der Bildung der partiellen Differentialquotienten von L nach den p_a und den q_a werden diese als unabhängige Variable betrachtet, und die in Gleichung 2 ausgesprochene Beziehung zwischen ihnen nicht berücksichtigt. Aus der angegebenen Beschaffenheit der Function L folgt bekanntlich:

$$2L = \sum_a \left[q_a \cdot \frac{\partial L}{\partial q_a} \right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2_a.$$

Unter diesen Umständen sind nach LAGRANGE die Bewegungsgleichungen des Systems von der Form:

$$P_a = -\frac{\partial}{\partial p_a}[\Phi - L] - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial q_a}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2_b.$$

Wenn wir setzen:

$$\Phi - L = H, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2_c$$

und bemerken, dass weil Φ von den q_a unabhängig ist

$$\frac{\partial L}{\partial q_a} = -\frac{\partial H}{\partial q_a},$$

so können wir die genannten Bewegungsgleichungen auch schreiben:

$$P_a = -\frac{\partial H}{\partial p_a} + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial H}{\partial q_a}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2_d.$$

Dann ist die Gesammtenergie:

$$\begin{aligned} U &= \Phi + L \\ &= H - \sum \left[q_a \cdot \frac{\partial H}{\partial q_a} \right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2_e. \end{aligned}$$

An diesem allgemeinsten Ausdruck der Bewegungsgleichungen wollen wir nun folgende Beschränkungen einführen:

1. Für eine besondere Gruppe der Coordinaten, die wir durch den Index b unterscheiden wollen, und die wir als schnell veränderlich betrachten, nehmen wir an, dass die ihrer Veränderung entsprechende Art der Bewegung eine in sich zurücklaufende sei, und dass sich während dieser Bewegung weder Φ noch L merklich ändern, so dass also beide Grössen zwar von den q_b, aber nicht von den p_b abhängig seien. Unter dieser Voraussetzung wird Gleichung 2_d

$$P_b = +\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial H}{\partial q_b}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3.$$

Digitized by Google

Wenn wir diese Gleichung mit $q_b \cdot dt$ auf beiden Seiten multipliciren und setzen

$$P_b \cdot q_b \cdot dt = -dQ_b,$$

so ist dQ_b die auf Beschleunigung der Bewegung q_b verwendete äussere Arbeit. Wenn wir also zu kürzerer Bezeichnung den Werth

$$\frac{\partial H}{\partial q_b} = -s_b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3_a$$

setzen, so ergiebt 3_a:

$$dQ_b = q_b \cdot ds_b, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3_b,$$

worin das ds_b das vollständige Differential der Grösse s_b bezeichnet.

Beispiele solcher Bewegungen wären Kreisel in reibungslosen Axenlagern laufend, symmetrisch um die Rotationsaxe gebaut. Wenn wir als Parameter q_b die Winkelgeschwindigkeit setzen, wäre s_b das Moment der Rotationsbewegung, d. h. das Product aus dem Trägheitsmoment und der Winkelgeschwindigkeit.

Ein anderes Beispiel wäre der Fluss einer reibungslosen Flüssigkeit in einem in sich zurücklaufenden Canale, mit elastischen Wänden, also dehnbar im Querschnitt, biegsam und dehnbar in der Länge. Wenn wir die Menge der in der Secunde durch jeden Querschnitt ω strömenden Flüssigkeit als q_b benutzen, wäre das s_b

$$s_b = \int u \cdot dx,$$

worin dx ein Längenelement der Axe des Canals und $u = \frac{1}{\omega} \cdot q$ die Geschwindigkeit der Flüssigkeitstheilchen in Richtung von dx bezeichnet.

2. Übrigens wollen wir voraussetzen, wie dies in den Gleichungen der mechanischen Wärmetheorie erwähntermaassen immer geschehen ist, dass die Änderungen aller anderen Parameter p_a und ebenso die der Grössen q_b mit verschwindender Geschwindigkeit erfolgen, so dass alle mit q_a, $\frac{dq_a}{dt}$ oder $\frac{dq_b}{dt}$ multiplicirten Ausdrücke als verschwindende Grössen erster Ordnung zu behandeln sind.

Es setzt dies voraus, dass die äusseren Kräfte, die auf das System wirken, sich niemals weit von den Werthen entfernen, welche sie haben müssten, um die p_a und q_b constant zu machen, so dass die sämmtlichen nach der Zeit genommenen Differentialquotienten, die in den Gleichungen 2_d vorkommen, sehr klein werden, und das System sich fortdauernd einem stationären Zustande sehr nahe befindet, in dem es beliebig lange Zeit ausdauern könnte. Unter diesen Bedingungen reduciren sich die Gleichungen 2_d auf

Digitized by Google

$$P_a = -\frac{\partial H}{\partial p_a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3_c$$

$$dQ_b = q_b \cdot ds_b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3_b$$

$$s_b = -\frac{\partial H}{\partial q_b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3_a.$$

Unter den bisher gemachten Voraussetzungen wird die in den Gleichungen 3 bis 3_c vorkommende Function H immer noch den in 2_c angegebenen Werth haben

$$H = \Phi - L,$$

$$2L = -\sum\left[q_a \cdot \frac{\partial H}{\partial q_a}\right],$$

und L wird eine ganze homogene Function zweiten Grades der Geschwindigkeiten q_a sein. In letzterer Beziehung aber kann eine Änderung eintreten, wenn eine oder mehrere der Kräfte, die wir durch den Index c unterscheiden wollen, dauernd gleich Null sind, und wir die entsprechenden Gleichungen

$$0 = \frac{\partial H}{\partial p_c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4$$

benutzen um die Grössen p_c zu eliminiren. Bezeichnen wir den Ausdruck für den Werth von H, der durch die Elimination der p_c gewonnen wird mit $\mathfrak{H}$, so ist

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_a} = \frac{\partial H}{\partial p_a} + \sum_c\left[\frac{\partial H}{\partial p_c} \cdot \frac{\partial p_c}{\partial p_a}\right]$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_b} = \frac{\partial H}{\partial q_b} + \sum_c\left[\frac{\partial H}{\partial p_c} \cdot \frac{\partial p_c}{\partial q_b}\right].$$

Wegen der Gleichungen 4 reducirt sich dies auf

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_a} = \frac{\partial H}{\partial p_a}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_b} = \frac{\partial H}{\partial q_b}.$$

Es ist also noch immer:

$$\mathfrak{H} = \Phi - L \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4_a$$

$$P_a = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4_b$$

$$s_b = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4_c$$

$$L = \sum\left[q_b \cdot \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_b}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4_d.$$

Digitized by Google

Aber dieser Werth von L ist keine ganze homogene Function zweiten Grades mehr von den Grössen q_b, da die Gleichungen 4 im Allgemeinen Glieder zweiten Grades nach den q_b enthalten, und die Werthe der p_c, die sich daraus ergeben, verwickelte Functionen der q_b sein können, welche bei der Elimination diese Grössen in den Werth des Φ und in die Coefficienten der Glieder zweiten Grades des L eintreten machen.

Ein Beispiel für einen solchen Fall wäre die lebendige Kraft eines Kreisels, an dessen Axe ein Centrifugalregulator befestigt ist, dessen Hebung und Senkung durch keine wechselnde äussere Kraft P_a, sondern nur durch dauernd wirkende conservative Kräfte (Schwere, elastische Federn) beeinflusst wird, und daher als Function der Rotationsgeschwindigkeit dargestellt werden kann. In dem Werthe der lebendigen Kraft, welche gleich dem halben Product aus dem Trägheitsmoment und dem Quadrat der Rotationsgeschwindigkeit ist, wird dann auch das genannte Moment von dieser Geschwindigkeit abhängig.

§. 3.

Monocyklische Systeme.

Diesen Namen will ich, wie oben erwähnt, gebrauchen für Systeme, in denen in sich zurücklaufende innere Bewegung vorkommt, die durch nur einen Parameter σ neben den Coordinaten p_a vollständig bestimmt wird.

Der einfachste Fall einer solchen Bewegung ist gegeben, wenn in dem Systeme des §. 2 nur eine Geschwindigkeit q vorkommt. Dann erhalten wir die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} P_a &= -\frac{\partial H}{\partial p_a} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ dQ &= s \cdot dq \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ s &= -\frac{\partial H}{\partial q} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ U &= H - q \cdot \frac{\partial H}{\partial q} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} 5.$$

Daraus folgt

$$dQ = dU + \Sigma\,[P_a \cdot dp_a] = s \cdot dq \dots\dots\dots\dots$$

Diese Gleichungen sind vollkommen von gleicher Form, wie die oben aufgestellten für die Wärmebewegung. An Stelle der Temperatur ϑ oder der von ihr abhängigen Grösse η ist die Geschwindigkeit q getreten. Die Grösse dQ bedeutet hier die auf directe Steigerung der

Digitized by Google

inneren Bewegung gerichtete Arbeit, wie dort, nur dass diese innere Bewegung jetzt von anderer Art ist, als die Wärmebewegung.

Es ist also q hier integrirender Nenner der Gleichung $dQ = 0$; wir können aber, wie dort, die Form der Gleichungen auch wahren, wenn wir als Parameter für die Intensität der Bewegung neben den p_a eine Grösse $\left(q \cdot \frac{\partial s}{\partial \sigma}\right)$ einführen, worin σ eine Function von s bedeutet. Dann verliert aber die nunmehr einzuführende Function

$$\mathfrak{H} = U - q \cdot \frac{\partial s}{\partial \sigma} \cdot \sigma$$

die für H in 2_c angenommene Bedeutung: $H = \Phi - L$.

Beachtenswerth ist, dass in diesem einfachsten Falle monocyklischer Bewegung auch die lebendige Kraft

$$L = -\tfrac{1}{2} q \cdot \frac{\partial H}{\partial q} = \tfrac{1}{2} q \cdot s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5_a$$

einer der integrirenden Nenner des Systems ist. Wenn man das hierfür zu wählende $\mathfrak{S}$ durch die Gleichung definirt

$$dQ = 2L \cdot d\mathfrak{S} = q \cdot ds,$$

so erhalten wir

$$d\mathfrak{S} = \frac{ds}{s}$$

$$\mathfrak{S} = \log s - \log A,$$

wo A eine Integrationsconstante. Oder:

$$\mathfrak{S} = \log\left(\frac{s}{A}\right) = \tfrac{1}{2} \cdot \log L + \tfrac{1}{2} \log\left(\frac{s}{A^2 \cdot q}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5_b.$$

Hier tritt die Analogie mit der kinetischen Gastheorie schon sehr deutlich heraus. Die Temperatur $\mathfrak{P}$ ist der lebendigen Kraft proportional, und die Entropie, bezeichnet wie 1883 S. 655, ist:

$$S = \mathfrak{J} \cdot \gamma \cdot \log \mathfrak{P} + \mathfrak{J} \cdot (c - \gamma) \cdot \log v + C.$$

Im vorliegenden Falle ist das Verhältniss $\frac{s}{q}$ das Trägheitsmoment der rotirenden Masse, welches wie das v in der Entropie der Gase von Raumabmessungen abhängt, und zwar nur von solchen, so lange nicht etwa Grössen p_c eliminirt sind.

§. 4.

Ein allgemeinerer Fall der monocyklischen Bewegung tritt ein, wenn mehrere Geschwindigkeiten q_b vorhanden sind, die

Digitized by Google

aber alle von einer von ihnen und den Coordinaten p_a bestimmt worden. Äusserst mannigfache und wechselnde Beziehungen zwischen Drehungsgeschwindigkeiten können bekanntlich auch an mechanischen Apparaten hergestellt werden. Eine Frictionsrolle könnte z. B. auf dem Umfang eines Rotationskörpers laufen, der an verschiedenen Stellen verschiedenen Durchmesser hat, und durch Centrifugalkräfte an der Axe, mit der er sich dreht, auf- und abgeschoben wird.

Nehmen wir also den allgemeinsten Fall solcher Abhängigkeit, wobei jede Geschwindigkeit q_b eine vorgeschriebene Function der p_a und eines Parameters σ sei, die Verbindung aber von der Art, dass dadurch keine Arbeit verzehrt oder gewonnen werde. Es wird alsdann die von aussen her zur Änderung der q_b aufzuwendende Arbeit sein:

$$dQ = \sum_b [dQ_b] = \sum_b [q_b \cdot ds_b],$$

wobei die Verbindung des Systems es gleichgültig macht, ob die äusseren Kräfte direct nur auf eines oder mehrere der q_b wirken.

Da die s_b durch die Gleichungen

$$s_b = -\frac{\partial H}{\partial q_b}$$

als Functionen der p_a und q_b gegeben sind, sind sie auch als solche der p_a und des σ darzustellen, und demgemäss auch das dQ als eine homogene lineare Function der dp_a und des $d\sigma$, deren integrirende Nenner gefunden werden können. Dadurch würde auch dieser allgemeinste Fall auf die früher gegebenen Formen zurückgeführt. Indessen lässt sich die Art der integrirenden Nenner nicht so allgemein bestimmen. Hierbei ist namentlich die Frage aufzuwerfen, unter welchen Bedingungen die lebendige Kraft einer der integrirenden Nenner bleibt; diese wollen wir weiter unten noch behandeln.

§. 5.

Koppelung je zweier Systeme.

Von Interesse ist hier namentlich der Fall, wo zwischen zwei Systemen, welche gleiche Werthe eines ihrer integrirenden Nenner haben, eine mechanische Verbindung so hergestellt wird, dass während diese Verbindung besteht, diese Gleichheit der genannten Nenner erhalten bleiben muss. Um eine solche Art der Verbindung kurz zu bezeichnen, will ich sie isomore Koppelung (ἴσον μόριον, gleicher Nenner) nennen.

Beispiele wären zwei Kreisel, deren Axen so verbunden werden, dass sie zu gleicher Umlaufsgeschwindigkeit gezwungen werden. Ist

Digitized by Google

gleiche Rotation schon beim Eingehen der Verbindung vorhanden, so lässt sich die Koppelung ohne Störung der vorhandenen Bewegungen herstellen. Ihre Axen könnten Centrifugalregulatoren verschiedener Art tragen, deren Stellung von der Axe aus durch Kräfte P_a regulirt werden könnte, wodurch mittelbar auch die Umlaufsgeschwindigkeit auf beliebige Höhe zu bringen wäre.

Auch zwei Ströme in ringförmigen Röhren können ohne Störung beider in einen Ring vereinigt werden, wenn beide gleiche Strömung durch jeden Querschnitt haben. Streckung des Canals vermindert die Strömung, Verkürzung erhöht sie. Dadurch kann man je zweien gleichen Werth geben.

Dann gelten genau dieselben Betrachtungen, welche für die Wärmebewegung aus den Gleichungen (1) folgen, und an die ich in §. 1 kurz erinnert habe. Wir erhalten dadurch genau dieselben Gesetze für die Möglichkeit auf reversible Weise Arbeit der Kräfte P_a auf Kosten der inneren Bewegung der Systeme zu gewinnen. Die Grundvoraussetzung hierfür ist also die, dass wir kein anderes Mittel haben, direct auf die innere Bewegung der gegebenen monocyklischen Systeme zu wirken, als durch isomore Koppelung mit anderen Systemen, und dass für jedes einzelne der koppelbaren Systeme ein einziger bestimmter integrirender Nenner besteht, welcher die ungestörte Koppelung mit dem gleich grossen Nenner eines andern Systems zulässt, wie dies in den oben angeführten Beispielen von Centrifugalregulatoren oder Ringströmen der Fall sein würde.

Dass wir die Wärmebewegung der Atome nicht directer angreifen und verwandeln können, als es der Fall ist, hängt doch auch nur davon ab, dass wir unsere Einwirkungen nicht auf bestimmte, in bestimmter Richtung vorgehende Atome isoliren können, sondern nothwendig immer alle eines bestimmten Raumbezirks gleichmässig treffen müssen. Es beruht nur auf der Beschränkung der uns zu Gebot stehenden Methoden, und nicht im Wesen der Bewegung. Eben deshalb dürfen wir ähnliche Beschränkungen unseres Eingreifens auch für die hier besprochenen analogen Fälle voraussetzen, ohne die Natur des Problems zu verändern.

§. 6.

Bedingungen, unter denen die lebendige Kraft integrirender Nenner ist.

Da die lebendige Kraft der inneren Bewegung nach der kinetischen Gastheorie der Temperatur direct proportional und somit integrirender Nenner ist, da ferner die lebendige Kraft die einzige fest bestimmte

Digitized by Google

Bewegungsgrösse ist, die ganz unabhängig von aller Verschiedenheit der Systeme, zwischen denen Wärmegleichgewicht eintreten kann, nothwendig in genau bestimmtem Werthe immer wieder sich vorfindet: so hat die von den HH. Boltzmann[1] und Clausius[2] aufgestellte Hypothese, dass sie immer das Maass der Temperatur sei, einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit. Es schien mir deshalb wichtig zu untersuchen, welches die Bedingungen für das in §. 5 definirte allgemeinere monocyklische System seien, unter denen die lebendige Kraft integrirender Nenner wird. Damit dies der Fall sei, muss sein

$$dQ = \sum_b [dQ_b] = \sum_b [q_b \cdot ds_b]$$

von der Form

$$dQ = \sum_b [q_b \cdot s_b] \cdot d\ (\log \sigma) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} 6,$$

wo wir mit $\log. \sigma$ den Parameter bezeichnen, als dessen Functionen die ausserdem von den Coordinaten p_a abhängigen Grössen q_b und s_b dargestellt werden sollen. Vergleichung mit den Sätzen des §. 3, namentlich 5_a und 5_b zeigt, dass dieses σ das Rotationsmoment eines dem zusammengesetzten gleichwirkenden einfachen Systems wäre und

$$q = \frac{2L}{\sigma},$$

die entsprechende Geschwindigkeit einer einfachen inneren Bewegung. Wenn wir demnach die p_a und σ als unabhängige Variable in die Gleichung 6 einführen, erhalten wir folgende Reihe von Gleichungen:

$$\sum_b \left[q_b \cdot \frac{\partial s_b}{\partial p_a} \right] = 0$$

$$\sum_b \left[q_b \cdot \left(\frac{\partial s_b}{\partial \sigma} - \frac{s_b}{\sigma} \right) \right] = 0.$$

Dividirt man sie alle durch σ und bezeichnet:

$$\frac{s_b}{\sigma} = v_b,$$

so werden die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \sum_b \left[q_b \cdot \frac{\partial v_b}{\partial p_a} \right] &= 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_b \left[q_b \cdot \frac{\partial v_b}{\partial \sigma} \right] &= 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} 6_a.$$

Man kann also die obige Gleichung 6 schreiben:

$$\Sigma [q_b \cdot dv_b] = 0.$$

---

[1] Wiener Sitzungsber. 1866. Bd. LIII. Abth. II. S. 195—220.

[2] Poggendorff Annalen 1871. Bd. 142. S. 433—461. §. 14 u. 15 der Abhandlung.

Digitized by Google

Da mittels der Gleichungen 3_a, beziehlich 4_c, die q_b als Functionen der s_b, also auch der v_b und σ dargestellt werden können, so sind die Gleichungen 6_a solche, welche die Beziehungen zwischen den v_b, p_a und σ bestimmen.

Ist a die Anzahl der Parameter p_a und b die der Geschwindigkeiten q_b, so haben wir $(a+1)$ Gleichungen zur Bestimmung von b Unbekannten v_b.

Ist $(a+1)=b$, so folgt aus den Gleichungen 6_a, dass die Determinante der Coefficienten der q_b gleich Null sein muss, diese ist aber die Functionaldeterminante der v_b in Beziehung auf die unabhängigen Variablen p_a und σ. Dann wird also eines der v_b eine Function der andern sein müssen, oder es wird eine Gleichung $F=0$ existiren müssen, in der F eine Function der v_b mit constanten Coefficienten ist, die nur mittels der v_b von den p_a und σ abhängt. Bildet man nun aus der Gleichung

$$F = C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Big\} 6_b$$

die Reihe ihrer Differentialquotienten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial p_a} &= \sum_b \left[\frac{\partial F}{\partial v_b}\cdot\frac{\partial v_b}{\partial p_a}\right] = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma} &= \sum_b \left[\frac{\partial F}{\partial v_b}\cdot\frac{\partial v_b}{\partial \sigma}\right] = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} 6_c$$

so sind dies für die Grössen $\frac{\partial F}{\partial v_b}$ genau dieselben linearen Gleichungen, die wir in (6_a) für die q_b gehabt haben. Daraus folgt

$$q_b = \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial v_b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Big\} 6_d$$

wo λ ein gemeinsamer Factor ist. Die $(b+1)$ Gleichungen 6_b und 6_d bilden dann ein System von Integralgleichungen, aus denen die $(b+1)$ Unbekannten v_b und λ gefunden werden können.

Ist die Zahl $a+1>b$, so bleibt das System der $(b+1)$ Gleichungen 6_b und 6_d geeignet, die sämmtlichen $(a+1)$ Gleichungen 6_a identisch zu machen, und bildet also das System der Integralgleichungen.

Wenn dagegen $(a+1)<b$ ist, so kann man $(b-a)$ willkürliche Functionen F_c von den Grössen v_b aufstellen mit der Bedingung

$$\left.\begin{aligned} F_c &= C_c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_b &= \sum \left[\lambda_c \cdot \frac{\partial F_c}{\partial v_b}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} 6_e,$$

also im Ganzen $(b+c)$ Gleichungen für die $(b+c)$ Unbekannten v_b und λ_c, welche als Integralgleichungen zu ihrer Bestimmung dienen.

Digitized by Google

Die lebendige Kraft ist:

$$2L = \sum_{\mathfrak{b}} [q_{\mathfrak{b}} \cdot s_{\mathfrak{b}}] = \sigma \cdot \sum_{\mathfrak{c}} \left\{ \lambda_{\mathfrak{c}} \cdot \sum_{\mathfrak{b}} \left[v_{\mathfrak{b}} \cdot \frac{\partial F_{\mathfrak{c}}}{\partial v_{\mathfrak{b}}} \right] \right\},$$

und die zugeleitete Wärme:

$$dQ = \sum_{\mathfrak{b}} \sum_{\mathfrak{c}} \left\{ \lambda_{\mathfrak{c}} \cdot v_{\mathfrak{b}} \cdot \frac{\partial F_{\mathfrak{c}}}{\partial v_{\mathfrak{b}}} \right\} d\sigma.$$

Der einfachste Fall ist der, wo die Functionen $F_{\mathfrak{c}}$ linear angenommen werden. Dann sind ihre Differentialquotienten constante Grössen, die ich mit $m_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$ bezeichnen will. Also

$$q_{\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{c}} [m_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}} \cdot \lambda_{\mathfrak{c}}] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \; 6_{\mathfrak{f}}.$$

Sind keine der Parameter $p_{\mathfrak{c}}$ eliminirt, wie oben in Gleichungen 4 bis $4_{\mathfrak{d}}$, so sind die $q_{\mathfrak{b}}$ lineare Functionen der $s_{\mathfrak{b}}$ oder $\sigma \cdot v_{\mathfrak{b}}$. Nimmt man zu den 6 Gleichungen $6_{\mathfrak{f}}$, dann noch die $\mathfrak{c}$ als linear vorausgesetzten Gleichungen

$$F_{\mathfrak{c}} = C_{\mathfrak{c}},$$

so hat man $(\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$ nicht homogene lineare Gleichungen für die $(\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$ Unbekannten $v_{\mathfrak{b}}$ und $\left(\frac{1}{\sigma} \cdot \lambda_{\mathfrak{c}}\right)$, woraus deren Werthe zu finden sind. Da die Coefficienten der $v_{\mathfrak{b}}$ in den Werthen der $\left(\frac{1}{\sigma} \cdot q_{\mathfrak{b}}\right)$ im Allgemeinen Functionen der $p_{\mathfrak{a}}$ sind, so gilt dies auch für die Werthe der $v_{\mathfrak{b}}$ $\left(\text{beziehlich } \frac{1}{\sigma} \cdot s_{\mathfrak{b}}\right)$ und der $\left(\frac{1}{\sigma} \cdot \lambda_{\mathfrak{c}}\right)$. Das σ kommt aber nicht weiter vor, als in den zuletzt angegebenen Zusammensetzungen, so dass bei constant bleibenden $p_{\mathfrak{a}}$ die sämmtlichen $q_{\mathfrak{b}}$ und $s_{\mathfrak{b}}$ proportional dem Parameter σ wachsen. Bei geänderten Parametern aber ändern sich im Allgemeinen auch die Verhältnisse zwischen den Geschwindigkeiten, wenn $\mathfrak{c}$ mehrere Werthe hat, da die $\lambda_{\mathfrak{c}}$ Functionen der $p_{\mathfrak{a}}$ sind.

Dieselbe Regel gilt überhaupt, so lange nicht Parameter $p_{\mathfrak{a}}$, auf welche keine äusseren Kräfte $P_{\mathfrak{a}}$ wirken, eliminirt sind, und die lebendige Kraft noch durch eine homogene ganze Function zweiten Grades gegeben ist, auch wenn die Functionen $F_{\mathfrak{c}}$ nicht linear sind, weil dann in den Integralgleichungen des Systems das σ nur in der Verbindung $\left(\frac{1}{\sigma} \cdot \lambda_{\mathfrak{c}}\right)$ vorkommt neben den Grössen $v_{\mathfrak{b}}$.

Es trifft diese Regel aber nicht mehr zu, wenn Parameter $p_{\mathfrak{a}}$ eliminirt sind, weil diese nach der Vorbedingung der Elimination durch auf sie wirkende äussere Kräfte nicht mehr constant gehalten werden können.

Digitized by Google

In dem erstgenannten Falle, wo die q_b und s_b, bei constanten Parametern p_a, alle dem σ proportional zunehmen, werden die den einzelnen cyklischen Bewegungen entsprechenden lebendigen Kräfte $q_b\, s_b$ also dem σ^2 proportional ab- und zunehmen. Hr. Clausius hat diese Bedingung schon angegeben,[1] aber ohne den Einfluss der geänderten Parameter zu erwähnen.

Isomore Koppelung nach der lebendigen Kraft. Schliesslich will ich noch die Frage erörtern, unter welchen Bedingungen Systeme, in denen die lebendige Kraft integrirender Nenner ist, so gekoppelt werden können, dass in dem vereinigten Systeme die lebendige Kraft wieder integrirender Nenner ist. Ich bezeichne das eine System mit dem Index 1, das andere mit 2, die Grössen des gekoppelten Systems lasse ich ohne Index. Ich setze also

$$\left.\begin{aligned} dQ_1 &= L_1 \cdot d(\log \sigma_1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dQ_2 &= L_2 \cdot d(\log \sigma_2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dQ &= dQ_1 + dQ_2 = (L_1 + L_2) \cdot d \log \sigma \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} 7.$$

Damit das gekoppelte System die Entropie $\log \sigma$ bekommt, werden σ_1 und σ_2 in einer gewissen Beziehung zu σ stehen müssen, die übrigens auch durch die Werthe ihrer beiderseitigen Coordinaten p_a beeinflusst sein kann. Wir können sie also als Function von den p_a und σ betrachten. Dann ergeben die Gleichungen 7 das System der Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} L_1 \cdot \frac{\partial}{\partial p_a} \log\left(\frac{\sigma_1}{\sigma}\right) + L_2 \cdot \frac{\partial}{\partial p_a} \log\left(\frac{\sigma_2}{\sigma}\right) &= 0 \ldots\ldots\ldots \\ L_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \sigma} \log\left(\frac{\sigma_1}{\sigma}\right) + L_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \sigma} \log\left(\frac{\sigma_2}{\sigma}\right) &= 0 \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} 7_a.$$

Daraus folgt, wie aus dem entsprechenden System der Gleichungen 6_c, dass eine Gleichung

$$F = C$$

bestehen muss, worin F eine Function von $\nu_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma}$ und $\nu_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma}$ ist. Dann wird

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial \nu_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_2 &= \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial \nu_2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} 7_b.$$

Also wird die Bedingung der Koppelung geschrieben werden können:

$$\frac{L_1}{\frac{\partial F}{\partial \nu_1}} = \frac{L_2}{\frac{\partial F}{\partial \nu_2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 7_c.$$

[1] Poggendorff's Annalen Bd. 142. S. 458.

Digitized by Google

Die Art dieser Bedingung ist denen ganz analog, die innerhalb jedes einzelnen Systems die einzelnen verschiedenen Bewegungen verketten.

Verlangt man nun, dass wie bei dem Wärmeaustausch zwischen gleich temperirten Körpern, die Möglichkeit der Koppelung nur von der Gleichheit einer Grösse (Temperatur) abhänge, die nur durch den Zustand jedes einzelnen Körpers bedingt ist: so muss sich erstens aus den Nennern der Gleichung 7_c die Grösse σ wegheben, was nur geschehen kann, wenn die beiden Differentialquotienten von F homogene Functionen von v_1 und v_2 gleichen Grades sind; und es muss zweitens $\frac{\partial F}{\partial v_1}$ nur v_1, und $\frac{\partial F}{\partial v_2}$ nur v_2 enthalten. Dann wird schliesslich die Bedingung der Koppelung

$$\frac{L_1}{a_1 \cdot \sigma_1^n} = \frac{L_2}{a_2 \cdot \sigma_2^n} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \Big\} 7_d.$$

Der Exponent n muss für die ganze Reihe der unter den angegebenen Bedingungen koppelbaren Systeme der gleiche sein. Ist er für einige derselben gleich Null (Wärmebewegung in den Gasen), so muss er für alle gleich Null sein. Dann ist also die Bedingung der Koppelung, dass $\frac{1}{a} \cdot L$ in den gekoppelten Systemen den gleichen Werth behalte.

Für die Systeme mit nur einem q ist

$$L_1 = \tfrac{1}{2} q_1 \cdot s_1.$$

Für $n = 1$, also die Bedingung der Koppelung

$$\frac{q_1}{a_1} = \frac{q_2}{a_2};$$

wie es schon in den oben besprochenen Beispielen angenommen war.

Für die Verbindung der inneren Bewegungen eines Systems mit vielen q_b, erscheinen die Bedingungen, wie oben auseinandergesetzt ist, weniger beschränkt, da keine Möglichkeit der Trennung und Koppelung mit anderen Systemen vorausgesetzt wurde.

Digitized by Google

Digitized by Google

8. Lebende Zitterrochen in Berlin.

Von E. DU BOIS-REYMOND.

(Vorgetragen am 13. März; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XIV]: — ausgegeben am 20. März.)

§. I. *Einleitung.*

Unter den scheinbar günstigsten Bedingungen, unmittelbar an der Küste, gelang es früher nicht, Zitterrochen in der Gefangenschaft über einige Tage am Leben zu erhalten. Darauf gründete sich die von FARADAY vor fünfundvierzig Jahren geäusserte Meinung, dass in gewisser Hinsicht der Zitteraal für Untersuchung der elektrischen Fische mehr als der Zitterroche sich eigne;[1] ein Ausspruch, dem ich mich noch viel später, indem ich zugleich den Zitterwels über den Zitteraal stellte, mit den Worten anschloss: »der Zitterroche kommt als Seebewohner nicht in Betracht«.[2] Diese Sachlage hat sich jetzt sehr geändert.

Nicht allein ist die Kunst, Seethiere zu halten, in den während der letzten Jahrzehnde entstandenen Aquarien so weit gediehen, dass es keine Schwierigkeit mehr hat, Zitterrochen so lange wie irgend nöthig lebend aufzubewahren, sondern diese Kunst erstreckt sich auch auf den Eisenbahntransport, und ermöglicht es, die Bewohner des Weltmeers ungefährdet in's Binnenland zu versetzen. Als ich obige Worte schrieb, im März 1877, verfügte schon Hr. RANVIER in Paris über lebende Zitterrochen aus Concarneau am atlantischen Ocean.[3] Doch fehlten merkwürdigerweise auf der Ausstellung in den Elysaeischen Feldern, wie auch meines Wissens in München und in Wien, diese, wie GEORGE WILSON sie nannte,[4] ältesten aller elektrischen Maschinen; höchstens dass das Modell einer unterseeischen Mine an ihr Vorbild, die Torpedo, erinnerte.

[1] Notice of the character and direction of the electric force of the Gymnotus (1838). In: Experimental Researches in Electricity. Reprinted from the Philosophical Transactions etc. vol. II. 1844. p. 2. No. 1752.

[2] E. DU BOIS-REYMOND, Gesammelte Abhandlungen zur allgemeinen Muskel- und Nervenphysik (In der Folge nur als 'Gesammelte Abhandlungen u. s. w.' angeführt). Bd. II. Leipzig 1877. S. 611.

[3] Leçons sur l'Histologie du Système nerveux. Paris 1878. t. II. p. 88.

[4] The Edinburgh New Philosophical Journal. New Series. October 1857. p. 267.

Digitized by Google

Das Berliner Aquarium erhielt zuerst im Sommer 1881 Zitterrochen aus Triest. Der Director des Aquariums, Hr. Dr. Otto Hermes, der die reichen Hülfsmittel der Anstalt auf das Freigebigste und Liebenswürdigste jedem wissenschaftlichen Zwecke dienstbar macht, gestattete mir schon damals, einige Versuche anzustellen. Dabei beschränkte ich mich natürlich auf solche Maassnahmen, welche den zur Schau bestimmten Thieren nicht schaden konnten. Ich habe früher wiederholt auseinandergesetzt, weshalb unter diesen Umständen der Besitz lebender elektrischer Fische nicht so fruchtbringend ist, wie man sich vorzustellen pflegt.[1] Allein Hr. Dr. Hermes hat neuerlich die ausserordentliche Güte gehabt zu veranstalten, dass das physiologische Institut durch das Aquarium von Triest aus mit Zitterrochen versehen werde, an denen ich nach Belieben experimentiren, und die ich nach Gutdünken opfern darf. Es bedarf kaum der Bemerkung, eine wie günstige Aussicht sich damit der Lehre von den elektrischen Fischen, also mittelbar der allgemeinen Muskel- und Nervenphysik, eröffnet. Eine Torpedo zu freier Verfügung in einem deutschen physiologischen Laboratorium kann für den Fortschritt unseres Wissens möglicherweise mehr leisten, als (um in Shylock's Weise zu reden) ein ganzer Meerbusen voll Zitterrochen da, wo man erst eine Bussole aufstellen muss, und wo wegen Eines zu Hause gelassenen oder auf der Reise zerbrochenen Apparates vielleicht der schönste Versuchsplan zu nichte wird.

So habe ich denn schon im vorigen Sommer zwei, in diesem Winter drei Zitterrochen hier verarbeitet und daran mehrere Fragen beantwortet, die mir längst vorschwebten, wie auch die Erforschung der secundär-elektromotorischen Wirkungen des elektrischen Organes begonnen.[2] Obwohl letztere Versuche nicht entfernt abgeschlossen sind, will ich die gewonnenen Ergebnisse doch schon veröffentlichen, weil sie auch in ihrem jetzigen Zustand eine wichtige Ergänzung meiner vorjährigen Mittheilung über secundär-elektromotorische Erscheinungen bilden, und weil selbst das sehr geringe Maass der Vollendung, welches ich den entsprechenden Versuchen an Muskeln und Nerven zu ertheilen vermochte, aus später erhellenden Gründen hier doch unerreichbar erscheint (s. unten S. 212).

---

[1] Monatsberichte der Akademie. 1858. S. 94; — Gesammelte Abhandlungen u. s. w. A. a. O. S. 612; — Archiv für Physiologie. 1877. S. 86; — Dr. Carl Sachs' Untersuchungen am Zitteraal ... bearbeitet von E. du Bois-Reymond u. s. w. Leipzig 1881. S. 82. 115. (In der Folge im Gegensatz zu den 'Untersuchungen über thierische Elektricität' immer nur als 'Untersuchungen u. s. w.' schlechthin angeführt.)

[2] Über secundär-elektromotorische Erscheinungen an Muskeln, Nerven und elektrischen Organen. In diesen Berichten, 5. April 1883, S. 343—404.

Digitized by Google

Die Zitterrochen gehörten sämmtlich der Species *T. marmorata* an. Der kleinste war 25, der grösste 36^{cm} lang. Letzteres ist für einen europäischen Zitterrochen eine gute mittlere Grösse.

§. II. *Allgemeine Bemerkungen über die Versuche am Zitterrochen.*

Die Überführung lebender Zitterrochen von Triest nach Berlin ist natürlich nicht bei jeder Witterung gleich gut möglich. Nicht bloss Frost hindert sie, auch Sommerhitze wird leicht den Thieren verderblich. Daher die Zeit des Jahres, innerhalb deren der Transport mit Aussicht auf Erfolg unternommen werden kann, auf die Monate April, Mai, September und October sich beschränkt.

Das physiologische Institut der Berliner Universität besitzt zwar sein eigenes, vollständig eingerichtetes Aquarium, doch zog ich vor, von dem Anerbieten des Hrn. Dr. Hermes Gebrauch zu machen, die Rochen, wenn wir ihrer nicht bedürfen, in den Becken des nur wenige Minuten vom Institut entfernten Berliner Aquariums zu beherbergen. Hier scheinen sie sich, einmal gut angelangt und in Ruhe gelassen, mindestens sechs Wochen lang gesund und hinlänglich bei Kräften zu erhalten. Nach dieser Frist starben einige Thiere, die ich aus Mangel an Musse nicht hatte rechtzeitig zu Versuchen verwenden können. Andere lebten mehrere Monate lang, im Winter bei einer Temperatur des Seewassers von nur etwa 12° C.[1] Nach Aussage des Wärters wühlen sich die Rochen, so lange sie gesund sind, in den Kies am Boden des Beckens ein, und sind dann schwer vom Grunde zu unterscheiden.[2] Um andere darin befindliche Fische kümmern sie sich nicht. Von den zerstückten Fischen, welche man als Futter in das Becken wirft, sah man sie bisher nichts fressen. In der Freiheit verschlingen die Zitterrochen, wie Hr. Prof. Fritsch durch Untersuchung

[1] Vergl. meine Bemerkungen über die Temperatur, in der wechselwarme Thiere zu halten sind, in den 'Gesammelten Abhandlungen u. s. w.', Bd. II. S. 605. 606, und in den 'Untersuchungen u. s. w.', S. 77.

[2] Schon Réaumur und Walsh berichten, dass die Zitterrochen bei der Ebbe durch Schlagen mit den Brustflossen sich in den Sand wühlen, da es dann vorkommt, dass Fischer nackten Fusses auf sie treten, und hinstürzen (Untersuchungen u. s. w. S. 132). — Hier sei ein mir von Ehrenberg erzähltes Torpedo-Abenteuer aufbewahrt, welches einen Begriff von der Gewalt des Zitterrochen im Rothen Meere (wahrscheinlich *T. panthera*) giebt. Er war mit seinem arabischen Diener auf einem Korallenriff weit und tief in die See hinausgewatet. Plötzlich schrie der Mann auf, ein Hai habe ihm den Fuss abgebissen, strauchelte, und war nahe daran unterzugehen. Mit dem raschen Scharfblick des Naturforschers konnte Ehrenberg ihm sogleich beruhigend zurufen: »Fürchte nicht, es steigt kein Blut in die Höhe, du hast noch deinen Fuss, »und hattest nur auf einen Raâd getreten«.

Digitized by Google

des Mageninhaltes feststellte, unverhältnissmässig grosse Fische, welche sie wohl vorher durch elektrische Schläge lähmen.[1] Ihnen in der Gefangenschaft lebende kleine Seefische zu verschaffen, ist aber natürlich nicht leicht.

An den Versuchstagen wurde der Fisch mit einem Kesser aus dem Becken des Aquariums in einen Zuber voll Seewasser von solcher Grösse gebracht, dass zwei Männer ihn bequem trugen. Mit dem Kesser wurde er auch aus dem Zuber in die gleich zu erwähnende Versuchswanne übertragen. Das Fangen mit dem Kesser ging nicht ohne heftiges Sträuben ab, und unstreitig schlug der Fisch dabei wiederholt, wie die Zitterwelse nach Aussage des Froschweckers es zu thun pflegen.[2] Gelegentlich versuchte ich hier dasselbe zu beobachten; der Froschwecker blieb aber stumm, wohl wegen zu guter Nebenleitung durch das Seewasser (s. unten S. 191. 203).

Befand sich der Fisch einmal im Zuber oder in der Versuchswanne, so hielt er sich meist vollkommen ruhig, ohne andere sichtbare Bewegung als die an den Spritzlöchern. Wurde er nach einer längeren quälenden Versuchsreihe in den Zuber zurückgethan, so schwamm er manchmal wild umher, auch sah man ihn wohl bemüht, durch eigenthümliche undulirende Bewegungen seiner Körperscheibe die Wand des Zubers zu erklimmen.

§. III. *Von der Ableitung von Zitterfisch-Schlägen in einen Versuchskreis.*

Versuchskreis nenne ich bei Zitterfisch-Versuchen nach früherer Übereinkunft die irgendwie beschaffene, auch unterbrochene Leitung, in welche der Schlag des Fisches zur Prüfung irgend einer seiner Wirkungen abgeleitet wird.[3] Diese Ableitung so günstig wie möglich zu gestalten, ist bei diesen Versuchen natürlich eine der ersten Aufgaben. An dem aus dem Wasser genommenen Thier hat dies keine Schwierigkeit. Aber auch wenn man über das Leben der Thiere frei verfügt, wird man es nicht gern jedes einzelnen Versuches wegen

[1] Diese Berichte, 1883. Bd. I. S. 205; — Die elektrischen Fische im Lichte der Descendenzlehre. In Virchow's und v. Holtzendorff's Sammlung gemeinverständlicher wissenschaftlicher Vorträge. 1884. XVIII. Serie. Heft 430/31. S. 34. — Auch die Zitteraale sind nach Sachs sehr gefrässig (Untersuchungen u. s. w. S. 109. 110).

[2] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. A. a. O. S. 615. 617; — Untersuchungen u. s. w. S. 142. 143.

[3] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 612; — Untersuchungen u. s. w. S. 136.

Digitized by Google

nutzlos auf das Spiel setzen; ohnehin sind aus dem Wasser genommene Fische meist so unruhig, dass sich schlecht daran experimentirt. Es handelt sich also darum, obige Aufgabe auch an dem noch im Wasser befindlichen Thiere zu lösen.

Faraday hat sich bei seinen Versuchen am Zitteraal zuerst eigener, ständiger Vorrichtungen zu diesem Zwecke bedient. Er setzte dem Fisch zwei aussen mit Kautschuk überzogene Sättel aus Kupferblech auf. Je weiter von einander die Sättel, um so stärker war der abgeleitete Stromzweig. Wurden besonders kräftige Wirkungen erfordert, so legte Faraday auf den Boden des Troges Glasplatten, denen der Kautschukrand der Sättel sich anschloss, da dann die vom Sattel umfasste Strecke des Fisches fast so gut isolirt war wie an der Luft.[1] An Isolirung des Fisches zwischen den Sätteln scheint Faraday nicht gedacht zu haben, auch würde es kaum gelingen, dem langgestreckten, sich schlängelnden Fisch einen das ganze Thier einschliessenden Deckel aufzusetzen. Bei der grossen Macht des Zitteraal-Schlages genügte übrigens Faraday's Vorrichtung für fast alle Zwecke, nur der Entladungsfunken war damit schwer zu erhalten.[2] Ich hatte daher auch Dr. Sachs keine andere Anordnung zur Ableitung des Schlages empfohlen, und Fig. 1 zeigt einen der von ihm angewandten Sättel, die sich von Faraday's Sätteln nur in einem unwesentlichen Punkt unterscheiden: statt aus mit Kautschuk aussen überzogenem Kupferblech bestehen sie, nach Art der von mir für die Zitterwelse verfertigten Ableitungsdeckel, aus innen mit Stanniol gefütterter Guttapercha. Man erkennt links den (lackirten) Stanniolstreif, der die Belegung mit dem ableitenden Drahte verbindet.[3]

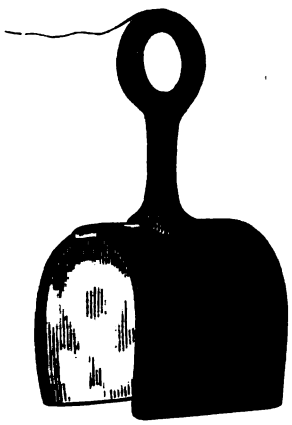


Fig. 1.

An den kleinen und vergleichsweise schwachen Zitterwelsen konnte ich mich nicht mit den, den Enden des Organs angelegten Sätteln begnügen, sondern ich musste darauf bedacht sein, den Fisch auch zwischen den Sätteln vom Wasser zu isoliren, was sich hier unschwer thun liess. So entstanden die Mumiensargdeckeln ähnlichen, an beiden Enden mit Stanniol gefütterten Ableitungsdeckel aus Guttapercha, wie man einen in Fig. 2 sieht[4], und wie ich sie eigens für jeden Fisch

[1] L. c. p. 5. No. 1758—1760.

[2] L. c. p. 7. No. 1767. Note 2; — Vergl. Untersuchungen u. s. w. S. 158.

[3] Der Holzschnitt ist den 'Untersuchungen u. s. w.', S. 154. 155. Fig. 43, entlehnt.

[4] Der Holzschnitt ist den 'Gesammelten Abhandlungen u. s. w.', Bd. II. S. 614. Fig. 42, entlehnt.

Digitized by Google

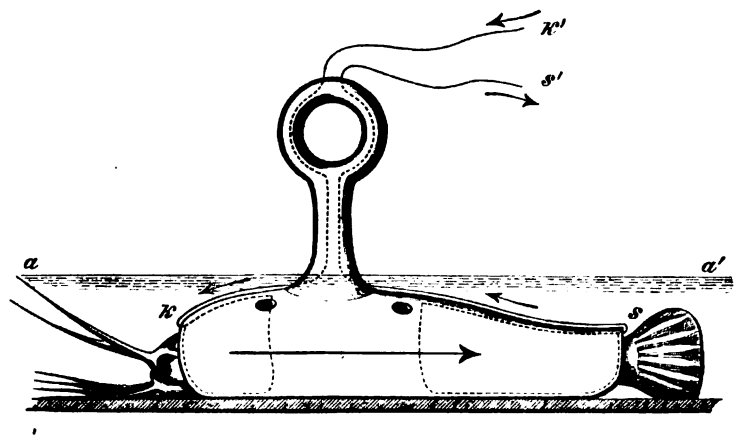


Fig. 2.

über einem nach seinem Maasse geschnitzten Leisten herstellte. Beim Gebrauch der Deckel lag eine Spiegelplatte am Boden der Versuchswanne, und es war nur so viel Wasser darin, dass dessen (in der Figur der Deutlichkeit halber zu hoch gezeichneter) Spiegel aa' den Rücken des auf der Platte ruhenden Fisches tangirte. Ich bewies, dass die den Fisch zwischen den Stanniolbelegen vom Wasser isolirende Guttapercha den Schlag im Versuchskreise mehr als verdoppelte. Die Isolation war so vollkommen, dass zuweilen der Froschwecker versagte, dessen Elektroden an zwei diametral entgegengesetzten Punkten des Umfanges der Versuchswanne eintauchten, und sie wäre noch vollkommener gewesen, wenn ich auch die hintere Öffnung der Deckel mit einer die Schwanzflosse überwölbenden Kappe verschlossen hätte.

Bei Anfertigung dieser Deckel bot sich das Problem, den Belegen die Länge zu ertheilen, welche den stärksten Strom im Versuchskreise giebt. Bei grösserem Widerstand des Kreises fand ich einen längeren, bei kleinerem einen kürzeren Beleg vortheilhafter.[1] So hatte ich es erwartet, und dass dem so sein müsse, sieht man folgendermaassen ein.

Die Fortsetzungen kk_1, ss_1 der Belege in Fig. 2 kann man als Enden des Versuchskreises auffassen, welche die Belege ableitend berühren. Nach dem Helmholtz'schen 'Principe von der elektromotorischen Oberfläche'[2] ist die Stärke des Stromes im Versuchskreise gleich dem Potentialunterschied der Punkte der Belege, welche seine Enden berühren, dividirt durch den Widerstand des Versuchskreises + dem des Organes, des Fisches, des umgebenden Wassers u. s. w. zwischen jenen Punkten. Die Belege stellen nämlich nicht bloss Ab-

[1] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 636. 637.

[2] Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie, 1853. Bd. LXXXIX. S. 211 ff.

Digitized by Google

leitungen von den Enden des Organes vor, sondern, sofern sie längs dessen Seitenflächen sich erstrecken, auch vergleichsweise gute Schliessungen zwischen den Enden und den Seitenflächen. Indem durch diese Schliessungen ein Theil des Schlages sich abgleicht, wird der Potentialunterschied der Enden herabgesetzt um so mehr, je kleiner der Abstand der Belege. Der Potentialunterschied der Enden des Versuchskreises wird also um so kleiner, je länger die Belege. Übrigens wird er nicht ganz unabhängig sein von der Lage der Punkte auf den Belegen, welche die Enden des Versuchskreises ableitend berühren; denn da die Belege selber von den Enden des Organes nach ihren einander zugekehrten Rändern zu durchströmt sind, stuft sich in ihnen das Potential in derselben Richtung ab. Danach wird die aus constructiven Gründen an den Ableitungsdeckeln für den Zitterwels gewählte Anordnung, wobei die Enden des Versuchskreises beziehlich mit dem vorderen Rand des vorderen und dem hinteren Rand des hinteren Beleges verschmelzen, auch theoretisch die richtigste sein, doch ist in der Praxis der Unterschied schwerlich von Belang.

Was den Widerstand des Organes, des Fisches u. s. w. zwischen den ableitend berührten Punkten der Belege betrifft, so ist er nach den Helmholtz'schen Gesetzen derselbe, welchen die leitende Masse einem Strom entgegensetzen würde, den eine im Versuchskreise wirksame elektromotorische Kraft hervorbrächte. In Bezug auf solchen Strom aber stellen nach bekannten Grundsätzen[1] die Belege isoëlektrische Flächen dar. Jener Widerstand wird also um so grösser sein, je kürzer, um so kleiner, je länger die Belege, da deren Ausdehnung den Querschnitt des feuchten an der Grenze des metallischen Leiters bestimmt.

Nennt man P_l, P_k die Potentialunterschiede der Enden des Versuchskreises beziehlich bei langem und bei kurzem Belege, den entsprechenden Widerstand zwischen den Belegen W_l, W_k, den grossen Widerstand im Versuchskreise R, den kleinen r, so bestehen erfahrungsmässig zusammen die Ungleichheiten

$$\frac{P_k}{W_k+R} > \frac{P_l}{W_l+R}, \quad \frac{P_l}{W_l+r} > \frac{P_k}{W_k+r}.$$

Dies setzt voraus, dass auch die Ungleichheiten $P_k > P_l$, $R > r$ erfüllt sind, und da, wie wir sahen, letzteres erwiesen ist, so ist das beobachtete Verhalten erklärt. Der durch den Versuchskreis sich ergiessende Strom setzt sich dabei in jedem Punkte der leitenden Masse zwischen

[1] G. S. Ohm, die galvanische Kette mathematisch bearbeitet. Berlin 1827. S. 128; — G. Kirchhoff in Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie, 1843. Bd. LXIV. S. 500. Anm. 2.

Digitized by Google

den Belegen nach dem Parallelepiped der Kräfte zusammen mit dem Strom, welcher ohne den Versuchskreis in demselben Punkte stattfände.[1] Eine vollständige Theorie hätte hier noch die Induction und die mannigfachen Polarisationen zu berücksichtigen, doch kann dadurch an der Hauptsache kaum etwas geändert werden.

§. IV. *Von der Ableitung des Zitterrochen-Schlages in einen Versuchskreis.*

Bei der Bemühung, nach denselben Grundsätzen auch am Zitterrochen möglichst zweckmässige Ableitung des Schlages zu bewirken, stösst man auf Schwierigkeiten. Man müsste Rücken- und Bauchfläche jedes Organes mit einem metallischen Beleg überziehen, und diese Belege von ihren medialen Rändern ableiten, welche aus Gründen, auf die wir noch zurückkommen, am Rücken die positivsten, am Bauche die negativsten Stellen sind (s. unten S. 196). Befindet sich der Fisch an der Luft, so steht solcher Ableitung nichts im Wege, und Boll, der seine Rochen ohne Weiteres aufnagelte, hatte sich, nach dem Vorbild meiner Ableitungsdeckel am Zitterwelse, mit Stanniol gefütterte Guttaperchaplatten verfertigt, die sich einerseits der Rücken-, andererseits der Bauchfläche eines Organes möglichst genau anschlossen.[2] Soll aber der Fisch im Wasser bleiben, so ist es keine leichte Aufgabe, der Bauchfläche der Organe Platten anzulegen. Noch grösser ist die Schwierigkeit, zugleich den übrigen Fisch zu isoliren, was die Leitungsgüte des Seewassers[3] hier doch gerade recht wünschenswerth macht. An einem gegebenen Fisch liesse sich dies Alles erreichen, wenn man den Fisch in der Versuchswanne auf eine seine Körperscheibe überragende Guttaperchaplatte lagerte, welche den Organen entsprechend mit zwei Belegen versehen wäre, deren mediale Ränder mit dem einen Ende des Versuchskreises sich verbänden; während dem Rücken des Fisches eine nach dessen Wölbung gebogene Guttaperchaplatte aufgesetzt würde, welche zwei ebenso gelegene und abgeleitete Belege trüge, die Schwanzwurzel frei liesse,

---

[1] Vergl. Helmholtz, a. a. O. S. 219. — In den 'Gesammelten Abhandlungen' gab ich (a. a. O.) von der verschiedenen Wirkung der langen und der kurzen Belege eine weniger durchdachte Erklärung, in welcher der nicht hinlänglich bestimmte Begriff einer 'mittleren Spannung der Belege' vorkam. An die Stelle dieser Erklärung hat die hier gegebene zu treten.

[2] Reichert's und du Bois-Reymond's Archiv für Anatomie und Physiologie. 1873. S. 78.

[3] Vergl. Arthur Christiani, in den 'Untersuchungen u. s. w.' S. 411 ff.

Digitized by Google

und sonst überall am Umfang der Körperscheibe sich der unteren Platte anschlösse. Allein in der Ausführung stellt sich dieser theoretisch untadelhafte Plan als wenig tauglich heraus. Der Fisch bleibt auf der unteren Platte nicht so liegen, wie er sollte; das Herstellen der oberen Platte ist bei ihrer Ausdehnung, doppelten Krümmung, geringen Wölbung sehr schwierig; sie wirft sich, so dass ihr windschiefer, welliger Rand sich der unteren Platte nur schlecht anschliesst; endlich da es sich nicht, wie einst an meinen Zitterwelsen, darum handelt, an Einem am Leben zu erhaltenden Exemplar möglichst lange experimentiren zu können, ist ein nur einem bestimmten Thier angepasster Apparat nicht einmal von grossem Nutzen. Ich blieb deshalb bei der weniger rationellen, aber viel einfacheren und schliesslich genügenden Anordnung stehen, die man in Fig. 3 schematisch abgebildet sieht.

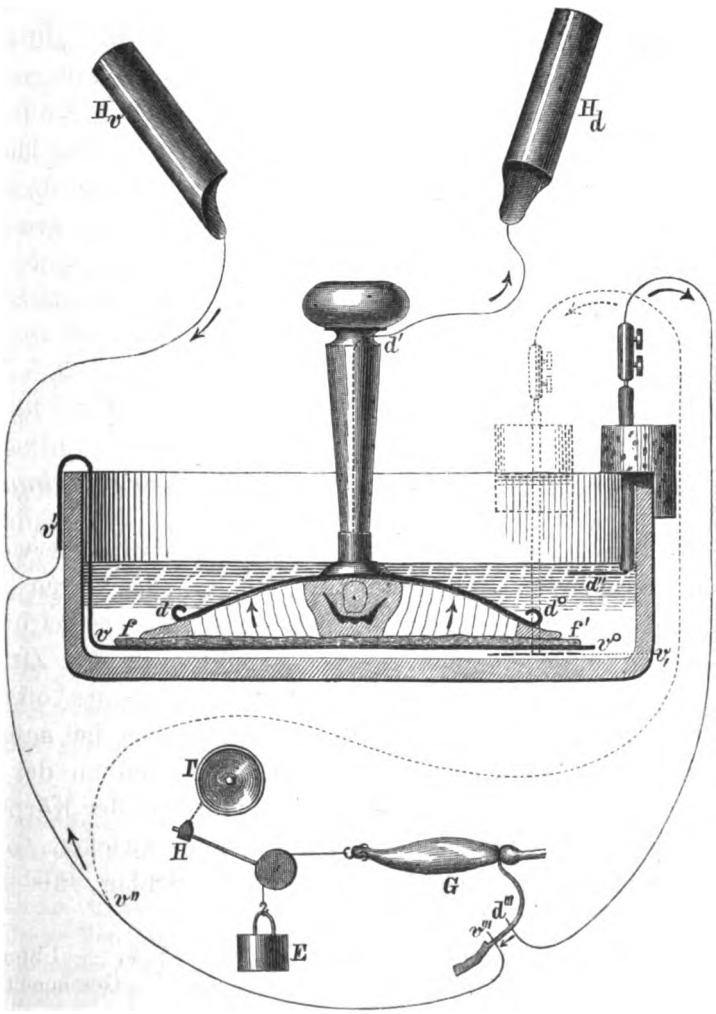


Fig. 3.

Digitized by Google

Als Versuchswanne diente ein flach cylindrischer Glashafen von 30^{cm} Durchmesser und 10^{cm} Tiefe. Auf seinem Boden lag ein kreisrundes Zinkblech vom ungefähren Durchmesser der Körperscheibe, der Bauchschild $v^{o}v$, welchem ein Streif vv' angebogen war, der hakenförmig über die Wand des Hafens heraushing. Mit diesem Streif verbunden war das eine Ende des Versuchskreises. In der Figur ist angenommen, dass dem menschlichen Körper ein Schlag ertheilt werden solle. Alsdann befanden sich im Versuchskreise zwei Handhaben, zu deren einer, H_v, der Draht $v'H_v$ führt. Den Bauchschild bedeckt ein gleich grosses mit Seewasser getränktes kreisförmiges Stück Flanell ff', damit der Rand des dem Fisch aufzusetzenden Rückenschildes $d^{o}d$ nie den Bauchschild berühre, da dann der Erfolg im Versuchskreise so nichtig würde, wie in Humboldt's und Gay-Lussac's Schüsselversuch.[1] Auf dem Flanell liegt der Fisch, den die Figur in einem durch die Organe geführten Querschnitt zeigt. Der Rückenschild ist eine nach der Gestalt des Fisches gebogene Zinkplatte mit umgelegtem Rand, oberhalb lackirt, in der Mitte mit einem Holzgriff, durch welchen der ableitende Draht $d'H_d$ isolirt zur zweiten Handhabe läuft. Der der Medianebene des Fisches entsprechende Durchmesser des Rückenschildes ist roth bezeichnet. Ich hatte für verschieden grosse Zitterrochen zwei verschiedene Rückenschilde, den einen von 22, den anderen von 18^{cm} Durchmesser. Der Hafen enthielt so viel Seewasser, dass dessen Spiegel den Rücken des Fisches tangirte.

§. V. *Trägheit der Zitterrochen in der Berliner Gefangenschaft.*

Das Aufsetzen des Deckels genügte, um die Zitterwelse zum Schlagen zu veranlassen, und wenn sie nicht ermüdet waren, schlugen sie zwei bis dreimal hintereinander;[2] hielt man den Deckel über ihnen fest, noch öfter unter Zappeln bis zur Ermüdung. Die Zitterrochen dagegen liessen sich das Aufsetzen des Rückenschildes oft gefallen, ohne zu reagiren, auch gab es kein sicheres Mittel, sie bei aufgesetztem Schilde zum Schlagen zu bewegen. Sie liessen sich an der Rücken- wie an der Bauchfläche, soweit diese vom Umfange der Körperscheibe her zugänglich war, drücken, reiben, stechen, zwicken, ohne ihre Kraft zu äussern. Selbst dann erfolgte kein Schlag, als ich einer

[1] Gilbert's Annalen der Physik. 1806. Bd. XXII. S. 8; — Untersuchungen über thierische Elektricität. Bd. II. Abth. I. S. 15. 105; — Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 695.

[2] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 617. 618.

Digitized by Google

aus dem Wasser ragenden Hautstelle die mit der ganz aufgeschobenen secundären Rolle des Schlitteninductoriums verbundenen DUCHENNE'schen Pinsel anlegte, obschon der Gastroknemius im Froschwecker tetanisirt wurde.

Da die Thiere, an denen ich dies erfuhr, bei weitem nicht so lange gefangen waren und gefastet hatten, wie meine Zitterwelse, so muss man wohl einen Unterschied in der Natur der Zitterrochen und Zitterwelse annehmen. Liest man aber WALSH's, MATTEUCCI's, Hrn. COLLADON's Angaben über die Leistungen ihrer frischgefangenen Zitterrochen,[1] so scheint jener Unterschied in nichts bestehen zu können, als in rascherem Kraftverlust der Zitterrochen, und in der That berichten auch MATTEUCCI und BOLL, dass »die Energie der »elektrischen Organe in der Gefangenschaft sehr schnell abnimmt.«[2]

Je ungewisser es danach im einzelnen Versuche blieb, ob der Fisch geschlagen habe oder nicht, um so wünschenswerther war es hier, durch den Froschwecker Gewissheit darüber zu erhalten. Fig. 3 zeigt, wie ich ihn mit dem Fisch zu verbinden pflegte. Man erkennt leicht das gewohnte Schema, den Gastroknemius G, die Glocke Γ, den Hammer H, den Schroteimer E. Die eine Ringelektrode v''' der (in der Figur fortgelassenen) Reizungsröhre hing durch den Draht $v''v'$ mit dem Bauchschilde zusammen, zur anderen, d''', führte der Draht $d'''d''$ von einer kreisrunden 3^{cm} im Durchmesser haltenden Zinkplatte d'', welche vom Rande des Hafens wagerecht hinabhängend in das Seewasser gerade eintauchte, und für den Froschwecker die Rolle des Rückenschildes übernahm. Bei Versuchen, wo kein Bauchschild gebraucht wurde, stand die Ringelektrode v''' mit einer ähnlichen am Boden des Hafens befindlichen (in der Figur punktirten) Zinkplatte v' in Verbindung. So zuverlässig wie am Zitterwelse schien der Froschwecker hier nicht zu arbeiten, woran zum Theil die im Vergleich zum Flusswasser soviel bessere Nebenschliessung durch das Seewasser Schuld war. Übrigens kam es auch besonders an den im Frühjahr hergelangten Zitterrochen vor, dass sie reizbarer waren, und sogar wie die Zitterwelse,[3] nach Aussage des Froschweckers, aus unbekanntem Grunde von selber schlugen.

---

[1] Untersuchungen u. s. w. S. 255; — MATTEUCCI, Traité des Phénomènes électrophysiologiques des Animaux. Paris 1844. p. 145.

[2] Archiv für Anatomie u. s. w. 1873. S. 78. — Im Winter hatte sich Hr. Prof. FRITSCH auch am Mittelmeer über die Trägheit der frischgefangenen Zitterrochen zu beklagen. Diese Berichte, 1882. Bd. I. S. 500.

[3] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 408.

Digitized by Google

§. VI. *Der Zitterrochen-Schlag am Menschen.*

Hat man mit nassen Händen die Handhaben ergriffen, und ein Gehülfe reizt den Fisch mit Erfolg, so erhält man einen Schlag, der zwar nur in den Handgelenken fühlbar aus früher entwickelten Gründen[1] doch eine bessere Vorstellung von dem Phaenomen giebt, als man bei unmittelbarem Anfassen des Thieres sich zu bilden vermag. Ich habe dergestalt in meiner Vorlesung mehreren Studenten, die einander durchfeuchtete Hände reichten, den Schlag ertheilt.

Auffallend war die geringe Stärke der Zitterrochen-Schläge verglichen mit der, mir noch wohl gegenwärtigen, der Zitterwels-Schläge. Da indess bei meiner Art, die ersteren Schläge zu nehmen, deren Stärke unter dem Mangel seitlicher Isolirung, besonders bei der guten Leitung durch das Seewasser, sehr leiden musste, so kann ich diese Wahrnehmung nicht ohne Weiteres für eine Bestätigung von Hrn. Babuchin's sonst ja theoretisch einleuchtender Angabe hinstellen, dass der Zitterwels-Schlag den Zitterrochen-Schlag übertrifft.[2] Der Einfluss der Leitungsgüte des Mittels auf die Stärke des Schlages hat sich deutlich gezeigt in Hrn. Dr. Hermes' Erfahrung mit einem Zitterwelse, der jedesmal dass er (zu einem Heilzweck) in physiologische Chlornatriumlösung gebracht wurde, gerade wie in meinen Versuchen ein Gastroknemius vom Frosch,[3] darin scheinbar sein elektrisches Vermögen einbüsste.[4] Der verstorbene A. v. Bezold, der mir bei den Zitterwels-Versuchen half, schlug vor, zur Verstärkung des Schlages das Flusswasser in der Versuchswanne durch gelüftetes destillirtes Wasser zu ersetzen.[5] Da viele Fische aus der See in die Flüsse steigen, *Narcine brasiliensis* sogar aus dem Manzanares gefischt Humboldt in Cumaná als *Temblador* oder Zitteraal gebracht wurde,[6] könnte man vermuthlich ohne grosse Gefahr einen Zitterrochen auf einige Zeit in Süsswasser versetzen. Ich hätte gern versucht, die dabei zu erwartende Verstärkung des Schlages zu beobachten, wäre es wegen der Trägheit der Zitterrochen nicht überhaupt aussichtslos, vergleichende Versuchsreihen über die Stärke ihres Schlages unter verschiedenen Umständen zu unternehmen.

---

[1] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 619.
[2] Untersuchungen u. s. w. S. 411.
[3] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 379.
[4] Untersuchungen u. s. w. S. 409. 411.
[5] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. S. 613.
[6] Untersuchungen u. s. w. S. 76. 282. 411.

Digitized by Google

§. VII. *Über die Stromvertheilung am Zitterrochen.*

Beistehender Holzschnitt ist die getreue Nachbildung einer Figur von Cavendish, der bei seinem Bestreben, die Wirkungen des Zitterrochen-Schlages durch gemeine Elektricität nachzuahmen, vor mehr als einem Jahrhundert zuerst zur Vorstellung von Stromcurven

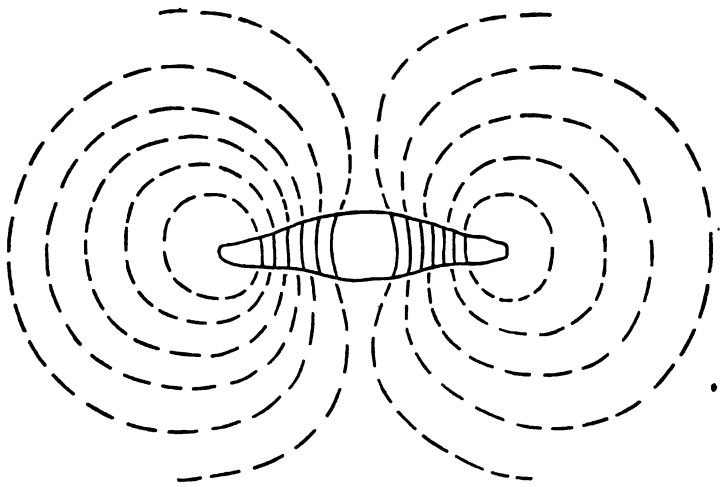


Fig. 4.

kam, und im Verständniss dieses äusseren Vorganges am Thier seiner Zeit so vorauf eilte, dass erst Faraday wieder denselben Standpunkt einnahm. Cavendish versuchte seinen Zweck zu erreichen, indem er an einem ledernen, mit Seewasser getränkten Modell des Fisches die den Polflächen der Organe entsprechenden Stellen mit Zinnfolie überzog und durch isolirte Drähte mit einer Leidener Batterie verband.[1] Er machte so die Polflächen zu isoëlektrischen Flächen; den Verlauf der Stromcurven im Thiere selber liess er unerwähnt, und er konnte auch davon keinen sicheren Begriff sich bilden, da erst siebzig Jahre später durch mich gezeigt wurde, dass die Annahme isolirender Hüllen in den elektrischen Fischen physikalisch so entbehrlich, wie anatomisch unstatthaft sei.[2]

Nach beiden Richtungen können wir heute Cavendish's Figur berichtigen und ergänzen.

Schon 1831 gelangte Hr. Daniel Colladon aus Genf in La Rochelle über die Vertheilung der Elektricität an der Oberfläche des schlagenden Zitterrochen zu folgenden drei Sätzen:

---

[1] The Electrical Researches of the Honourable Henry Cavendish etc. Edited by J. Clerk Maxwell etc. Cambridge 1879. p. 194.

[2] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 678.

Digitized by Google

»1. Alle Punkte des Rückens sind positiv gegen einen beliebigen »Punkt des Bauches. Die Stromstärke nimmt ab in dem Maasse wie »jene Punkte weiter vom Organ liegen; am Schwanz ist sie fast »ganz Null.

»2. Zwei asymmetrische Punkte des Rückens, oder zwei solche »Punkte des Bauches geben fast stets einen Strom am Galvanometer: der »den Organen nähere Punkt ist am Rücken positiv, am Bauche negativ.

»3. Bei Berührung zweier symmetrischen Punkte des Rückens »oder des Bauches erhält man keine Galvanometer-Ablenkung.«

Da Hr. COLLADON der Erste war, welcher den elektrischen Zustand der Rücken- oder der Bauchfläche des Zitterrochen prüfte, nenne ich Ströme zwischen Punkten einer dieser Flächen COLLADON'sche Ströme.

Hrn. COLLADON's Versuche wurden erst 1836 bekannt. MATTEUCCI, der kurz zuvor das Dasein solcher Ströme geläugnet hatte, berichtete das Jahr darauf (ohne Hrn. COLLADON zu erwähnen), dass die den Eintrittsstellen der Nerven entsprechenden Punkte des Organs am Rücken positiv, am Bauche negativ gegen die übrigen seien; eine Angabe, welche mit der damals von ihm erfassten Irrlehre vom Ursprunge der Elektricität im Gehirne des Zitterrochen zusammenhing.[1]

Mir, der ich früh die seitdem durch BILHARZ erkannte elektrische Platte vorgeahnt hatte,[2] lag eine andere Erklärung nahe. Je höher eine Zitterrochen-Säule bei gleicher Plattenzahl in der Längeneinheit ist, um so grösser muss ihre elektromotorische Kraft sein. Die Säulen nehmen von dem medialen Rande des Organes nach dem seitlichen um etwa 0.6 an Höhe ab (s. unten Fig. 5). Um ebensoviel kann die elektromotorische Kraft der medialen Säulen grösser sein als die der seitlichen. Dies erklärt, weshalb man an dem in der Luft befindlichen schlagenden Rochen einen Strom zwischen medialen und seitlichen Punkten erhält, am Rücken von jenen zu diesen, umgekehrt am Bauch. Am eingetauchten Zitterrochen scheint diese Anordnung die zweckmässige Folge zu haben, dass in den von den höheren Säulen ausgehenden Stromcurven ungefähr dieselbe Stromstärke zu Stande kommt, wie in den kürzeren, von den niedrigeren Säulen entspringenden Curven.

---

[1] Die Litteratur und das Nähere hierüber findet sich in den 'Gesammelten Abhandlungen' Bd. II. S. 685 ff. — Ich bemerke erst jetzt, dass der Schlusssatz des §. VI auf S. 690 daselbst in Bezug auf MATTEUCCI's vielfach wechselnde Aussagen eine Ungenauigkeit enthält, an deren Berichtigung, die nicht ohne weitläufige Auseinandersetzung möglich wäre, wohl Niemand mehr gelegen ist.

[2] Vorläufiger Abriss einer Untersuchung über den sogenannten Froschstrom und über die elektromotorischen Fische. POGGENDORFF's Annalen u. s. w. 1843. Bd. LVIII. S. 25. §§. 64. 65; — Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 668. 670; — Untersuchungen u. s. w. S. 284. 285.

Digitized by Google

Da Matteucci seine Meinung allmählich dahin änderte, dass er den Strom am Rücken von den dickeren zu den dünneren Stellen fliessen liess, auch zwischen Rücken und Bauch an den dickeren Stellen einen stärkeren Strom nachwies, als an den dünneren, so hat er sich wohl später (wenn auch ohne mich zu erwähnen), meiner Deutung im 'Vorläufigen Abriss' angeschlossen. Doch blieb ich selber dabei nicht stehen. Wie ich später fand, ging diese Deutung noch nicht auf den Grund. Indem ich nämlich nach Art elektrischer Platten gruppirte Zinkplatin-Elemente plötzlich in Wasser versenkte, ahmte ich, sehr unvollkommen, aber für den Zweck ausreichend, den im Wasser sich ausbreitenden Schlag nach, und prüfte meine Schlüsse über dessen Vertheilung. Ich beschrieb diese Versuche schon früher ausführlich, und kann mich hier darauf beschränken, an deren Ergebniss zu erinnern.

Eine Anordnung elektrischer Platten, welche einer durch zwei Querschnitte begrenzten Scheibe aus dem einen Organ eines Zitterrochen entsprach, in welcher also die Säulen von der einen Seite zur anderen an Gliederzahl abnahmen, lieferte völlig regelmässig Ströme vor der positiven Front[1] von den höheren zu den niedrigeren, vor der negativen Front von den letzteren zu den ersteren Säulen. Aus den Versuchen ergab sich aber, und liess sich auch theoretisch ableiten, dass selbst ohne Unterschied in der Höhe der Säulen Colladon'sche Ströme entstehen. An einem elektrischen Organe von überall gleicher Säulenhöhe, das sich allein in einer unbegrenzten Wassermasse befände, würden die mittleren Bezirke der Polflächen beziehlich am positivsten und negativsten sein. Man stelle sich an den Organen des Zitterrochen alle Säulen gleich hoch, die Organe nach der Medianebene verschoben, und dort miteinander verschmolzen vor. Dann wird die Mitte der Medianlinie am Rücken am positivsten, am Bauch am negativsten sein. Denkt man sich dass die Organe wieder auseinanderweichen, so werden an jedem Organe die positivsten und negativsten Stellen je nach dem Abstand der Organe eine mittlere Lage zwischen dem medialen Rand und der Mitte annehmen, welche letztere sie erst wieder erreichen, wenn die Organe unendlich weit von einander abstehen, d. h. wenn deren jedes wieder als allein vorhanden betrachtet werden kann.

So wird es klar, dass auch ohne die lateralwärts abnehmende Höhe der Säulen am Rücken und Bauch des Zitterrochen Ströme im beobachteten Sinne vorhanden sein würden. Die Verjüngung des

[1] Vergl. Untersuchungen über thierische Elektricität u. s. w. Bd. I. S. 644 ff.; — Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 688 ff.

Digitized by Google

Organes nach der Seite hin wird jedoch zur Folge haben, einmal diese Ströme zu verstärken, zweitens, die Stellen grösster Positivität und Negativität an die medialen Ränder des Organes zu verlegen. In demselben Sinne scheinen noch Neigungsstrom-Spannungen, nach Art der von mir am schrägen Muskelquerschnitt erkannten,[1] wirken zu müssen.

Aus dem Allen ergiebt sich nun aber noch eine andere Folgerung, um welche es mir hier vorzüglich zu thun ist. Wenn die medialen Ränder der Organe am Rücken die positivsten, am Bauch die negativsten Stellen sind, so sind sie also auch beziehlich positiver und negativer als die Medianlinie. Dann muss es am Rücken Ströme geben von jenen Rändern nach dieser Linie, am Bauche von dieser zu jenen. Hrn. Colladon's zweiter Satz und Matteucci's Angabe, dass die Stellen des Nerveneintrittes am Rücken und Bauche beziehlich die positivsten und negativsten seien (s. oben S. 194), lassen sich so deuten, als hätten ihre Urheber solches Verhalten schon beobachtet. Doch ist unwahrscheinlich, dass ihre Mittel dazu reichten, und dass sie etwas so Auffallendes nicht ausdrücklich erwähnt haben sollten. Wie dem auch sei, die Folge wird lehren, dass es sich verlohnte, unsere Schlüsse in diesem Punkt auf die Probe des Versuches zu stellen, und seit Jahrzehnden wartete ich auf die Gelegenheit.[2]

Ein Zitterroche von 29^{cm} Länge lag zuerst auf dem Bauch am Boden des Hafens, der nur so viel Seewasser enthielt, dass sein Rücken eben bedeckt war. Um die Schläge in den Versuchskreis abzuleiten, diente diesmal folgende Vorrichtung. Zweien in Korken eingeklemmten, verquickten Zinkplatten von 10^{cm} Länge und 2.5^{cm} Breite konnte auf die von Nörremberg angegebene Art[3] jede Stellung und jeder nöthige Abstand ertheilt werden. An die Platten waren balkenförmige,[4] gleich breite, mit Zinksulphatlösung getränkte Bäusche, und darüber solche mit Seewasser getränkt, gebunden. Letztere ragten mit einem zugespitzten Theil über die Zinkbäusche fort, und berührten die abzuleitenden Punkte des Fisches. Von den Zinkplatten führten Drähte zur Bussole, an der 5000 Windungen sich in 30^{mm} Abstand von dem eben aperiodischen leichten Magnetspiegel befanden.[5] Wenn der Fisch nicht schlug, wurde der Spiegel nur um wenige Scalentheile abgelenkt. Diese Ungleichartigkeiten wurden mittels des runden Compensators aufgehoben. Der Froschwecker war in Verbin-

[1] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 93—127.
[2] Ebenda, S. 690.
[3] Ebenda, S. 648.
[4] Ebenda, Bd. I. S. 7.
[5] Es war Spiegel I aus meiner ersten Abhandlung 'Über aperiodische Bewegung gedämpfter Magnete.' Ebenda, Bd. I. S. 308. 309.

Digitized by Google

dung mit zwei wagerechten Zinkplatten aufgestellt, deren eine auf dem Boden des Glashafens ruhte, die andere eben in's Wasser tauchte (s. oben S. 191). Ich beobachtete an der Bussole, Hr. Prof. Fritsch, der im Behandeln der Zitterrochen sehr geübt ist, handhabte den Fisch, und Hr. Prof. Christiani beaufsichtigte die übrigen Vorrichtungen.

Wurde die eine Spitze auf den medialen, die andere auf den seitlichen Rand des einen Organs in der dessen Länge etwa hälftenden Querlinie gesetzt, und der Fisch zum Schlagen gereizt, so erfolgte, während meist zugleich der Froschwecker erklang, ein Ausschlag stets im Sinne (durch die Bussole) von dem medialen nach dem seitlichen Rande zu. Die Grösse des Ausschlages war sehr ungleich. Beispielsweise betrug sie an zwei verschiedenen Tagen

rechts 135, links 100;
» 100, » $500 + x^{sc}$,

d. h. im letzten Falle verschwand die Scale aus dem Gesichtsfelde. Diese Unterschiede mochten zum Theil von verschiedenem Widerstande des Kreises herrühren, bedingt durch verschieden starkes Andrücken der Spitzbäusche, zum grössten Theile beruhten sie wohl auf grösserer oder geringerer Anstrengung des Fisches, und bei der aus der Ordnung fallenden Ablenkung über die Grenzen der Scale folgten sich vielleicht mehrere Schläge so dicht, dass sie am Froschwecker verschmolzen.

Blieb nun die eine Spitze auf dem medialen Rande stehen, und wurde die andere der Medianlinie aufgesetzt, so erfolgten Ausschläge stets in der vorhergesehenen Richtung, nämlich vom Rande des Organes zur Medianlinie, und zwar im Betrage von

	rechts	links
1.	30	
2.		15
3.	20	
4.		19^{sc},

also mit aller nur zu erwartenden Regelmässigkeit.

Jetzt wurde der Fisch auf den Rücken gelegt. Seine heftigen Anstrengungen, sich umzukehren, begleiteten, nach Aussage des Froschweckers, zahlreiche Schläge. Als hier die Spitzen einerseits der Medianlinie, andererseits den der medialen Grenze der Organe entsprechenden Kiemenöffnungen aufgesetzt waren, erfolgten beim Schlagen

rechts 160, links 70^{sc}

im richtigen Sinne, d. h. diesmal von der Medianlinie zum Rande des Organs.

Der Schlag zwischen Rücken und Bauch warf jedesmal die Scale weit aus dem Gesichtsfelde, und bei diesen ersten Versuchen, wo so

Digitized by Google

viel Anderes und Wichtigeres sich zur Beobachtung drängte, wurde die Stärke der Colladon'schen Ströme mit der des Schlages zwischen den Polflächen noch nicht verglichen.

Dagegen unterliess ich nicht, um das Dasein der neuen Ströme vollends sicher zu stellen, den Schlag mehrmals auch von symmetrischen Punkten abzuleiten, erhielt aber ein abweichendes Ergebniss von dem, welches Hrn. Colladon's dritter Satz (s. oben S. 194) erwarten liess, nämlich im Anschluss an die letzten Versuche zwischen zwei nach aussen von den Nasenlöchern gelegenen Punkten der Bauchfläche einen Ausschlag von 160^{sc} von rechts nach links; an einem anderen Versuchstage zwischen den entsprechenden Punkten der Rückenfläche einen Ausschlag von 42^{sc} von links nach rechts, und zwischen zwei symmetrischen Punkten der Körperscheibe einige Centimeter hinter den Organen 29^{sc} in derselben Richtung. Als ich die linke Spitze stehen liess, und die andere auf den hinteren Umfang der linken Brustflosse setzte, erfolgten 230^{sc} in der richtigen Richtung, d. h. von dem den Organen näheren Punkte zu dem davon entfernteren.

Die Wirkungen zwischen symmetrischen Punkten beweisen zunächst nur, dass der Fisch nicht mit beiden Organen gleich stark schlug, und zwar gebrauchte er beidemal, in dem Versuch an der Bauchfläche und in dem an einem späteren Tag angestellten an der Rückenfläche, stärker das linke Organ. Dass Hr. Colladon solche Wirkungen nicht sah, kam vielleicht davon, dass seine äusserst kräftigen Fische ihre beiden Organe gleichmässiger innervirten. Vielleicht dass auch diese Wirkungen sich im Allgemeinen seinen Beobachtungsmitteln entzogen; da dann die neuen von uns erkannten Ströme zwischen Medianlinie und medialem Rand der Organe ihm vollends entgehen mussten.

Die Wichtigkeit letzterer Ströme aber liegt in Folgendem. Gegen meine Lehre von der relativen Immunität der Zitterfische für ihren eigenen Schlag wandte Hr. de Sanctis ein, dass er, die Hand im Leib eines an der Luft befindlichen Zitterrochen, nichts von dessen Schlägen empfand. Er schloss daraus, dass kein in Betracht kommender Theil des Schlages durch den Leib des Fisches gehe, ohne zu bedenken, dass dies bei dem Thier an der Luft der Fall sein könne, für das eingetauchte aber nicht zu gelten brauche. An der Luft muss der Strom, um durch den Leib zu gehen, seinen Weg längs der dünnen, vielleicht halbtrockenen Haut nehmen, und es ist nicht zu verwundern, wenn die Hand im Leibe des Fisches nicht viel davon verspürt.[1] Inzwischen ist es doch unter diesen

[1] Vergl. Untersuchungen u. s. w. S. 128.

Digitized by Google

Umständen Boll am Zitterrochen nach meinem Vorgang am Zitterwelse gelungen, mittels zweier bis auf die Spitzen isolirten Drähte den Schlag im Inneren des Fischleibes nachzuweisen.[1]

Dadurch wird der Beweis nicht entwerthet, der sich hier dafür ergiebt, dass der Zitterrochen-Schlag wirklich den Leib des Fisches durchdringt, ja gerade in Hirn und Rückenmark und den grossen Nervenstämmen die grösste Dichte erlangt. Die Ströme, welche am Rücken von den medialen Rändern der Organe nach der Medianlinie, am Bauche von dieser zu jenen Rändern fliessen, nehmen nothwendig den Weg durch Hirn und Rückenmark, und da dies die kürzeste Bahn zwischen den wirksamsten Theilen beider Organe ist, so giebt es am Zitterrochen keine stärkeren Ströme. Vielmehr bestätigt sich hier wie am Zitterwelse meine Behauptung, dass der Leib des Zitterfisches für die Aufnahme des Schlages den eigenen Organen sich günstiger angelegt findet, als der eines anderen, irgendwie genäherten Thieres.[2]

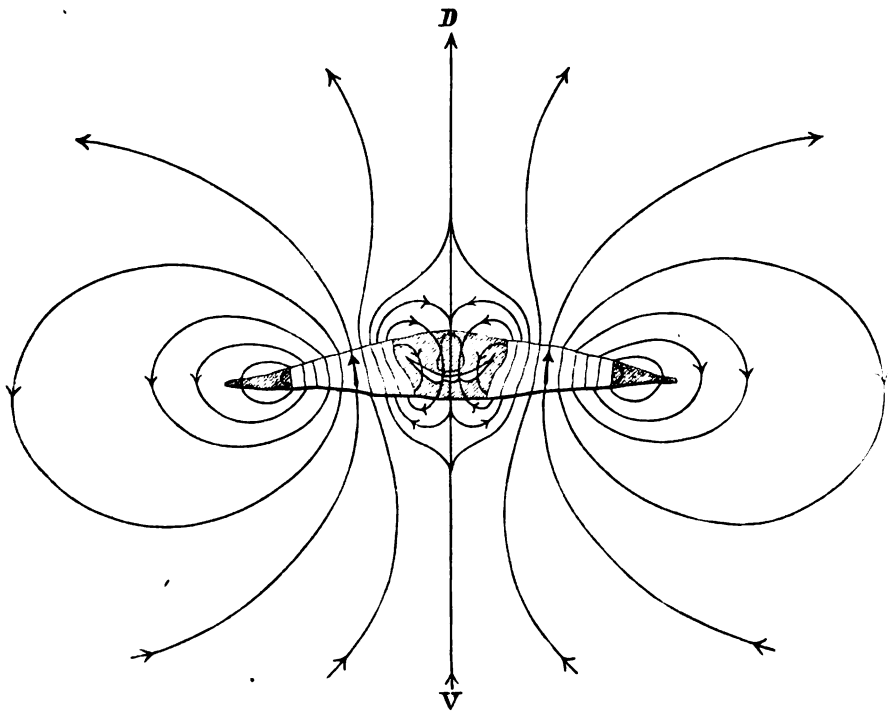


Fig. 5.

Ein Blick auf Fig. 5 macht dies deutlicher, welche nunmehr zeigt, wie wir, an der Hand der gewonnenen Ergebnisse, Cavendish's Dia-

[1] Vergl. Untersuchungen u. s. w. S. 260. 261.

[2] Monatsberichte der Akademie. 1858. S. 107; — Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 638.

Digitized by Google

gramm abzuändern haben. Der dargestellte Querschnitt ist, bis auf die nur schematisch angedeuteten Säulen, strenge nach der Natur gezeichnet. Man sieht zunächst, dass die Stromcurven nicht bloss aus den sogenannten Polflächen ausstrahlen, sondern auch die Seitenflächen der Organe schneiden.[1] Sie verlaufen dann sowohl nach innen wie nach aussen durch den Körper des Fisches, und füllen weiterhin den Raum aus. Aus den Polflächen aber brechen die Curven nicht, wie CAVENDISH sie zeichnete, in der Verlängerung der Axe der Säulen hervor. Sondern die so gerichteten Curven setzen sich nach dem Princip der Superposition der Ströme zusammen mit den Curven, welche von den dickeren zu den dünneren Theilen des Organs, und schon durch diese zur Bauchfläche streben. Daher die in der Figur sichtbare, lateralwärts geneigte Richtung der resultirenden Curven. Es kehrt hier ein Verhältniss wieder, mit dem ich schon einmal, in der 'Experimentalkritik der Entladungshypothese', zu rechnen hatte. Eine als elektrische Platte aufgefasste Nervenendplatte, welche also um so stärker elektromotorisch wirkt, je dicker sie ist, und welche von der Mitte nach dem Rande zu dünner wird, gleicht dem lateralwärts sich verjüngenden Zitterrochen-Organ; und auch dort müssten, wenn es wirklich Nervenendplatten in diesem Sinne gäbe, die Stromcurven schräg aus der einen Fläche aus- und in die andere einstrahlen.[2] Denkt man sich aber einen sagittalen Schnitt durch das eine Zitterrochen-Organ gelegt, so werden, da nach vorn und hinten zu keine mit der transversalen vergleichbare Abnahme der Säulenhöhe stattfindet, die Stromcurven in sagittaler Ebene zunächst in der Richtung der Säulen verlaufen. Das ganze System der Curven könnte nur durch ein Modell versinnlicht werden.

In demselben Sinne, wie die grössere Höhe der medialen Säulen, muss auf die Richtung der Stromcurven am Rücken die in der Figur bemerkbare Neigung der medialen Säulen nach aussen wirken, deren Axe parallel die Elektricität getrieben wird, während am Bauche, wie es in der Figur angedeutet ist, die Neigung der Curven durch denselben Umstand verringert wird. An dem von Hrn. FRITSCH in dem oben S. 184 erwähnten Aufsatze genau abgebildeten Querschnitt eines ganz jungen Zitterrochen ist die Schrägstellung der Säulen viel auffallender. Die Gegend über der Mitte des Fisches wird dadurch scheinbar von dichteren Stromcurven entblösst, und fortificatorisch gesprochen vergleichsweise zu einem todten Winkel. Der teleologische Sinn dieser Einrichtung bleibt dunkel, da bei der Lieblingsstellung des

[1] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 629. 682; — Untersuchungen u. s. w. S. 148.

[2] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 708. Fig. 47.

Digitized by Google

Fisches, wenn er in den Boden eingewühlt ruht, seine Bauchfläche keines, seine Rückenfläche gerade des grössten Schutzes bedürftig erscheint.

§. VIII. *Über die Jodkalium-Elektrolyse durch den Zitterrochen-Schlag.*

Als ich, nach FARADAY's Vorgang am Zitteraale, mich der Jodkalium-Elektrolyse bediente, um auch damit die Richtung des Schlages am Zitterwelse zu bestimmen, stiess ich, wie schon mehrmals erzählt, auf die Erscheinung des secundären Jodfleckes, d. h. ich sah nicht allein unter der positiven, sondern auch unter der negativen Platinspitze einen Fleck entstehen. Ich begriff sofort, dass ich hier denselben Vorgang vor mir hatte, der mir früh entgegengetreten war, als ich das gleiche Mittel anwandte, um in verwickelten Inductionskreisen die Richtung des Stromes zu erkennen.[1] Bei der Zersetzung des Jodkaliums polarisiren sich die Platinspitzen, und wenn, wie bei Inductions-, bei Zitterfisch-Versuchen, der Kreis nicht augenblicklich wieder geöffnet wird, folgt dem primären Strom auf dem Fuss ein secundärer oder Polarisations-Strom in der umgekehrten Richtung, und erzeugt einen Fleck an der erst negativen, nun positiven Spitze. Durch die Wahrnehmung an den Zitterwelsen veranlasst, machte ich die Entstehung des secundären Jodfleckes überhaupt zum Gegenstand einer ausführlichen Untersuchung, von deren Ergebnissen ich hier nur zwei in Erinnerung bringen will. Übersteigt erstens die im primären Strom während der Zeiteinheit sich abgleichende Elektricitätsmenge eine gewisse Grenze, so erscheint kein secundärer Fleck mehr. Dagegen giebt es zweitens Umstände, unter welchen der secundäre Fleck den primären übertrifft, so dass die Jodkalium-Elektrolyse zu einem völlig trügerischen Kennzeichen der ursprünglichen Stromrichtung wird. Dies ist der Fall, wenn man ausser den in die Jodkaliumlösung tauchenden Platinspitzen noch ein Platin-Elektrodenpaar, etwa in verdünnter Schwefelsäure, im Kreise hat.[2]

Die Möglichkeit verdiente Erwägung, ob nicht der doppelte Jodfleck auf Hin- und Hergehen des Fisch-Schlages beruhe, was wichtig gewesen wäre. Mittels des Froschunterbrechers überzeugte ich mich, dass nichts der Art stattfinde. Der secundäre Fleck blieb aus, wenn der Kreis unmittelbar nach dem Schlage, oder gegen dessen Ende

[1] Untersuchungen über thierische Elektricität, Bd. II. Abth. I. 1849. S. 400.
[2] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 648. 666.

Digitized by Google

geöffnet wurde. Übrigens gelang es auch am Zitterwels selber einigemal den secundären Fleck dadurch zum stärkeren zu machen, dass die Ableitung vom Fisch mit Platinelektroden geschah. Somit war die Abhängigkeit des secundären Fleckes von der Polarisation auch hier erwiesen, und in Bezug auf ihn blieb am Zitterwelse kein Dunkel zurück.

Unbegreiflich blieb nur, dass von den Beobachtern, welche am Zitterrochen und Zitteraal unzähligemal vor mir Jodkalium-Elektrolyse vornahmen, keiner den secundären Fleck erwähnte; auch FARADAY nicht, der gerade dieses Mittels sich bedient hatte, um die Vertheilung der Spannungen an seinem Fisch zu studiren. Vielleicht dass am Zitteraale der Schlag schon zu stark ist, um die Bildung des secundären Fleckes zu gestatten. Auf alle Fälle misslang auch SACHS, dem ich die Aufklärung dieses Punktes an's Herz gelegt hatte, die Darstellung des secundären Fleckes am Zitteraale.[1]

Höchst begierig war ich nun zu sehen, was unter meinen Händen der Erfolg am Zitterrochen sein würde. Da zum Versuch nichts gehört als der Jodkalium-Elektrolysator und der Froschwecker, konnte ich ihn durch Hrn. Dr. HERMES' Güte schon im Sommer 1881 im Berliner Aquarium anstellen (s. oben S. 182). Ich habe ihn seitdem oft wiederholt, und ausnahmslos den secundären Fleck, tief schwarz und im Augenblick des Entstehens scharf begrenzt, vor meinen Augen werden sehen, habe auch dasselbe mehreren Beobachtern gezeigt. Die dem Fisch angelegten Elektroden waren zuerst nur ein Paar Zinkplatten, später die oben beschriebenen Bauch- und Rückenschilde. Es versteht sich, dass auf ihre Gleichartigkeit geachtet wurde; die Flecke entstanden immer nur, wenn zugleich der Froschwecker anschlug. Im Allgemeinen schienen mir beide Flecke nicht so stark wie am Zitterwelse. Ich versuchte auch, durch Anwendung von Platinelektroden den secundären Fleck zum grösseren zu machen. Dies gelang nicht, doch wurde er so noch deutlicher zum Vorschein gebracht. Dagegen gelang es leicht, der Bildung des secundären Fleckes mittels des Froschunterbrechers vorzubeugen. 30^{gr} Überlastung verzögerten die Öffnung des Kreises genügend, um noch die Bildung des primären Fleckes in nicht merklich verminderter Grösse, ohne secundären Fleck, zu gestatten; schloss man eine Nebenleitung zum Froschunterbrecher, so war beim nächsten Schlage der secundäre Fleck wieder da.

Was die Sache selber betrifft, ist somit auch am Zitterrochen Alles in Ordnung, und dunkel bleibt schliesslich immer wieder nur,

[1] Untersuchungen u. s. w. S. 163 ff.

Digitized by Google

wie der secundäre Fleck den früheren Beobachtern entgehen konnte, namentlich MATTEUCCI, der ausser den Platinspitzen Platinelektroden zur Ableitung anwandte, wodurch der secundäre Fleck, wenn auch nicht stets zum stärkeren, doch sicher verstärkt wird. Ich kann mir nicht denken, dass die Zitterrochen-Schläge, durch welche JOHN DAVY und MATTEUCCI Jodkalium zersetzten, die kräftigen Schläge meiner Zitterwelse an Stärke dermaassen übertrafen, dass wegen zu grosser darin sich abgleichender Elektricitätsmenge der secundäre Fleck ausblieb (s. oben S. 201). Ebenso unwahrscheinlich ist bei der Empfindlichkeit des Jodkaliums die einzige andere hier noch offene Möglichkeit, deren ich am Schluss der Abhandlung: 'Über Jodkalium-Elektrolyse u. s. w.' schon gedachte, dass in jenen Versuchen, die an dem aus dem Wasser genommenen Zitterrochen angestellt wurden, der Widerstand des Kreises zu gross gewesen sei, in welchem die Polarisation sich abglich. Der Fisch blieb mit gut leitendem Seewasser benetzt; er ist in der Richtung des Stromes kurz und von grossem Querschnitt; seine Gewebe leiten vermuthlich besser als die des Zitterwelses:[1] so dass der Widerstand schwerlich grösser war als in meinen Versuchen am Zitterwelse. Unter diesen Umständen kann ich den Verdacht nicht unterdrücken, dass der secundäre Fleck wohl gesehen, aber als unverständliche Störung beiseite gelassen wurde. Eine Andeutung der Art findet sich bei MATTEUCCI.[2]

Um Andere in Stand zu setzen, meine Versuche in möglichst gleicher Art zu wiederholen, bilde ich schliesslich in Fig. 6 meinen seit langer Zeit bewährten Jodkalium-Elektrolysator ab, als eine meines Erachtens im elektrischen Laboratorium unentbehrliche Vor-

---

[1] Nach Hrn. LÉON FREDERICQ enthält das Blut von Octopus vulgaris und Astacus marinus etwa viermal mehr Salze als das von Säugern, und nach BOLL hat für die Gewebe des Zitterrochen erst eine 2.5-procentige Chlornatriumlösung die 'physiologische' Concentration (Untersuchungen u. s. w. S. 133). Danach leiten die Gewebe von Seethieren wahrscheinlich auch besser. Ich fand noch nicht Zeit, dies am Zitterrochen festzustellen. Jeder andere Seefisch aus dem Aquarium wird dazu ebenso taugen. Mit Rücksicht auf BOLL's Angabe hätte der Thon für die Zitterrochen-Versuche eigentlich mit 2.5-procentiger Lösung, statt wie gewöhnlich mit 0.75-procentiger, angeknetet werden müssen. Doch beobachtete ich Nichts, was als üble Folge dieser Versäumniss sich hätte deuten lassen. Den 118 Analysen von Fischfleisch, welche unlängst Hr. ATWATER aus Middletown (Conn. U. S. A.) in den 'Berichten der Deutschen chemischen Gesellschaft' veröffentlichte (Sechszehnter Jahrgang. No. 12. 23. Juli 1883. S. 1839 ff.), ist eine Überlegenheit der Seefische über die Süsswasserfische hinsichtlich der Asche ihrer Muskeln nicht sicher zu entnehmen, dagegen scheint die Zusammenstellung von Hrn. J. KÖNIG (Die menschlichen Nahrungs- und Genussmittel u. s. w. Berlin 1883. 2. Aufl. S. 179. 180) dafür zu sprechen. Nach Hrn. WEYL liefert das Zitterrochen-Organ 1.55 Procent Asche, etwas mehr als das Muskelfleisch von Flussfischen nach diesen Bestimmungen (Monatsberichte der Akademie. 1881. S. 382).

[2] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 650.

Digitized by Google

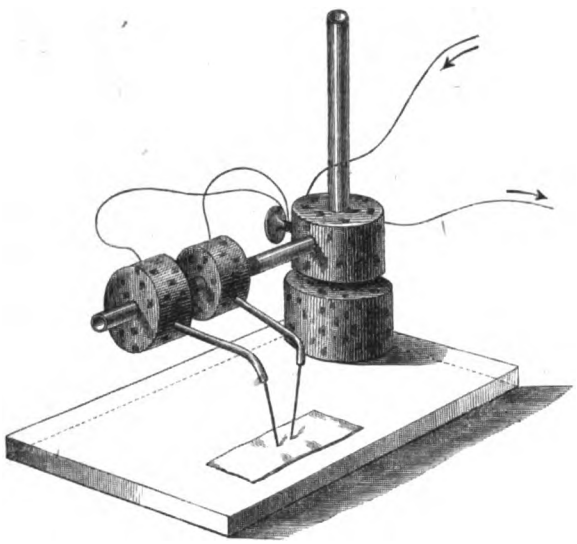


Fig. 6.

richtung, die so leicht zu beschaffen, doch so selten angetroffen wird. Die Beschreibung steht am Eingange der Abhandlung 'Über Jodkalium-Elektrolyse u. s. w.' Hier sei nur noch bemerkt, dass die Spiegelglasplatte 150^{mm} lang und 75^{mm} breit ist; das als senkrechter Ständer dienende Glasrohr ist 150^{mm}, das als wagerechte Axe die Korke tragende, von der Axe des senkrechten Rohres aus gemessen, 125^{mm} lang. Wie ich a. a. O. angab, beobachtet man den secundären Fleck am besten, indem man ihn durch die unter einem passenden Winkel gegen den Horizont eingespannte Glasplatte hindurch von hinten entstehen sieht. Damit das Jodkaliumpapier die Flecke durchscheinen lasse, nimmt man feinstes Fliesspapier in einfacher Lage.

§. IX. *Vom Organstrom am Zitterrochen.*

Unter Organstrom verstehe ich, im Gegensatz zum Schlage, einen durch die Organe in der Regel im Sinne des Schlages dauernd erzeugten Strom, unter Organstromkraft die solchem Strome zu Grunde liegende elektromotorische Kraft. Diese an den Muskeltonus erinnernde Art von Thätigkeit des Organes wurde zuerst von Zantedeschi am Zitterrochen bemerkt, wo sie später Matteucci bestätigte, Hr. Eckhard läugnete. Am Zitterwelse vermisste ich sie. Dagegen behauptet sie Hr. Ch. Robin sogar an dem unvollkommenen elektrischen Organ des gemeinen Rochen, und am Zitteraale bot sie sich Sachs ganz regelmässig dar.[1]

---

[1] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 672. 718. 722. 723. Anm.; — Untersuchungen u. s. w. S. 169. — Wie ich kürzlich fand, schreibt schon Galvani in seinem fünften Brief an Spallanzani dem Zitterrochen eine dauernde elektrische Wirkung zu, welche sich ihm durch Zuckungen von Froschpraeparaten verrieth, die er (in einem Falle an einem Seidenfaden aufgehängt) den Fisch mit den Füssen be-

Digitized by Google

Ich liess mir angelegen sein, die Frage nach dem Dasein eines Organstromes am Zitterrochen wo möglich zu entscheiden. Zu meinen ersten Versuchen der Art diente ein 36^{cm} langer Zitterrochen, der von Ende Mai ab etwa fünf Wochen im Berliner Aquarium gelebt hatte. Damit er vor dem Versuche möglichst wenig durch Schlagen sich ermüde, wurde er folgendermaassen getödtet. Hr. Prof. Fritsch setzte dem ruhig im Zuber liegenden Fisch ein aus einem Stahlrohre von 13^{mm} Durchmesser dazu verfertigtes scharfes Locheisen auf die Stelle der knorpeligen Schädelkapsel, wo er sicher war, die elektrischen Lappen des Gehirnes zu treffen, und stanzte diese Lappen mit einem einzigen Hammerschlag aus, der das Locheisen durch die Dicke des Fisches in den Boden des Zubers trieb. Zum Beweise der gelungenen Operation steckten die Lappen im Locheisen. Der Fisch zuckte noch ziemlich viel, schlug aber nicht mehr. Er wurde aus dem Wasser genommen und mittels eines durch den Rand der Brustflosse gestossenen anatomischen Hakens mit seiner Körperscheibe in senkrechter Ebene aufgehängt. So konnte man der Bauch- und der Rückenfläche mit den oben S. 196 beschriebenen, wagerecht gestellten Bäuschen bequem beikommen. Stets wurden sie so angelegt, dass der eine in der Verlängerung des anderen lag. Die Bussole hatte dieselbe Empfindlichkeit, wie in den Versuchen über die Colladon-schen Ströme.

Mit grosser Regelmässigkeit gab sich ein Strom im Sinne des Schlages zu erkennen. Er war am stärksten, wenn die höchsten Säulen, am medialen Rande des Organes, zwischen den Bäuschen sich befanden, und ward schwächer in dem Maasse, wie die Bäusche dem dünneren seitlichen Rande des Organes sich näherten. Betrug er beispielsweise im ersten Falle 18^{sc}, so sank er in der Mitte des Organs auf 9, am Rand auf 3^{sc}. Auch zwischen den Organen in der Medianebene, und am Rand der Körperscheibe, wo kein Organ mehr liegt, war er in derselben Richtung spurweise vorhanden; was in der Ordnung ist, da der dauernde Strom so gut wie der augenblickliche Schlag durch Haut und Leib des Fisches sich abgleicht, und auf diesem Wege Stromzweige in jede sich darbietende Nebenleitung sendet. Mit anderen Worten, die elektromotorische Oberfläche des nicht schlagenden Fisches unterscheidet sich von der des schlagenden, abgesehen von den kleineren Potentialunterschieden, wahrscheinlich nur durch die den Schlag begleitende Induction. Mit der durch das Auslochen der elektrischen

---

rühren liess (Memorie sulla Elettricità animale . . . al celebre Abate Lazzaro Spallanzani ec. Bologna 1797. 4. p. 75). Doch sind Galvani's Angaben theils anderer Auslegung fähig, theils nicht recht verständlich.

Digitized by Google

Lappen verursachten Wunde hatten die wahrgenommenen Wirkungen nichts zu schaffen.

Es gab noch eine andere Art, den Organstrom zu erforschen. Im Hinblick auf künftige Versuche am Zitterrochen, hatte ich mich seit langer Zeit gesorgt, wie man wohl ein regelmässig begrenztes Bündel von Säulen erhalten könne, um daran zu experimentiren wie am Muskel oder am Zitterwels-Organ. Letzteres ist durch die äussere Haut und die innere Sehnenhaut von Natur so begrenzt, dass man daraus bequem mit der Scheere regelmässige Streife von gegebener Länge und Breite schneiden kann. Dagegen Prismen aus dem Organ von todten Zitterrochen, die ich früher einmal aus Triest kommen liess, zu sanduhrähnlicher Gestalt zerflossen.[1] Schon hatte ich mir allerlei Kunstgriffe ausgedacht, um dieser Schwierigkeit zu begegnen, nach Art von Trepankronen kreisende scharfe Locheisen, mit welchen ich ein cylindrisches Stück Organ ausschneiden, Rinnen aus Glas oder Kammmasse mit verschiebbaren Seitenwänden, in denen ich die Stücke einengen wollte. Als ich endlich im vorigen Sommer mich der Wirklichkeit gegenüber befand, zeigte es sich, dass dies Alles überflüssig war. Mit einem langen, breiten und geraden Messer, einem Schinkenmesser oder englischen Brodmesser, dessen Gebrauch am Zitterrochen ich Hrn. Prof. Fritsch absah, schneidet man vom Organ eine 5—6^{mm} dicke Scheibe, deren Dicke nur wenige Säulen umfasst, und legt sie mit der einen Schnittfläche auf starkes Kartenpapier, dem sie sich fest ansaugt. Von solcher Scheibe kann man dann mit der Scheere, am besten einer nicht sehr scharfen Scheere mit langen Blättern, wie eine Papierscheere, vierseitig prismatische Stücke Organ abschneiden, die, an Rücken und Bauch durch ein quadratisches Stück Haut von 5—6^{mm} Seite begrenzt, aus einer mässigen Anzahl von Säulen bestehen. Man lagert ein solches Stück auf die bekannte dreieckige Glasplatte des allgemeinen Trägers,[2] und indem man den häutigen Grundflächen die Thonschilde der Zuleitungsbäusche anlegt, welchen sie gut anhaften, und die Gefässe sanft auseinanderzieht, streckt man die Säulen zu ihrer vollen Länge gerade aus. In diesem Zustande stellt sich ein gelungenes Praeparat als ein sehr reinliches und zierliches Versuchsobject dar, dessen Länge sich natürlich ausser nach der Grösse des Fisches nach der Stelle des Organes richtet, der es entnommen wurde. Die längsten Säulen, über die ich verfügte, maassen etwa 29^{mm}, waren also kürzer als das Muskelpaar vom Oberschenkel des Frosches. Die Säulenbündel erschienen eher etwas dicker.

---

[1] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 721.

[2] Untersuchungen über thierische Elektricität. Bd. I. 1848. S. 495. 496.

Digitized by Google

Ich stellte mir zuerst vor, dass die das Praeparat begrenzenden Schnitte nicht zwischen, sondern durch die Säulen, bestenfalls ihrer Axe parallel, träfen, so dass die Seitenflächen dicht besetzt seien mit Fetzen elektrischer Platten, die theils nach oben, theils nach unten der Fläche und einander anklebten, oder sich einrollten. Allein die aufmerksamste Betrachtung unter der Lupe in Flüssigkeit liess nichts von diesen Fetzen erkennen. Vielmehr scheinen die Säulen sich vor den Blättern der Scheere mit unversehrter fibröser Hülle von einander zu trennen. Es kommt freilich oft vor, dass von einer Säule nur der obere, untere oder mittlere Theil dem Bündel anhängt, meist aber kann man solche Verunreinigungen leicht entfernen. Übrigens würden die vermutheten Fetzen von Platten wegen ihrer Verlagerung und Verletzung wohl nicht mehr merklich oder wenigstens nicht lange mehr elektromotorisch wirken, und nur als Nebenschliessung könnten sie in Betracht kommen.

Solcher Säulenbündel werden wir uns zu den Versuchen über Polarisation des Organes bedienen, welche, wie ich kaum zu sagen brauche, eine unserer vornehmsten Aufgaben sind. Diese Versuche nehmen hier folgende Gestalt an. Da die Säulenbündel nicht zucken, braucht man sie nicht wie Muskeln zu immobilisiren. Es genügt, die Zuleitungsgefässe, zwischen deren Thonschilden das Säulenbündel auf der dreieckigen Glasplatte ruht, zu Enden des polarisirenden Stromkreises zu machen, um den Säulen den Strom durch die Bauch- und Rückenfläche in sehr zweckgemässer Art zuzuführen. Zur Aufnahme des Polarisationsstromes dient ein Paar unpolarisirbarer Zuleitungsröhren, deren Thonspitzen dem Praeparate zwischen den den polarisirenden Strom zuführenden Thonschilden anliegen.

Dabei zeigte sich im Bussolkreise ganz regelmässig der Organstrom, wie denn schon Matteucci angiebt, ihn an cubischen Stücken Organ von nur 2^{mm} Seite wahrgenommen zu haben.[1] Diese Art ihn zu beobachten, hat den Vortheil, dass der Verdacht auf einen elektromotorischen Unterschied der pigmentirten Rücken- und der pigmentlosen Bauchhaut von selbst fortfällt. An Praeparaten von noch einigermaassen frischen Organen hatte der Organstrom stets die Richtung des Schlages. Leicht war zu zeigen, dass eine säulenartige Anordnung elektromotorischer Kräfte ihn erzeugte, denn er erschien in demselben Sinne gleichviel wo die Thonspitzen aufgesetzt wurden, und seine Stärke wuchs mit deren Abstand. Beispielsweise betrug sie zwischen der Mitte und dem der Rückenfläche nächsten Punkte der Seitenflächen, welchem noch sicher beizukommen war, $+ 13.5^{sc}$ (wo das Pluszeichen

[1] Archives des Sciences physiques et naturelles. Nouvelle Période. t. XV. 1862. p. 41. 42.

Digitized by Google

bedeutet, dass die Wirkung im Sinne des Schlages stattfand); zwischen der Mitte und dem der Bauchfläche nächsten Punkte + 10^{sc}; zwischen den beiden äussersten Punkten aber + 23^{sc}: wegen des bedeutenden Widerstandes der Zuleitungsröhren nur etwas weniger als die Summe der Wirkungen beider Hälften. In einem anderen Falle waren die entsprechenden Zahlen + 5, + 4, + 11^{sc}. Schnitt die Verbindungslinie der Thonspitzen die Axe der Säulen senkrecht, so erfolgte keine in Betracht kommende und regelmässige Wirkung.

Ich habe bei diesen Versuchen die Organstromkraft sehr oft gemessen, und sie zwischen 0.005 und 0.013 Raoult gefunden, also meist erheblich kleiner, als die Nervenstromkraft bei Fröschen. Die Stromkraft an etwa 4^{cm} langen Stücken Zitteraal-Organ bestimmte Sachs zu 0.015 bis 0.030, also im Mittel zu 0.0225 Daniell. Die Länge meiner Säulenbündel, je nachdem sie vom medialen oder mehr vom seitlichen Rande des Organes grösserer oder kleinerer Fische stammten, schwankte zwischen 29 und 12^{mm}, ihre mittlere Länge betrug also 2^{cm} und ihre mittlere Kraft war (0.005 + 0.013) / 2 = 0.009 Raoult, oder ungefähr 0.0085 Daniell.[1] Bei doppelter Länge wäre die Kraft 0.0170 und somit nur wenig kleiner gewesen, als die mittlere Kraft ebenso langer Stücke Zitteraal-Organ.

Doch lässt sich dies Zusammentreffen noch weiter verfolgen. Rechnet man im Zitteraal-Organ auf das Millimeter im Mittel zehn Platten, so findet man für die einzelne Zitteraal-Platte die mittlere Organstromkraft zu (0.0000375 + 0.0000750)/2 = 0.00005625. Wegen einer an Sachs' Zahlen allem Ermessen nach anzubringenden Correction erhöht sich dieser Werth auf 0.00006. Schreibt man dem Zitterrochen-Organ im Mittel 30 Platten auf das Millimeter zu, so giebt dies für die mittelhohen Säulen von (29 + 12) / 2 = 20.5^{mm} Höhe 615 Platten, von denen aber wohl nur 500 zwischen den ableitenden Thonspitzen lagen. Dividirt man mit 500 in die mittlere von uns beobachtete Organstromkraft von 0.0085 Daniell, so findet man für die einzelne Zitterrochen-Platte einen mittleren Werth von 0.0000117 Daniell. Dieser Werth ist 3.3 mal kleiner als der für die einzelne Zitteraal-Platte gefundene. Nach meinen Aufstellungen sollte er, wegen der etwa 8.5 mal grösseren Dicke der Zitteraal-Platten, etwa 8.5 mal kleiner sein.[2]

Eine genauere Übereinstimmung zweier unter solchen Umständen gewonnenen Zahlen ist nicht zu verlangen. Schon dass die Zahlen

---

[1] Vergl. E. Kittler, Die elektromotorische Kraft des Daniell'schen Elements. Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München. Bd. XII. 1882. S. 501. 502; — auch in Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie. N. F. 1882. Bd. XVII. S. 893.

[2] Untersuchungen u. s. w. S. 174. 175. 278—280. 286.

Digitized by Google

gleicher Ordnung sind, erscheint als überraschender Erfolg. Möglicherweise beruht dieser Erfolg ganz auf Zufall. Doch wird man es für eine seltene Fügung gelten lassen, dass ich aus denselben Voraussetzungen, auf welche obige Rechnung sich gründet, auch zu jener merkwürdigen Folgerung gelangte, wonach die elektromotorische Kraft des ganzen Zitteraales zu der des ganzen Zitterrochen sich, wie der Zweck es erheischt, ungefähr so verhält, wie, nach Hrn. Christiani's Bestimmung, der Widerstand von Süss- zu dem von Seewasser.[1]

Bis auf Weiteres dürfen wir schliessen, dass die elektromotorischen Elemente beider Fische von ungefähr gleicher Kraft sind, und dass der Potentialunterschied der elektrischen Platten mit ihrer Dicke wächst. Was Matteucci's Angabe betrifft, welcher die Organstromkraft des ganzen Zitterrochen zwischen der von einem und der von zwei Froschgastroknemien fand, so ist zu bedenken, dass die Stromkraft des unversehrten Gastroknemius durch Parelektronomie gleich Null, ja negativ wird, daher sie nicht als Maasseinheit dienen kann.

In dem Maasse, wie das Organ abstirbt, sinkt die Organstromkraft, doch ist die Lebenszähigkeit des Organes bekanntlich gross.[2] Nach vierundzwanzig, ja achtundvierzig Stunden kann man am kalt aufbewahrten Fisch noch Organstromkraft in Höhe von 0.003 bis 0.002 Raoult antreffen. Die Erhaltung des Organstroms ist ein Merkmal der noch erhaltenen Leistungsfähigkeit. Später sind die Praeparate nicht nur unwirksam, sondern nicht selten schwach verkehrt wirksam, wie dies vom Organstrom des ganzen Fisches schon Zantedeschi angab.[3] Am Zitteraale sah Sachs dasselbe, jedoch unter verdächtigen Umständen.[4] Die verkehrten Wirkungen könnte man darauf deuten wollen, dass nach erloschenem Organstrome kleine Ungleichartigkeiten anderer Natur je nach ihrer Richtung bald noch einen Rest normalen Organstromes, bald verkehrten Organstrom vortäuschen. Dazu scheint aber diese Stromumkehr zu regelmässig aufzutreten, und sie erinnert zu deutlich an die, welche beim Absterben zarterer Muskeln gleichfalls mit grosser Regelmässigkeit sich einstellt.[5]

Wie aber am absterbenden Zitterrochen-Organ die Organstromkraft sinkt und unregelmässig wird, so scheint dasselbe auch am ganzen lebenden Thiere der Fall zu sein, wenn es sich in schlechtem Ernährungszustande befindet. Als ich im Winter dieselben Prüfungen an einem gleichfalls durch Ausstanzen der elektrischen Lappen ge-

[1] Untersuchungen u. s. w. S. 414. 415.
[2] Diese Berichte, 1882. Bd. I. S. 500; — vergl. Untersuchungen u. s. w. S. 188.
[3] Comptes rendus etc. 1842. t. XIV. p. 489.
[4] Untersuchungen u. s. w. S. 258.
[5] Untersuchungen über thierische Elektricität u. s. w. Bd. II. Abth. I. S. 154. 283. 553.

Digitized by Google

tödteten, 29^{cm} langen Zitterrochen vornahm, der etwa sieben Wochen im Aquarium gelebt hatte, fand ich dieselben Wirkungen nicht wieder, sondern ihrer Richtung und Grösse nach unbestimmte Ausschläge, welche auf geringen Hautungleichartigkeiten oder sonst irgend welchen Störungen beruhen mochten. Auch die Säulenbündel aus diesem Fisch zeigten sich theils unwirksam, theils verkehrt wirksam; doch kam auch eins vor, welches ganz kräftigen Organstrom gab. An einem anderen, 26^{cm} langen Zitterrochen, der noch länger gefangen gewesen war, stellte ich die Prüfung auf Organstrom am ganzen Fisch gar nicht erst an, fand aber dann seine Säulenbündel sehr regelmässig, und zum Theil mit grosser Kraft wirksam.

Aus der Schwächung der Organstromkraft an schlecht genährten Thieren würde sich erklären, dass ich an Streifen des Malopterurus-Organs auch mit dem Nervenmultiplicator keine fand. Was Hrn. Eckhard's seiner eigenen Meinung nach verneinendes Ergebniss betrifft, so ist es bei etwas genauerer Betrachtung mit den unsrigen nicht so unvereinbar. Denn von den Versuchen am ganzen Fisch, dem nur Gehirn und Rückenmark zerstört waren, um freiwillige Entladungen und Bewegungen zu verhüten, sagt Hr. Eckhard: »Die Nadel blieb »nun allerdings selten in absoluter Ruhe, ihre Ausschläge waren aber »stets sehr klein, oft allerdings so gerichtet, dass sie einem Strome »entsprachen, wie er bei Reizung der Nerven in dem Organ entstehen »würde. Eine dauernde Ablenkung dagegen kam nicht vor.« Von Versuchen an Stücken Organ, welche von Bauch- und Rückenfläche abgeleitet wurden, heisst es: »die Ausschläge hatten auch hier oft »die oben bezeichnete Richtung, waren aber gar nicht zu vergleichen »mit denen, welche viel kleinere Muskelmassen desselben Thieres »lieferten.« Die Organe und Organstücke schlugen noch bei Reizung der elektrischen Nerven.[1] Die Sache läuft also wohl darauf hinaus, dass Hr. Eckhard stärkere Ströme erwartete, als die in Wirklichkeit vorhandenen, welche an der Empfindlichkeitsgrenze seiner stromprüfenden Vorrichtungen lagen. Die Abwesenheit dauernder Ablenkungen erklärt sich daraus, dass Hr. Eckhard die Ableitung noch mit Platin vornahm.

An den vom medialen Theile des Organes stammenden Säulenbündeln trifft es sich mitunter, dass Nervenzweige aus der Mitte ihrer Länge heraushängen, wie aus dem Hilus eines Muskels. Schneidet man am aufliegenden Praeparat ein Stück vom Nerven ab, so erfolgt eine Entladung, die günstigenfalls die Scale aus dem Gesichtsfelde schleudert. Ähnliches beschrieb schon Matteucci, der sogar von steck-

[1] Beiträge zur Anatomie und Physiologie. Bd. I. 4. S. 159—162.

Digitized by Google

nadelkopfgrossen Stückchen Organ, denen der Nerv des stromprüfenden Schenkels anlag, bei mechanischer Reizung noch Zuckung erhielt.[1] Vergeblich aber versuchte ich das Säulenbündel durch Ammoniak zu reizen, was an Stücken Zitteraal-Organ Sachs so gut gelang.[2] Der Grund ist indess klar: auf die dort wirksame Art könnte man am Zitterrochen-Organ immer nur eine einzige der Länge nach angeschnittene Säule erregen.

Der Organstrom ist an aufliegenden Praeparaten oft in langsamem Sinken begriffen. Matteucci sah ihn sich beim Zitterrochen, Hr. Robin beim gemeinen Rochen nach jedem Schlag etwas heben, und auch in Sachs' Beobachtungen am Zitteraale zeigte sich Ähnliches.[3] In den wenigen Versuchen, in welchen die Erregung von Säulenbündeln durch mechanische Reizung der Nerven mir gelang, ging die schnell sinkende Ablenkung durch den Schlag in der That so stetig in die durch den gewöhnlichen Organstrom über, dass sie als vorübergehende Steigerung des letzteren sich darstellte. Sachs hat aber am Zitteraal ferner gezeigt, dass Tetanus des Organes den Strom schwächt.[4] Dies auch am Zitterrochen zu beobachten, hatte ich noch keine Gelegenheit.

§. X. *Von den secundär-elektromotorischen Wirkungen des Zitterrochen-Organs.*

Ich ging an dies noch jungfräuliche Gebiet mit um so lebhafterer Begier, als, wie man sich erinnert, zwischen meinen denselben Gegenstand betreffenden Versuchsergebnissen am Zitterwelse, und denen von Sachs am Zitteraal, ein Widerspruch zu bestehen schien. Ich brannte zu erfahren, welchen von beiden einander scheinbar zuwiderlaufenden Erfahrungen die jetzt am Zitterrochen zu gewinnenden sich anschliessen würden.

Die Vorrichtungen und Versuchsweisen, deren ich mich bediente, waren dieselben, welche zu meinen neueren Versuchen über secundärelektromotorische Erscheinungen an Muskeln und Nerven gedient hatten. Die Art, wie die Organpraeparate den polarisirenden Strömen ausgesetzt, und die secundären Ströme abgeleitet wurden, ist soeben schon geschildert worden. Beim ersten Blick erscheint es als Vortheil, dass die Organpraeparate nicht wie Muskeln zucken. Allein wie bei

[1] Untersuchungen u. s. w. S. 175. 176.
[2] Ebenda, S. 177. 178.
[3] Ebenda, S. 170. 173.
[4] Ebenda, S. 174. 187. 220.

Digitized by Google

den Nerven geht man dadurch der Controle für die erhaltene Leistungsfähigkeit verlustig, welche bei den Muskeln die Zuckung gewährt. Wenn ferner von den Schwierigkeiten, die ich hier erwartete, manche ausblieben, so liessen die auf die beschriebene Art hergerichteten Praeparate sich an Gleichmässigkeit doch nicht mit solchen von der Natur gegebenen Versuchsobjecten vergleichen, wie wir sie an den Nerven oder an bestimmten Muskeln besitzen. Während man ein Stück Ischiadnerv, oder einen und denselben Muskel, bei einiger Sorgfalt leicht von stets gleicher Grösse und Frische vergleichsweise unversehrt sich verschafft, ist es unmöglich, für gleiche Zahl der unversehrten Säulen in unserem Praeparate zu bürgen; im selben Fische schwankt ihre Länge zwischen medialen und seitlichen Rändern des Organs; die Leistungsfähigkeit kurz nacheinander von einem Organ geschnittener Praeparate fällt aus unbekannten Gründen sehr verschieden aus; und dazu kommt noch die veränderliche Nebenschliessung durch etwaige Reste zerschnittener Säulen, welche den unversehrten Säulen anhängen (s. oben S. 207). Dies sind die oben S. 182 angedeuteten Gründe, aus denen bei Polarisationsversuchen an den Zitterrochen-Säulen selbst der äusserst geringe Grad von Genauigkeit nicht erreichbar ist, womit ich schon an Muskeln und Nerven mich begnügen musste. Für die secundär-elektromotorischen Wirkungen des elektrischen Organs eine Tabelle mit doppeltem Eingange herzustellen, welche in ihrem einen Kopfe wachsende Stromdichten bei beiden Stromrichtungen, im anderen wachsende Schliessungszeiten enthielte, wie ich solche Tabellen für Muskeln und Nerven entwarf, wird nur allenfalls ausführbar sein, wenn man, wie Boll in Viareggio, wochenlang täglich über fünf frischgefangene Zitterrochen verfügt,[1] und wenn man überdies nicht viel Anderes vorhat.

Im Folgenden wird es sich vorzüglich um die verschiedene secundär-elektromotorische Wirkung handeln, welche der Strom in Richtung des Fisch-Schlages, und in der entgegengesetzten erzeugt. Erstere Richtung bezeichnen wir nach der von mir im Zitteraal-Buch eingeführten Redeweise als absolut positiv, letztere als absolut negativ.[2] Polarisation von Bauch zu Rücken ist also absolut positiv; und je nachdem sie einem absolut positiven oder negativen polarisirenden Strome folgt, relativ beziehlich positiv oder negativ. Um die polarisirenden Ströme in Bezug auf ihre Richtung noch bequemer zu unterscheiden, werde ich den dem Schlage gleichgerichteten den homodromen, den ihm entgegengesetzt gerichteten den heterodromen

[1] Archiv für Anatomie und Physiologie u. s. w. 1873. S. 77.
[2] A. a. O. S. 149. 213.

Digitized by Google

Strom nennen.[1] Der homodrome Strom wird durch einen aufsteigenden Pfeil (↑), der heterodrome Strom durch einen absteigenden Pfeil (↓) bezeichnet; Plus- und Minuszeichen dienen zur Unterscheidung der relativ positiven und negativen Polarisation. Unter 'beiden Strömen' schlechthin verstehe ich den homodromen und den heterodromen Strom. Endlich wird es kürzehalber sich empfehlen, die Polarisation durch den homodromen und die durch den heterodromen Strom, was auch ihre absolute Richtung sei, beziehlich homodrome und heterodrome Polarisation zu nennen.

Das erste Ergebniss dieser Versuche ist nun in der That die nach verschiedenen Umständen bald relativ positive, bald relativ negative innere Polarisation des Organes nach Durchströmung in der Richtung der Säulen, ähnlich der Polarisation der Muskeln, Nerven, und des Zitterwels-Organs, und zwar sind die Bedingungen für das Hervortreten der beiden Polarisationen im Allgemeinen dieselben wie dort. Bei längerer Schliessung wird unter allen Umständen die Polarisation relativ negativ; bei kurzer Schliessung besonders stärkerer Ströme kommt unter gewissen Bedingungen relativ positive Polarisation zum Vorschein. Unter gewissen anderen Bedingungen, die sich nicht willkürlich herstellen lassen, erfolgt doppelsinnige Wirkung: erst negative, dann positive, zum Beweise, dass auch hier die negative Polarisation die flüchtigere ist. Bei gesunkener Leistungsfähigkeit bleibt zuletzt nur noch negative Polarisation übrig, doch dauert es lange, bis die positive ganz vermisst wird. Man beobachtet alle diese Wirkungen im Allgemeinen in gleicher Stärke, welchem Theile der Säulen auch die in beständigem Abstande gehaltenen Thonspitzen anliegen; bei ausreichendem Widerstande des Bussolkreises, für welchen durch die ableitenden Thonspitzen gesorgt ist, fallen sie um so grösser aus, je grösser dieser Abstand: mit Einem Wort, es handelt sich um säulenartige Anordnung elektromotorischer Kräfte. Endlich bei querer Richtung des polarisirenden Stromes sowohl wie querer Stellung der ableitenden Thonspitzen erhält man nur schwache Erfolge in unbestimmter Richtung. Die Belege hierfür finden sich im Anhange zusammengestellt.

Die Beziehungen der Polarisation zur Richtung des polarisirenden Stromes sind in allen diesen Versuchen so ausgesprochen, dass man Näheres über die Erscheinung nicht aussagen kann, ohne sogleich auf diesen Punkt einzugehen. Meine Versuche hatten denn auch meist dieselbe Form, wie die an der oberen und unteren Hälfte des Muskel-

[1] Ein sprachgelehrter College, den ich wegen dieser Ausdrücke befragte, rieth zu 'isodrom' und 'anisodrom'. Wegen der Ähnlichkeit mit 'isotrop' und 'anisotrop', welche beim Beschreiben des Organes vorkommen, schienen mir aber die im Text eingeführten Formen zweckmässiger.

Digitized by Google

paares, oder an den vorderen und hinteren Wurzeln der Spinalnerven,[1] d. h. der homodrome und der heterodrome Strom wurden in bestimmten Zeiträumen abwechselnd durch die Säulen gesandt. Je stärker der Strom und je länger die Schliessungszeit, um so länger musste die Versuchsperiode gewählt werden, um dem Praeparate Zeit zu gönnen, zu einem dem natürlichen Zustand einigermaassen vergleichbaren zurückzukehren.[2]

Die Tabellen im Anhange bedürfen hiernach keiner Erläuterung mehr, die sich nicht aus der Abhandlung 'Über secundär-elektromotorische Erscheinungen u. s. w.' ergäbe. Die Zahlen in den wagerechten mit *S* bezeichneten Reihen sind die Ausschläge durch den secundären, die in den mit *P* bezeichneten die Ausschläge durch den primären Strom. Wirft man einen Blick auf diese Reihen, beispielsweise auf Reihe 10, so sieht man, dass in dieser Reihe bis zum 13. Versuche der homodrome Strom (↑) absolut und relativ positive Polarisation, der heterodrome Strom (↓) absolut positive, relativ negative Polarisation erzeugt. Von hier ab werden die Polarisationen durch beide Ströme relativ negativ, die heterodrome bleibt absolut positiv, die homodrome wird auch absolut negativ, aber sie ist anfänglich viel schwächer als die absolut positive, relativ negative durch den heterodromen Strom. Mit wachsender Erschöpfung des Praeparates schwindet dieser Unterschied mehr und mehr.

Alle Versuchsreihen mit abwechselnd gerichteten Stromstössen nehmen im Wesentlichen diesen Verlauf. Gleichviel ob man mit homodromem oder mit heterodromem Strom beginne, die Polarisationen durch beide Ströme werden früher oder später relativ negativ; um so früher, d. h. nach einer um so geringeren Anzahl von Wechseln, je länger die Schliessungszeit; wie denn bei einer gewissen Dauer dieser Zeit schon der erste homodrome Strom absolut und relativ negative Polarisation giebt. Dasselbe ist der Fall bei zu geringer Leistungsfähigkeit des Praeparates. Alsdann erhält man von vorn herein durch beide Ströme nur relativ negative Polarisation, aber die homodrome ist die merklich schwächere. Man trifft also dann sogleich den Zustand an, der, bei besserer Beschaffenheit des Praeparates, erst

---

[1] Diese Berichte, 1883. Bd. I. S. 363 ff. 383 ff.

[2] Lange fortgesetzte Versuchsreihen dieser Art, wobei man bestimmte Zeiträume innezuhalten hat, ermüden doppelt durch die Nothwendigkeit, an der Uhr danach zu sehen, ob die Zeit für einen neuen Versuch gekommen ist. Seit Jahren mit solchen Versuchen beschäftigt, liess ich mir endlich von den HH. Baltzar und Schmidt in Leipzig eine Versuchs-Weckeruhr bauen, welche, je nachdem bestimmte Scheiben eingesetzt werden, dem Beobachter alle 1, $1^1/_4$, $1^2/_3$, 2, $2^1/_2$, $3^1/_3$, 5 oder 10 Minuten durch einen Glockenschlag anzeigt, dass der Augenblick zum Versuche da ist, ihn aber noch vorher durch einen anderen Schlag zur Arbeit ruft.

Digitized by Google

allmählich im Lauf einer längeren Versuchsreihe sich einstellt; »der negative Polarisationsstrom erfolgt stets stärker im Sinne des Schlages.«

Wir sind unvermerkt zu einem wichtigen Ergebniss gelangt. Denn dies sind die Worte, in welche Sachs seine Versuche über homodrome und heterodrome Polarisation am Zitteraal zusammenfasste,[1] und von welchen ich bisher annahm und wiederholt sagte, dass sie meinen Erfolgen am Zitterwelse widersprächen.[2] Indem ich jetzt am Zitterrochen fortwährend dasselbe beobachtete, wie Sachs am Zitteraal, aber zugleich das Werden der Erscheinung, fielen mir die Schuppen von den Augen. Nicht nur besteht zwischen dem Sachs'schen Ergebniss, wie er es in obigen Worten formulirt hat, und dem unsrigen kein Widerspruch, sondern beide lassen sich leicht aus Einer sehr einfachen Annahme herleiten; und da derselben Annahme auch meine Ergebnisse am Zitterwels sich fügen, kann man sagen, dass die secundär-elektromotorischen Erscheinungen bei allen drei elektrischen Fischen im Wesentlichen einerlei, und, in gewissem Sinne, verstanden sind.

Zu jener Annahme führt die Bemerkung, dass in keinem meiner Versuche am Zitterwels und Zitterrochen der heterodrome Strom jemals relativ positive Polarisation erzeugt hat. Auch doppelsinnige, zuerst relativ negative, dann positive Polarisation, kommt nur bei homodromem Strome vor. Denkt man sich, dass beide Ströme in gleichem Maasse relativ negativ polarisiren, dass aber der homodrome Strom sehr viel stärker als der heterodrome relativ positiv polarisirt, so dass die heterodrome, relativ positive Polarisation stets durch die relativ negative verdeckt wird, so ist Alles klar, wie sich aus Fig. 7 ergiebt.

Diese Figur ist unter ähnlichen, aber doch etwas anderen Voraussetzungen entworfen, als die Figuren, welche auf Taf. II des Zitteraal-Buches Sachs' Ergebnisse versinnlichen. Sie stellt abgekürzt den Vorgang bei einer Versuchsreihe dar, in der, wie bei den Reihen im Anhange, die beiden Ströme abwechselnd durch ein Stück Organ gesandt werden. Die Abscissenaxen sind natürlich die Zeit. Die Ordinatenaxen in den einzelnen Abschnitten entsprechen dem Augenblick der Schliessung der Bussole nach Öffnung des Säulenkreises. Absolut positive Polarisation ist oberhalb, absolut negative unterhalb der Abscissenaxe aufgetragen. Nach aufsteigendem Pfeil (↑), also bei homodromem Strom, entspricht Verlauf der Curve oberhalb der Abscissenaxe absolut und relativ positiver, Verlauf unterhalb absolut

[1] Untersuchungen u. s. w. S. 217. 218.
[2] Ebenda; — diese Berichte, 1883. Bd. I. S. 395.

Digitized by Google

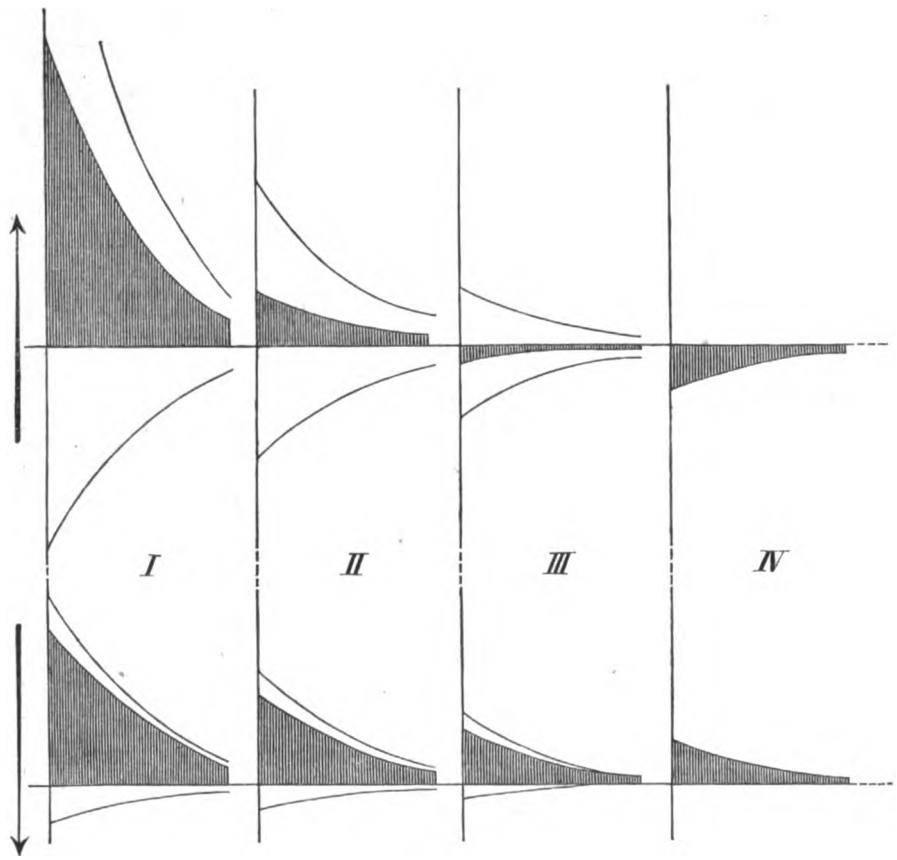


Fig. 7.

und relativ negativer Polarisation. Nach absteigendem Pfeil ($\downarrow$), also bei heterodromem Strom, entspricht Verlauf der Curve oberhalb absolut positiver, relativ negativer, Verlauf unterhalb absolut negativer, relativ positiver Polarisation. Der auf die Bussole wirkende, resultirende Polarisationsstrom ist in jedem Abschnitt durch den schraffirten Flächenraum dargestellt, welchen die aus der algebraïschen Summation der beiden Polarisationen resultirende Curve mit den Coordinatenaxen einschliesst.

Man sieht, dass, der Wirklichkeit entsprechend, zuerst beide Ströme absolut positive Polarisation geben, der homodrome Strom die stärkere (Abschn. I der Figur); dann kommt ein Zeitraum (Abschn. II), wo zwar noch beide Polarisationen absolut positiv sind, aber die heterodrome ist die stärkere; endlich einer (Abschn. III), wo die homodrome Polarisation absolut negativ, und auch so noch kleiner erscheint, als die heterodrome. Im weiteren Verfolg nähern sich beide Polarisationen der Gleichheit (Abschn. IV).

Ich brauche kaum hervorzuheben, dass die im dritten Abschnitt

Digitized by Google

dargestellte Erscheinungsweise es war, welche Sachs, mit Ausschluss der beiden ersten, zu sehen bekam, und mit den Worten beschrieb, die mir, durch ihren scheinbaren Widerspruch mit meinen eigenen Ergebnissen, so viel Kopfbrechens machten: »Die relativ negative Polarisation erfolgt stets stärker im Sinne des Schlages.« Doch bleibt bei Sachs noch Etwas dunkel. Ausser den so erklärten Polarisationsversuchen hat er noch andere angestellt, eben die, welche auf Taf. II des Zitteraal-Buches graphisch wiedergegeben sind. Auch in diesen Versuchen war ausnahmslos die Polarisation durch beide Ströme zuerst relativ negativ, dabei aber so stark, dass der Spiegel in den Aequator geworfen wurde, von wo zurückfallend er nach Sachs' Beschreibung einige grosse Schwingungen um den Nullpunkt vollzog, die, wenn die Schliessungszeit eine gewisse Grösse überstieg, ihn zweimal über den Nullpunkt in den relativ positiven Quadranten führten. Die erste dieser Überschreitungen erklärt sich aus den Gesetzen der aperiodischen Bewegung gedämpfter Magnete. Da der Magnet aus einer den aperiodischen Bereich überragenden Höhe fiel, konnte er den Nullpunkt überschreiten[1], jedoch nur einmal; die zweite Überschreitung, in welcher Sachs auch eine Schwingung erblickte, konnte nur auf Zeichenwechsel der resultirenden Polarisation beruhen, wofern der Spiegel sich richtig aperiodisch verhielt. Im Zitteraal-Buche gelang es mir, componirende Curven der beiden Polarisationen zu entwerfen, aus denen die von Sachs beobachteten resultirenden Curven sich ziemlich ungezwungen herleiten liessen, dies aber unter der Voraussetzung, dass der heterodrome Strom ebenso gut wie der homodrome relativ positive Polarisation erzeugt. Diese Voraussetzung widerspricht der Vorstellung, mittels welcher wir jetzt von einer ungleich zahlreicheren und besser beglaubigten Reihe von Erfahrungen, mit Inbegriff von Sachs' eigenen, anders angestellten Versuchen, Rechenschaft gaben. Die einzigen Spuren heterodromer, relativ positiver Polarisation an den drei elektrischen Organen würden jene zweiten Überschreitungen der Abscissenaxe in einigen der Sachs'schen Versuche sein. Unter diesen Umständen bin ich geneigt zu glauben, dass letztere doch wirklich nur das waren, wofür Sachs selber sie hielt, nämlich Schwingungen. Seine Bussole stand nicht besonders sicher,[2] und vielleicht war sein Magnet nicht gut centrirt. Dann konnten sehr starke Stromstösse ihn in Pendelschwingungen versetzen, in deren Folge er den Nullpunkt noch einmal überschritt.

---

[1] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. I. S. 284. 324. 355 ff.

[2] Aus den Llanos. Schilderung einer naturwissenschaftlichen Reise nach Venezuela. Leipzig 1879. S. 198; — Untersuchungen u. s. w. S. 137.

Digitized by Google

Wie dem auch sei, die Voraussetzung, welche meinen Constructionen der Sachs'schen empirisch resultirenden Curven im Zitteraal-Buche zu Grunde lag, erscheint jetzt unhaltbar, und es kann für erwiesen gelten, dass in allen drei elektrischen Organen der homodrome Strom vielleicht ausschliesslich, jedenfalls bei weitem stärker, relativ positive Polarisation erzeugt. Ehe wir versuchen, hieraus einen Schluss zu ziehen, empfiehlt es sich, noch von anderen Thatsachen Kenntniss zu nehmen.

§. XI. *Von der relativen Stärke des homodromen und des heterodromen Stromes im elektrischen Organ.*

Schon in meinen Polarisations-Versuchen am Zitterwels-Organ war mir die verschiedene Stärke des homodromen und des heterodromen Stromes sehr aufgefallen. »An frischen Streifen, an denen die positive Polarisation in der Richtung des Schlages in voller Kraft auftrat, war stets der absteigende«, — beim Zitterwels homodrome — »Strom bedeutend stärker als der aufsteigende« — heterodrome —: »im Verhältniss von 100 : 112, 116, ja sogar 125. An gekochten und an absterbenden Streifen verschwand der Unterschied. Diese Wirkung schien auf nichts gedeutet werden zu können, als auf eine während der Dauer des primären Stromes stattfindende positive Polarisation von grosser elektromotorischer Kraft, der von mehreren Grove'schen Elementen vergleichbar, die bei homodromem Strome sich zur Kraft der Grove'schen Säule hinzufügte. Streife des Organs auf die Schlagrichtung senkrecht, am Thier also quer geschnitten, gaben bei kurzer Einwirkung der dreissiggliederigen Säule schwächere, aber nach beiden Richtungen gleich starke positive Polarisation, und die Stärke des polarisirenden Stromes war in beiden Richtungen bis auf den Scalentheil dieselbe.«[1]

Soweit war ich 1857 gekommen. Wie bedeutungsvoll musste es mir jetzt erscheinen, als in fast jedem Versuch am Zitterrochen sich wieder jene Überlegenheit des homodromen Stromes offenbarte, und zwar in noch höherem Grade, als damals am Zitterwelse. Einen der merkwürdigsten Fälle bieten die Reihen 13 und 14, in welchen der homodrome Strom von dreissig Grove mehrmals über doppelt so stark erscheint, wie der heterodrome. Um dies durch eine nur zum homodromen Strom hinzutretende positive Polarisation zu er-

[1] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 720; — Untersuchungen u. s. w. S. 206. 218.

Digitized by Google

klären, während der negativen Polarisation durch beide Ströme gleiche Stärke beigemessen wird, muss man der homodromen positiven Polarisation eine elektromotorische Kraft von über fünfzehn Grove zuschreiben. In Reihe 20, bei fünfzig Grove im Kreise, verhält sich der heterodrome zum homodromen Strom anfangs fast wie 3 : 5; die positive Polarisation musste die Stärke von zwanzig Grove erreicht haben. In Reihe 10 ist bei zwanzig Grove dasselbe Verhältniss wie 1 : 3; die secundär-elektromotorische Kraft kommt diesmal zwar nur etwa dreizehn Grove gleich, muss aber das doppelte der primären betragen haben.

Bei querer Richtung des Stromes im Praeparat fehlt der Unterschied der beiden Ströme, ebenso an abgestorbenen oder durch Siedhitze getödteten Praeparaten (s. unten S. 224. 225, und Reihe 17 und 18 im Anhange); an aufliegenden Praeparaten, im Lauf einer Versuchsreihe, sieht man ihn schwinden in dem Maasse, wie das Praeparat abstirbt.

Wir wissen leider noch nichts Gewisses von der elektromotorischen Kraft der Zitterfische, ausser dass sie sehr gross sein muss, wenn auch gerade am kleinsten beim Zitterrochen.[1] Auf alle Fälle wird man es auf den ersten Blick unglaublich finden, dass in unseren Organpraeparaten eine so hohe elektromotorische Kraft herrsche, und man wird nach einer anderen Ursache für die verschiedene Stärke der beiden Ströme forschen.

Ein Unterschied von Stromstärken kann nur auf zweierlei beruhen: auf ungleicher elektromotorischer Kraft, oder auf ungleichem Widerstande. Es wäre denkbar, dass im elektrischen Organ irreciproker Widerstand[2] stattfände, dass es im Sinne des Schlages besser als im anderen leite. Elektrolyten leiten nur, sofern sie zersetzt werden; nach einer wohl begründeten Lehre aber geht der Elektrolyse eine ähnliche Anordnung elektropositiver und -negativer Bestandtheile voraus, wie wir sie zur Erklärung des Schlages und der positiven Polarisation voraussetzen. Wenn nun diese Anordnung leichter oder überhaupt nur in absolut positiver Richtung von statten ginge, würde es verständlich, warum das Organ den homodromen besser als den heterodromen Strom leite. Die Abhängigkeit des hypothetischen irreciproken Widerstandes vom Lebenszustande würde sich daraus erklären, dass der ungleiche Widerstand in beiden Richtungen auf den vom Leben abhängigen elektrischen Eigenschaften der Organmolekeln beruhte. So sehen wir uns vor eine Aufgabe gestellt, welche im Gebiet des Galvanismus öfter wiederkehrt und meist ungelöst bleibt: zu ent-

[1] Untersuchungen u. s. w. S. 276. Anm. 2. 411.

[2] Vergl. Arthur Christiani, Beiträge zur Electricitätslehre. Über irreciproke Leitung electrischer Ströme u. s. w. Berlin 1876.

Digitized by Google

scheiden, ob ein beobachteter Unterschied der Stromstärken von einem solchen der elektromotorischen Kraft oder des Widerstandes herrührt.

Eine Art, im vorliegenden Falle diese Frage zu beantworten, bestände darin, im primären Kreise einen so grossen Widerstand neben dem des Organpraeparates einzuführen, dass letzterer dagegen verschwände. Wenn dann auch der Unterschied der beiden Ströme verschwände, während der der Polarisationen bestehen bliebe, wäre der Ursprung des Unterschiedes aus verschiedenem Widerstande erwiesen. Ich habe einen Versuch der Art angestellt, in welchem ich ausser dem Praeparat ein 71^{cm} langes, im Lichten 2^{mm} im Durchmesser haltendes, zweimal rechtwinklig gebogenes Rohr voll physiologischer Kochsalzlösung als Widerstand einschaltete, dessen durch Thonpfröpfe verschlossene Enden in zwei Gefässe mit Zinklösung tauchten. Der Unterschied der Stromstärken in beiden Richtungen verschwand, leider aber fehlte wegen gesunkener Leistungsfähigkeit auch der der Polarisationsströme; es war in diesem Falle mit dem Organ zum Zweck dieser Entscheidung nichts mehr anzufangen, und ich konnte noch nicht den Versuch wiederholen.

Bei einer anderen Gelegenheit betrat ich, um mich dem vorgesteckten Ziele zu nähern, einen anderen Weg. Anstatt die Polarisation erst nach Öffnung des primären Stromes zu beobachten, suchte ich mir ein Bild davon schon während seiner Dauer zu verschaffen, indem ich die ableitenden Thonspitzen mit dem Bussolkreise zu einer Nebenleitung zum Praeparat machte. Die Säule bestand aus zwanzig Grove, die Bussolrolle (S) von 5000 Windungen musste in grosse Entfernung vom Spiegel gebracht werden, um die Ablenkung in richtigen Schranken zu halten. Die Schliessungszeit betrug erst $0''.0764$, später $1''.024$. Der Erfolg war überraschend. Während nämlich der homodrome Strom an der Bussole (P) fast doppelt so stark erschien, wie der heterodrome, erschien an der Bussole (S) der vom homodromen Strom abgeleitete Zweig sehr viel schwächer als der dem heterodromen entlehnte (Reihe 25). Ersetzte ich das Praeparat durch ein (beiläufig viel schlechter leitendes) Phantom aus physiologischem Thon, so waren die Unterschiede verschwunden, zum Beweise, dass nicht etwa sonst irgendwo im Kreise irreciproker Widerstand herrschte.

Damit scheint entschieden, dass der Unterschied auf irreciprokem Widerstand beruhe. Denn man sieht nicht ein, wie bei gleichem Widerstand im Praeparat der vom stärkeren Strom abgeleitete Zweig schwächer ausfallen könne, und man wird verleitet sich zu denken, dass dies nur von besserer Leitung des Praeparates für den homodromen Strom herrühre. Genauere Überlegung an der Hand einer schematischen Rechnung lehrt jedoch, dass die Anschauung hier nicht

Digitized by Google

ausreicht, und dass wenigstens unter den der Rechnung zu Grunde gelegten Annahmen die Sache sich anders verhält.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass jeder der beiden Ströme gleich starke relativ negative, aber nur der homodrome relativ positive Polarisation erzeugt. Wir setzen die elektromotorische Kraft beider Polarisationen der Dichte des Säulenstromes im Praeparate proportional, dem wir den Querschnitt = 1, und auch die Länge = 1 zuschreiben. Vorläufig untersuchen wir nur, wie sich die Dinge bei ungleichem specifischen Widerstande des Praeparates gestalten, indem wir die Verwickelung vermeiden, welche aus der sonst erwägenswerthen, aber schwer mathematisch einzukleidenden Annahme entspränge, dass der Unterschied der Widerstände in beiden Richtungen Function der Stromdichte sei. Übrigens behandeln wir das Praeparat wie einen linearen Leiter, oder so, als lägen der Bauch- und Rückenfläche metallische unpolarisirbare Elektroden an, mit welchen die Enden des Säulen- und die des Bussolkreises verbunden wären. Siehe Fig. 8 *A* und *B*, welche

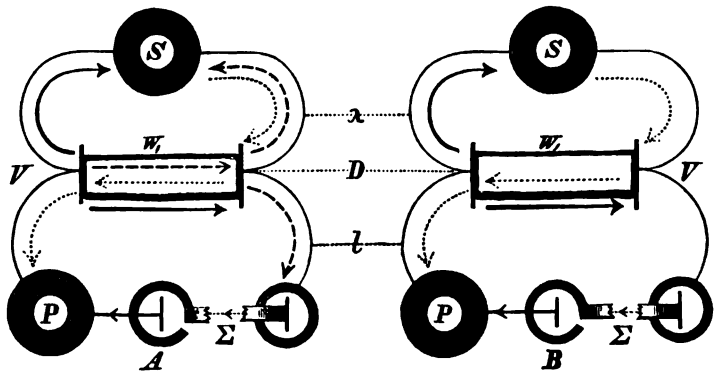


Fig. 8.

die Dinge beziehlich für den homodromen und für den heterodromen Strom vorstellen. Man erkennt leicht den Säulenkreis mit der Säule Σ und der Bussole (*P*), den abgeleiteten Stromzweig mit der Bussole (*S*). Die ausgezogenen Pfeile bedeuten die von der Säule, die gestrichelten die von der absolut positiven, die punktirten die von der relativ negativen Polarisation ausgehenden Stromantheile. Dass wir bei dieser ersten rohen Annäherung vom zeitlichen Verlaufe der Polarisation und von der Induction absehen, bedarf nicht der Erwähnung.

Es sei *E* die elektromotorische Kraft der Säule;

l der Widerstand des die Säule und die Bussole (*P*) enthaltenden Säulenkreises;

λ der Widerstand des die Bussole (*S*) enthaltenden Bussolkreises;

Digitized by Google

w, w_1 der Widerstand des Praeparates beziehlich bei homodromem und heterodromem Strom;

K die KIRCHHOFF'sche Productensumme $wl + w\lambda + \lambda l$ bei homodromem,

K_1 die entsprechende Summe bei heterodromem Strom.

P sei die Constante, welche, mit der im Praeparat herrschenden Stromdichte multiplicirt, die elektromotorische Kraft der homodromen absolut und relativ positiven Polarisation misst,

Π die entsprechende Constante für die relativ negative Polarisation.

I sei die Stärke des homodromen,

I_1 die des heterodromen Stromes im Säulenkreise;

i und

i_1 endlich seien die entsprechenden Stromstärken im nebenschliessenden Bussolkreise.

Im Säulenkreise herrscht zunächst wegen der elektromotorischen Kraft der Säule eine Stromstärke $E(w + \lambda)/K$. Zu dieser fügt sich der Stromantheil, den die Polarisationen durch den Säulenkreis schicken. Der Strom der Säule hat im Praeparat die Stärke $E\lambda/K$. Die erregte Polarisation ist (da wir den Querschnitt $= 1$ gesetzt haben) also $(P - \Pi) E\lambda/K$, und der dadurch im Säulenkreise erzeugte Stromzweig $[(P - \Pi) E\lambda/K] \times [\lambda/K]$. Da in diesem Kreise P mit E gleich gerichtet ist, haben wir

$$I = \frac{E}{K^2}[(w + \lambda) K + (P - \Pi)\lambda^2].$$

Ebenso ergiebt sich, da P im Bussolkreise E entgegenwirkt,

$$i = \frac{E}{K^2}[wK - (P - \Pi)\lambda l].$$

I_1 und i_1 erhält man beziehlich aus I und i, indem man $P = 0$ setzt und w, K in w_1, K_1 verwandelt. Danach ist

$$I_1 = \frac{E}{K_1^2}[(w_1 + \lambda) K_1 - \Pi\lambda^2],$$

$$i_1 = \frac{E}{K^2}[w_1 K_1 + \Pi\lambda l].$$

Erfahrungsmässig ist $i < i_1$, $I > I_1$, somit besteht die Ungleichheit

$$I - i > I_1 - i_1, \text{ oder}$$

$$K_1^2 [K + (P - \Pi)(\lambda + l)] > K^2 [K_1 - \Pi(\lambda + l)] \ldots\ldots\ldots (*)$$

Digitized by Google

Die erste Frage ist nunmehr, ob unserer Vermuthung gemäss diese Ungleichheit erfüllt werde durch $w_1 > w$ bei $P = 0$, was irreciprokem Widerstand im Praeparat ohne absolut positive Polarisation entspricht. Allerdings ist dies der Fall. Setzt man $P = 0$ und macht man kürzehalber $\lambda + l = \alpha$, $\lambda l = \beta$, so lässt sich die Ungleichheit schreiben

$$(w_1 - w)\left[(\beta - 2\alpha\Pi)\left(\beta + \alpha(w_1 + w)\right) + \alpha w_1 w\right] > 0.$$

Dieser Bedingung genügt $w_1 > w$, so lange nicht die Grösse in der eckigen Klammer negativ wird. Letzteres kann nur so geschehen, dass die Constante Π der negativen Polarisation einen gewissen Werth überschreitet, der uns vorläufig nicht interessirt.

Nun fragt es sich aber umgekehrt, ob, dem anderen Theil unserer Vermuthung, und unserem bloss auf der Anschauung beruhenden Schlusse gemäss, die Ungleichheit sich nicht auch erfüllt finde, wenn $w = w_1$, dagegen P von endlicher positiver Grösse sei. Da zeigt sich denn sogleich auf das Einfachste, dass die Ungleichheit (*) ebenso gut gilt, so lange

$$P > 0;$$

d. h. sobald homodrome absolut und relativ positive Polarisation da ist, können auch ohne irreciproken Widerstand die Erscheinungen so sich darstellen, wie wir sie wahrnahmen, und wir sind also zu keiner Entscheidung gelangt. Die Überlegenheit des homodromen Stromes kann sowohl auf positive Polarisation wie auf irreciproken Widerstand gedeutet werden.

Natürlich steht noch die Vermuthung offen, dass beide Erklärungen zugleich in der Wirklichkeit begründet sind, ja sie sind es sicher, wenn irreciproker Widerstand im Spiel ist, da an dem Dasein der positiven Polarisation nicht zu zweifeln ist, während der irreciproke Widerstand eine neue, dem Organ zugeschriebene Eigenschaft wäre, deren Dasein neben der positiven Polarisation erst des Beweises bedarf. Bis dieser geliefert ist, wird man sich darin finden müssen, dass in einem Organpraeparat von kaum der Grösse des bekannten Muskelpaares vom Frosch noch immer eine elektromotorische Kraft von zwanzig Grove steckt. Dies wird Einem leichter, wenn man sich erinnert, dass im schlagenden Organ des lebenden Fisches unstreitig eine noch viel grössere Kraft thätig war. Aber im Conflict der Kraft des Organes mit einer bekannten Kraft wie der der GROVE'schen Säule tritt Einem deutlicher als sonst das Staunenswerthe dieser Thatsache vor die Augen, zu der es nur Ein Seitenstück giebt, gegen dessen Wunder wir freilich abgestumpft sind, die mechanische Wir-

Digitized by Google

kung nämlich, deren die hier elektrisch wirksamen wenigen Gramm Wasser und organische Substanz fähig wären, wenn letztere, statt zum elektromotorischen Organ, zum Muskel sich entwickelt hätte.[1]

Was übrigens den zuletzt beschriebenen Versuchen, in welchen der Bussolkreis dem Praeparat während des polarisirenden Stromstosses als Nebenschliessung anlag, besonderes Interesse verleiht, ist der Umstand, dass SACHS am Zitteraal einen ähnlichen Versuch, soweit sich urtheilen lässt, mit demselben Erfolg angestellt hat. Er schloss den Strom seiner siebzehn Grove dauernd durch ein Stück Organ, und leitete mit den Thonspitzen einen Zweig davon ab durch die Bussole, deren Empfindlichkeit passend vermindert war. »Als das »Organ im Sinne des Schlages durchströmt wurde, betrug die Ab»lenkung 80^{sc}; bei der anderen Richtung 95^{sc}. Die Ablenkung hielt »sich constant auf dieser Höhe.«[2] SACHS beobachtete also nur i und i_1, zur Beobachtung von I und I_1 fehlten ihm die Mittel. Da er aber, wie nunmehr ich am Zitterrochen, $i < i_1$ fand, ist es wohl sehr wahrscheinlich, dass er auch $I > I_1$ gefunden hätte.

§. XII. *Abhängigkeit der secundär-elektromotorischen Wirkungen und der Leitungsgüte des Organes von dessen Lebenszustande.*

Es wurde schon mehrfach angedeutet, dass die Polarisirbarkeit des Organs auf das Engste an dessen Lebenszustand geknüpft ist. Methodische Versuche über diese Abhängigkeit stellte ich noch nicht an, und auch sie werden aus den oben S. 212 angegebenen Gründen schwer durchführbar sein. Das abgestorbene Organ zeigt nur noch schwache relativ negative Polarisation gleich stark in beiden Richtungen.

Ebenso verhält sich ein in Wasser gesottenes Organpraeparat. Das Organ war nicht mehr frisch; bei mässiger Sommertemperatur der äusseren Luft hatte es 48 Stunden lang auf Eis gelegen. Auf Lakmuspapier reagirte es noch alkalisch bis neutral, nach plötzlichem Abbrühen und Sieden jedoch sauer bis zur Zwiebelröthe des Pigments. Es zeigte also in dieser Beziehung denselben Unterschied vom Muskel, wie das Zitterwels-Organ.[3] Die Säulen des gesottenen Stückes lösten sich bei leiser Berührung rein von einander ab. In diesem Zustand

[1] Vergl. die Monatsberichte der Akademie, 1858. S. 99.

[2] Untersuchungen u. s. w. S. 218.

[3] Archiv für Anatomie, Physiologie u. s. w. 1859. S. 846; — Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 17 ff. 646. 647; — Untersuchungen u. s. w. S. 70—72. — Vergl. Hrn. WEYL's entsprechende Erfahrungen im Archiv für Physiologie, 1883 (Festschrift), S. 112 ff.

Digitized by Google

hatte das Praeparat jede Spur des Organstromes eingebüsst. Vor dem Sieden erzeugte 5″ lange Schliessung des Stromes von dreissig Grove so starke relativ negative Polarisation, dass die Scale aus dem Felde flog, nach dem Sieden erfolgte in beiden Richtungen nur noch eine Spur. Dabei fiel es sehr in die Augen, dass das Praeparat an Widerstand abgenommen hatte, ganz wie ich es am Muskel und dem Pflanzengewebe fand,[1] und auch schon vom Zitterwels-Organ angab.[2] Die Stromstärken vor und nach dem Sieden verhielten sich wie 100 : 133, es hatten sich aber Säulen beim Sieden losgelöst, so dass das Verhältniss unstreitig noch kleiner war. Ob das abgestorbene Organ besser leite als das frische, wie dies beim Muskel der Fall ist, konnte ich noch nicht ermitteln, doch ist es wegen der mit dem Absterben verbundenen Säuerung wohl sehr wahrscheinlich.

§. XIII. *Erörterung der vorigen Ergebnisse.*

Wie unvollkommen die obigen Erfahrungen über die secundär-elektromotorischen Erscheinungen der elektrischen Organe auch seien, sie begründen einen ansehnlichen Fortschritt in der Kenntniss dieser Organe. An die Stelle des beängstigenden Widerspruches zwischen den SACHS'schen Ergebnissen am Zitteraal und den meinigen am Zitterwelse trat die Einsicht, dass bei allen drei elektrischen Fischen die secundär-elektromotorischen Erscheinungen des Organes dieselben sind. Diese Erscheinungen konnten beim Zitterrochen schon etwas mehr in's Einzelne verfolgt werden, als beim Zitterwelse, vollends beim Zitteraal. Die blosse Thatsache, dass das Zitterrochen-Organ, welches zu diesen Versuchen kaum tauglich schien, sehr gut dazu sich eigne, ist von hohem Werth, und in Verbindung mit der Aussicht, im hiesigen Laboratorium fortgesetzt über lebende Zitterrochen zu verfügen, be-

[1] Vergl. JOH. RANKE. Tetanus. Eine physiologische Studie. 1865. S. 16; — Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 95. 118.

[2] Diese Berichte, 1883. Bd. I. S. 392. 398. Durch ein Versehen ist hier gesagt, dass der Widerstand eines Streifes Zitterwels-Organ durch das Sieden von 100 auf 42 herabgesetzt wurde. Wie oben im Texte muss es heissen, die Stromstärke sei durch das Sieden im Verhältniss von 100 : 238 erhöht worden. Dass das Verhältniss der Stromstärken vor und nach dem Sieden in den Versuchen am Zitterwels kleiner war als in denen am Zitterrochen, rührte abgesehen von dem im Text angegebenen Umstand davon her, dass der Widerstand der damals zur Ableitung dienenden Zuleitungsgefässe mit Keilbäuschen und Eiweisshäutchen kleiner war als der der jetzt angewandten Zuleitungsröhren mit Thonspitzen. Eben deshalb aber näherte sich in den Versuchen am Zitterwelse jenes Verhältniss mehr dem wirklichen (reciproken) Verhältniss der Widerstände des Praeparates.

Digitized by Google

rechtigt sie zur Hoffnung, dass es vergönnt sein werde, das in der ersten Hast nur roh Skizzirte genauer auszuführen. Vielleicht wäre es rathsam, bis zu diesem Zeitpunkt die Erörterung des bisherigen Gewinnes zu verschieben. Doch kann es nicht schaden, wenn die jetzt hier stattfindende Sachlage dargelegt, und für die demnächst zu unternehmenden Schritte die leitenden Gesichtspunkte bezeichnet werden.

Die in beiden Richtungen gleich starke relativ negative Polarisation, welche einfach mit Stromdichte und -Dauer bis zu einer gewissen Grenze wächst, wollen wir bis auf Weiteres als gewöhnliche innere Polarisation betrachten, obschon, wie bei Muskel und Nerv, ihre Abhängigkeit vom Lebenszustande, ihre Vernichtung durch Siedhitze einiges Bedenken erregt.

Ungleich schwerer ist es jedenfalls, nach unseren neueren Erfahrungen, sich vom Wesen der absolut positiven Polarisation eine auch nur vorläufig befriedigende Vorstellung zu bilden. Daran kann kein Zweifel sein, dass sie im Gegensatz zur relativ negativen Polarisation gleichsam als der mehr physiologische Vorgang erscheint. Ihre Abhängigkeit vom Lebenszustand ist grösser; am absterbenden Organ schwindet sie zuerst. Es giebt nun aber zwei verschiedene Arten sie zu deuten. Die erste Art besteht darin, sie nebst dem Organstrom als Nachwirkung eines durch elektrische Reizung ausgelösten Schlages anzusehen, die zweite darin, sie als Folge einer durch den homodromen Strom unmittelbar bewirkten säulenartigen Anordnung der elektromotorischen Molekeln zu betrachten.

Beim ersten Blick scheinen für die erste Auffassung sehr starke Gründe zu sprechen. Da wir den Schlag selber durch säulenartige Anordnung elektromotorischer Molekeln erklären, kann man fragen, worin denn diese Anordnung und die durch den homodromen Strom unmittelbar erzeugte, der absolut positiven Polarisation entsprechende, sich von einander unterscheiden sollen, weshalb nicht letztere stets zu einem Schlag ausarte. Die zweite Annahme, wonach die absolut positive Polarisation durch den homodromen Strom unmittelbar bewirkt würde, nicht aber durch den heterodromen Strom, bürdet dem Organ eine neue und dunkle Eigenschaft mehr auf. Freilich scheint auch die erste Annahme Ähnliches mit sich zu bringen, sofern dabei nur der homodrome Strom den Schlag auslösen würde. Man kann aber dieselbe Reihe der Erscheinungen, welche Fig. 7 zu erläutern bestimmt war, auch ableiten, wenn man den heterodromen Strom neben relativ negativer, absolut positiver Polarisation einen Schlag erzeugen lässt; er muss zwar viel schwächer bleiben als der durch den homodromen Strom erzeugte, aber hierfür bietet wenigstens das Gesetz der Zuckungen eine Analogie.

Digitized by Google

Bei alledem bleiben bei der ersten Erklärung solche Bedenken zurück, dass ich nicht wage, ihr rückhaltlos zuzustimmen. Zunächst ist zu bemerken, dass sie auf der Voraussetzung fusst, die wir der Einfachheit halber oben machten, die aber doch unbewiesen ist, dass der heterodrome Strom unfähig sei, relativ positive Polarisation zu erzeugen. Gewiss ist nur, dass solche Polarisation noch nicht gesehen wurde, doch könnte sie, schwächer als die homodrome absolut und relativ positive, stets von der relativ negativen Polarisation verdeckt gewesen sein. Dies ist sogar die Vorstellung, die wir unserer Construction in Fig. 7 zu Grunde legten.

Sodann ist es keinesweges so sicher, dass es nicht zwei Zustände geben könne, welche, obschon beide mit säulenartiger Anordnung der Molekeln verknüpft, und in ihrer äusseren Wirkung einerlei, im Inneren der elektrischen Platten verschieden sind; deren einer dem Schlage, der andere der absolut positiven, homodromen Polarisation entspreche. Der Organstrom, die Nachwirkung des Schlages nach der ersten Annahme selber beweisen, dass nicht jede absolut positive Wirkung Schlag ist.

Nun kommt es aber in Versuchsreihen an frischeren Praeparaten zuweilen vor, dass zuerst eine ungemein starke Wirkung erfolgt, welche die Scale aus dem Gesichtsfelde schleudert, und in der man zweifellos die Nachwirkung eines Schlages, wenn nicht dessen letzte Theile selber erkennt. Dies Phaenomen sieht ganz anders aus als die gewöhnliche absolut positive Polarisation, die man bei öfterer Wiederholung des Versuches am nämlichen Praeparat unter denselben Umständen erhält, indem es keine der ursprünglichen Stärke proportionale Nachhaltigkeit zeigt. Einen ähnlichen zeitlichen Verlauf beobachtet man an der Nachwirkung der durch mittelbare Reizung des Praeparates (Abschneiden heraushängender Nervenstämmchen) ausgelösten Schläge. Die Art, wie von hier ab die absolut positiven Ausschläge mit vollkommener Regelmässigkeit, der Natur der Stromstösse und der Leistungsfähigkeit des Praeparates entsprechend, tagelang mit abnehmender Stärke, zuletzt nur noch spurweise erscheinen, macht gar nicht den Eindruck, als handele es sich um einen der Muskelzuckung verwandten Auslösungsvorgang.

Hier ist der Ort, von einem bisher noch nicht ausdrücklich behandelten Punkte zu sprechen, der, obschon von grösster Wichtigkeit, in rein thatsächlicher Beziehung noch durchaus nicht hinlänglich aufgeklärt ist, das ist die Abhängigkeit der absolut positiven Polarisation von der Stromdichte. Während ich lange geglaubt hatte, dass es für die Erzeugung dieser Polarisation eine hohe Schwelle der Stromdichte gebe, fand ich zu spät, an Praeparaten des letzten von mir geopferten Fisches, dass unter Umständen schon der Strom von Einem

Digitized by Google

Grove starke absolut positive Polarisation erzeuge; wobei aber die Besonderheit sich kund gab, die mich vermuthlich früher getäuscht hatte, dass diese Wirkung rasch ein Ende nahm. Wurde jetzt die Zahl der Säulenglieder angemessen vermehrt, so erfolgten wieder die gewohnten Wirkungen (Reihe 1). Doch war es mir noch nicht möglich, mich in dem Gedränge schwankender Erscheinungen, von dem ich mich hier umgeben sah, sicher zurechtzufinden. Eine sehr sonderbare Art von Bewegung des Magnetspiegels kehrte von Zeit zu Zeit wieder, ohne dass es mir gelang, ihren Sinn zu durchschauen, geschweige sie willkürlich hervorzurufen. Sie bestand darin, dass das Scalenbild nicht wie sonst vom Maximum der Ablenkung herabfiel, sondern gleichsam schnellend zurückgeworfen wurde.

Zu spät leuchtete mir eine Versuchsweise ein, mit deren Hülfe, sobald ich wieder über Zitterrochen gebiete, die Entscheidung zwischen den beiden einander hier entgegengestellten Auffassungen der absolut positiven Polarisation gelingen zu müssen scheint. Sie besteht darin, das Organpraeparat, statt es einem einzelnen Stromstoss auszusetzen, mit Wechselströmen zu tetanisiren. Ich setzte dies schon in's Werk, indem ich die Wippe, statt des Säulenkreises, den primären Kreis des Inductoriums schliessen liess. Wäre die absolut positive Polarisation nichts als Nachwirkung des Schlages, so müsste sie nach kurzem Tetanisiren mit grösster Stärke auftreten. Dies war aber nicht der Fall; auch bei sehr kräftiger Induction, mit der gewöhnlichen Einrichtung des Inductoriums, erfolgte nur schwache Polarisation in dem Sinne, als wären die Öffnungsschläge allein vorhanden, nämlich absolut und relativ positive Polarisation bei homodromen, relativ negative, absolut positive Polarisation bei heterodromen Öffnungsschlägen. Nach länger fortgesetztem Tetanus des Zitteraal-Organes fand Sachs dessen Strom, statt wie nach einem einzelnen Schlage verstärkt, vielmehr etwas geschwächt (s. oben S. 211). Doch ist nicht daran zu denken, daraus den Erfolg meines Versuches zu erklären. Leider konnte ich ihn bisher nur wenigemal bei gesunkener Leistungsfähigkeit des Organs anstellen, so dass ich seinem Ergebniss noch nicht völlig traue.

Noch eine Versuchsweise liegt sehr nahe, welche unter gewissen Bedingungen hier zum Ziele führen könnte; man braucht nur zu beobachten, ob auch bei längerer Schliessungszeit der homodrome Strom seine Überlegenheit bewahrt. Ist dies der Fall, so kann die positive Polarisation nicht einerlei mit dem Schlage sein, denn dieser kann bei längerem Hindurchgang eines beständigen Stromes durch das Organ doch nur im Augenblick der Schliessung sich zum Säulenstrom hinzufügen. Ich habe nun in der That auch bei 1″, 5″, ja 20″ Schliessungszeit jene Überlegenheit noch gesehen (Reihe 8, 15, 16, 25); allein die Ver-

Digitized by Google

suche dieser Art werden erst dann beweiskräftig, wenn die Hypothese von einem irreciproken Widerstande des Organes völlig beseitigt ist.

Wie man sieht, bleibt nichts übrig, als bis zu weiteren Erfahrungen, denen aber der Weg klar vorgezeichnet ist, sich in Geduld zu fassen. Die nächste Sendung Zitterrochen wird uns der Entscheidung der hier gestellten Frage wohl einen Schritt näher bringen.

§. XIV. *Über die elektromotorischen Wirkungen der elektrischen Nerven des Zitterrochen.*

Die einzigen Versuche über die elektromotorischen Wirkungen elektrischer Nerven, welche es bisher gab, waren die von mir am Zitterwels angestellten. Der Nerv gab zwischen Längs- und Querschnitt keinen Strom in der Ruhe und keine negative Stromschwankung im Tetanus; dagegen gab er mit zwei Grove schwach aber sicher Elektrotonusströme.[1] Seine Leistungsfähigkeit war wohl schon ziemlich tief gesunken, doch wäre nicht zu verwundern, wenn auch der ganz frische Nerv Ruhestrom und negative Schwankung scheinbar versagte, da der Querschnitt der einzigen in der Axe des Nerven verlaufenden Faser zu dessen Gesammtquerschnitt sich verhält wie 1 : 90—104.[2] Wegen der erstaunlichen Besonderheit im Baue des elektrischen Zitterwels-Nerven war es also als wäre noch nie ein elektrischer Nerv elektromotorisch geprüft worden, und leider liess sich Sachs die Gelegenheit entgehen, am Zitteraale diese Lücke auszufüllen.[3]

Auch die italiänischen Elektrophysiologen benutzten den ihnen hier von Natur zustehenden Vorsprung nicht, und so blieb es seltsamerweise mir vorbehalten, über vierzig Jahre nach Entdeckung des Nervenstromes, im physiologischen Institut dieser nordischen Hauptstadt zuerst einen Zitterrochen-Nerven in den Bussolkreis zu bringen. Dies geschah gleich das erste Mal, dass ich einen Zitterrochen tödten durfte, am 13. Juni vorigen Jahres. Da man nicht wissen konnte, wie rasch die Nerven in der Sommerhitze absterben würden, bat ich Hrn. Prof. Christiani die Untersuchung vorzunehmen, während ich selber mit den Polarisationsversuchen am Organ beschäftigt war. Hr. Prof. Fritsch hatte die Güte, die ihm so vertrauten Nerven zu praepariren.

---

[1] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 645.

[2] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 645. Anm. — Durch einen Druckfehler steht hier 8950 statt 89.50.

[3] Untersuchungen u. s. w., S. 171.

Digitized by Google

Die acht elektrischen Nerven eines grösseren Zitterrochen, jederseits vier, sind, wie ich es erwartet hatte,[1] ein vorzügliches Versuchsobject. Sie sind leicht in einer Länge von 3—4^{cm} unverzweigt darstellbar, und an mittelgrossen Thieren bis zu 2.5^{mm} dick. Wenn sie nicht als elektrische Nerven sich von anderen Nerven unterscheiden, wird man an ihnen bisher unerreichbare Aufschlüsse über die allgemeine Physik der Nerven erhalten können.

1. Ruhestrom der elektrischen Nerven des Zitterrochen.

Kurz vor den Kraftmessungen an den elektrischen Nerven wurde die Kraft des N. ischiadicus vom Frosch an denselben Vorrichtungen gemessen, und sie lieferte die gewöhnlichen Werthe, 0.014 bis 0.022 Raoult. Die Stücke von elektrischen Nerven hatten gleiche Länge mit den Stücken Ischiadnerv, 12 bis 15^{mm}; ihre grössere Dicke liess bei gleicher specifischer elektromotorischer Kraft grössere Leistung im Bussolkreis erwarten. Dies bestätigte sich nicht. Hr. Christiani erhielt von den elektrischen Nerven

I	II	III	II_b
0.0054	0.0086	0.0054	0.0089.

Die Zahl unter II_b gehört einem anderen, am 27. Juni geopferten Thier an. Die grösste von Hrn. Christiani gefundene Kraft ist über zweimal kleiner als die der Froschnerven, über dreimal kleiner als die der Vogelnerven und der Säugernerven mit Ausnahme der Pferdenerven, und über fünfmal kleiner als die der Hummernerven nach Hrn. Fredericq's Bestimmungen.[2]

Dies auffallende Ergebniss forderte zu näherer Prüfung auf, welche ich im Laufe des Winters an zwei Zitterrochen vornahm. Vielleicht wegen der Kälte und des Hungers, unter denen die Thiere seit mehr als zwei Monaten litten, erhielt ich aber durchschnittlich noch kleinere Werthe als Hr. Christiani: das Mittel aus seinen vier Messungen ist 0.007075, aus meinen sechszehn nur 0.005925. Nur in Einem Falle, wo der Nerv besonders frisch war, fand ich höhere Werthe, und einmal stieg sogar die Kraft auf 0.01123, eine Grösse, wie man sie auch an schwächeren Froschnerven und an Krötennerven antrifft, die jedoch viel dünner sind.[3] Sofern meine Messungen die von Prof. Christiani einfach bestätigen, würde ich nicht weiter davon reden, allein ich stiess dabei auf ein Verhalten, welches mir wichtig genug erscheint, um es in folgender Tabelle vorzuführen.

---

[1] Diese Berichte, 1883. Bd. I. S. 387.

[2] Archiv für Physiologie. 1880. S. 68. 71.

[3] Vergl. Wedenskii, Notiz zur Nervenphysiologie der Kröte. Ebenda, 1883. S. 310.

Digitized by Google

Elektromotorische Kraft der elektrischen Zitterrochen-Nerven in Raoult.

		Zwischen Aequator und peripherischem Querschnitt (+ P, ↑)	Zwischen Aequator und centralem Querschnitt (+ C, ↓)	Zwischen beiden Querschnitten (P — C) beobachtet (D)	Zwischen beiden Querschnitten (P — C) berechnet (Δ)	D — Δ
Dritte Torpedo, 29cm lang, getödtet am 13. XII. 83.	L IV	0.00529	0.00284	—	—	—
	L III	0.00658	0.00400	—	—	—
	L II	0.00724	0.00458	+ 0.00160	+ 0.00265	— 0.00105
	L I	0.00366	0.00185	+ 0.00194	+ 0.00181	+ 0.00013
	R I	0.00699	0.00489	+ 0.00119	+ 0.00210	— 0.00091
	R II	0.00680	0.00583	+ 0.00105	+ 0.00097	+ 0.00008
Vierte Torpedo, 25cm lang, getödtet am 28. XII. 83.	I	0.01123	0.00970	+ 0.00150	+ 0.00153	— 0.00003
	II	0.00757	0.00577	+ 0.00187	+ 0.00180	+ 0.00007
	Trigeminuszweig	0.00361	0.00301	+ 0.00195	+ 0.00060	+ 0.00135

Die römischen Zahlen sind die Ordnungszahlen der elektrischen Nerven, L und R bedeuten links und rechts. Alles Übrige spricht für sich selbst. Wie man sieht, giebt sich in diesen Versuchen durchweg grössere Negativität des peripherischen Querschnittes gegen den Aequator zu erkennen. Nachdem mir dies in den beiden ersten Versuchen aufgefallen war, leitete ich fortan das Stück Nerv mit den Thonschilden auch von beiden Querschnitten ab. Die letzte Spalte zeigt, wie genau die so erhaltene Kraft mit dem Unterschied der Kräfte zwischen Aequator und beiden Querschnitten stimmt. Um die Sicherheit der gefundenen Regel auf die Probe zu stellen, bat ich Hrn. Fritsch, das eine Ende der Nervenstücke mit einem Fäserchen bunter Flockseide zu bezeichnen, und mir das Stück zu reichen ohne mir zu sagen, welches Ende das centrale, welches das peripherische sei. Ausnahmslos gab ich dies auf den ersten Blick nach dem im Nerven von Querschnitt zu Querschnitt aufsteigenden Strome richtig an. Auch zwischen symmetrischen, den Querschnitten nahen Längsschnittspunkten liess sich der aufsteigende Strom nachweisen. Es wird von Interesse sein, ihm am unversehrten Nerven nachzuforschen.

Das erste Mal, dass diese Thatsachen gesehen wurden, war der Zitterroche auf die oben S. 205 angegebene Art durch Ausstanzen der elektrischen Lappen getödtet worden, und da ich erst einige Zeit nachher zur Untersuchung der Nerven kam, war die Möglichkeit da, dass die geringere Negativität des centralen Querschnittes auf dem nach der Peripherie zu fortschreitenden Absterben der Nerven beruhe.

Digitized by Google

Bei dem vierten Zitterrochen, dessen Nerven die Zahlen in den drei letzten wagerechten Reihen der Tabelle lieferten, beugte ich diesem Verdacht dadurch vor, dass ich, statt den Fisch zu enthirnen, mit dem oben S. 206 erwähnten Messer einen Sagittalschnitt in einiger Entfernung von den Kiemen, und unmittelbar darauf einen zweiten durch die Kiemen selber, der Schädelkapsel nahe, führte. Zwischen diesen beiden, fast gleichzeitigen Schnitten, lagen nunmehr die Nervenstücke, deren beide Querschnitte also gleich alt waren. Hier konnte von einem durch das Absterben bewirkten Unterschied nicht mehr die Rede sein, und doch war der elektromotorische Unterschied ebenso ausgesprochen wie gesetzmässig vorhanden. Auch zwischen den beiden Querschnitten eines aus dem Organ geschälten, vom Centrum so weit entlegenen Nervenzweiges, dass das örtliche Absterben ihn noch nicht füglich erreicht haben konnte, fänd ich den aufsteigenden Strom.

Schon vor Jahren (1867) bin ich am Froschischiadicus einer ähnlichen Regel nachgegangen, doch gelangte ich zu keiner Entscheidung; die Mehrzahl meiner Versuche sprach dafür, dass hier der centrale Querschnitt der negativere, der Nerv von Querschnitt zu Querschnitt absteigend durchflossen sei.[1] Es versteht sich, dass jetzt diese Untersuchung an verschiedenen Nerven, sowohl centripetal wie centrifugal thätigen und gemischten, wieder aufzunehmen ist. Es wird sich bald herausstellen, worum es sich handele: ob um eine Eigenthümlichkeit der elektrischen Nerven, ob um ein mit deren centrifugaler Function zusammenhängendes Grundgesetz, oder endlich ob um einen allen Nerven gemeinsamen und nur in Ernährungsverhältnissen begründeten, mehr gleichgültigen Unterschied. Der Erfolg am gemischten Froschischiadicus scheint zu lehren, dass die Sache etwas mit der Function zu thun habe. Der letzte Versuch der Tabelle, an einem Trigeminuszweige, widerspricht dem nur scheinbar, sofern dieser Zweig, als secretorischer Nerv, auch als centrifugal thätiger anzusehen sein möchte. Dagegen scheint dieser Versuch schon zu zeigen, dass die grössere Negativität des unteren Querschnittes nicht den elektrischen Nerven als solchen eigenthümlich sei, was auch wenig wahrscheinlich war.

Es fragt sich nun aber noch, welche Bewandtniss es mit der geringen elektromotorischen Kraft der elektrischen Zitterrochen-Nerven habe. Der Versuch am Trigeminuszweige scheint gleichfalls schon zu beweisen, dass ihnen diese Eigenthümlichkeit nicht wegen der elektrischen Function zukomme. Doch wäre es möglich, dass sie auf

[1] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 196; — Archiv für Physiologie. 1880. S. 68 Anm.

Digitized by Google

die elektrische Immunität der Zitterrochen und auf die von BOLL nachgewiesene hohe Reizschwelle ihrer Muskelnerven[1] sich bezöge. Hier sind weitere Erfahrungen nöthig. Ein paar am Sehnerven des Karpfen und des Hechtes nebenher angestellte Versuche lieferten noch kein mittheilbares Ergebniss.

2. Negative Schwankung des Stromes der elektrischen Nerven des Zitterrochen bei der Thätigkeit.

Der oben in Hrn. CHRISTIANI's Versuchen mit II bezeichnete Nerv lag mit Längs- und Querschnitt auf und hielt den Faden auf 60^{sc}. Mittels des runden Compensators wurde der Faden auf Null zurückgeführt. Als nun Hr. CHRISTIANI den Nerven mittels des Schlitteninductoriums tetanisirte, erhielt er negative Schwankung im Betrage von 5^{sc}, also $^1/_{12}$ der ursprünglichen Stromstärke. In einem anderen Falle, wo der Nerv schon zu Elektrotonusversuchen gedient hatte, betrug die compensirte Ablenkung 120, die Schwankung 90^{sc}, also volle $^3/_4$ der Stromstärke; nach Durchschneiden und Wiederzusammenkleben des Nerven zwischen den beiden Elektrodenpaaren war jede Wirkung beim Tetanisiren verschwunden.

Ich machte einen ähnlichen Versuch an dem in der Tabelle mit R. I bezeichneten Nerven, und erhielt, bei 52^{sc} Ablenkung, HELMHOLTZ'scher Anordnung und

100^{mm} Rollenabstand 0,
50 » » » 2,
25 » » » 5^{sc}

negativen Ausschlages, also eine Schwankung von $^1/_{10}$. Mit einem in Seewasser getränkten Wollfaden statt des Nerven blieb jede Wirkung aus.

Soweit war Alles in Ordnung, aber sehr befremdlich ist, dass sowohl Hr. CHRISTIANI wie ich ausser der negativen Schwankung einen schnellen positiven Vorschlag, ich auch zweimal einen solchen Nachschlag (so zu sagen) erfolgen sahen. Diese positiven Zucke des Magnetspiegels können auf keinen Fehler der Versuchsanordnung (Stromschleifen, Fernwirkungen u. d. m.) geschoben werden, weil sie in einem Zeitabstand von einem halben Jahre zuerst von Hrn. CHRISTIANI, dann von mir an durchaus verschiedenen Vorrichtungen wahrgenommen wurden, und weil nach Durchschneiden des Nerven oder mit einem feuchten Wollfaden nichts davon erschien. Ob hier etwas den elektrischen Nerven Eigenthümliches vorliege, müssen weitere Versuche entscheiden. Wie dem auch sei, über der Beobachtung dieser unerwarteten Nebenwirkung und über dem Aufsuchen des vermeintlichen

[1] Untersuchungen u. s. w. S. 265.

Digitized by Google

ihr zu Grunde liegenden Versuchsfehlers wurde eine Beobachtung versäumt, welche hier nachzuholen sein wird: nämlich die der Fortpflanzung der Schwankung nach beiden Richtungen in einem rein centrifugal wirkenden Nerven. Entsprechende Beobachtungen wurden bisher erst von mir an den Spinalnerven-Wurzeln vom Frosch gemacht.[1]

3. Elektrotonusströme an den elektrischen Nerven des Zitterrochen.

Auch bei Untersuchung der Elektrotonusströme an den elektrischen Nerven ist Prof. CHRISTIANI auf Unregelmässigkeiten gestossen, welche sich vorläufig keinem sicheren Gesetz unterordnen lassen, und der Aufklärung durch weitere Versuche bedürfen. Ich habe am vierten Nerven der rechten Seite des am 13. December geopferten Fisches, bei 10^{mm} Länge der drei Strecken, mit einem bis fünf Grove im elektrotonisirenden Kreise, anelektrotonische und katelektrotonische Zuwachse regelmässig erfolgen sehen; erstere bis zu einer gewissen Grenze steigend und erst dann allmählich abnehmend, letztere sogleich sinkend. Nach Durchschneiden und Wiederzusammenkleben des Nerven zwischen der erregten und der abgeleiteten Strecke blieben schwache, zum Theil verkehrte Wirkungen übrig, welche auf die bei der Dicke des Nerven nicht ganz zu vermeidenden Stromschleifen zu deuten waren. Die absolute Grösse der beobachteten Zuwachse war so beträchtlich, dass 10000 Windungen erst in 50^{mm} Entfernung vom Spiegel passende Ablenkungen gaben; über ihre verhältnissmässige Grösse liess sich aus Mangel an einem Vergleichspunkt nicht urtheilen. Auch hier wurde leider versäumt, den Elektrotonus abwechselnd in centripetaler und in centrifugaler Richtung sich ausbreiten zu lassen. In Prof. CHRISTIANI's viel zahlreicheren Versuchen war dies der Fall; aber die erwähnten Unregelmässigkeiten stellten sich bei beiden Richtungen ein, und es bleibt wiederum nichts übrig, als sich bis zu neuen Versuchen zu gedulden.

Die Versuche über Polarisation des elektrischen Nerven sind noch nicht weit genug gediehen, um etwas Sicheres darüber mittheilen zu können. Die elektromotorische Kraft der Muskeln zu messen fand ich noch nicht Zeit. Hoffentlich bringt das Frühjahr in einer neuen Sendung Zitterrochen die Gelegenheit, auch die hier angebahnten Untersuchungen gemächlicher und gründlicher, als es im ersten Anlauf möglich war, weiterzuführen, sowie zeitmessende Versuche anzustellen.

[1] Untersuchungen über thierische Elektricität. Bd. II. Abth. I. S. 589.

Digitized by Google

Anhang.

In den folgenden Tabellen, welche nur einen Theil meiner Versuchsergebnisse enthalten, bedeutet die römische Zahl die Anzahl der Grove, *SZ* die Schliessungszeit, *OS* die Organstromkraft, *L* die Länge der Säulen des Organpraeparates, *P* (Periode) die Zeit zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Versuchen. Das Zeichen ‖ will sagen, dass der Versuch an demselben Praeparat unter den angegebenen neuen Bedingungen fortgesetzt wird. Die Ablenkungen an Bussole (*S*), mit Ausnahme der in Reihe 25, wo dies keinen Sinn gehabt hätte, sind auf die Ablenkung reducirt, welche bei gleicher Stromstärke 5000 Windungen in 30^{mm} Abstand vom Magnetspiegel, sämmtliche Ablenkungen an Bussole (*P*) auf die, welche 50 Windungen in 20^{mm} Abstand hervorgebracht haben würden. Daher rühren die bei grösserer Stärke und Dauer der Ströme vorkommenden, weit über die Grenzen der Scale hinausgehenden grossen Zahlen (vergl. die Abhandlung über secundär-elektromotorische Erscheinungen u. s. w. a. a. O. S. 356). $500 + x$ steht, wie schon früher, für eine Ablenkung über die Grenzen der Scale hinaus, welche also nicht reducirt werden konnte; ein Strich in einem Felde zeigt an, dass aus irgend einem Grunde die Beobachtung verloren ging; wie denn auch *OS*, *L* und *P* nicht überall verzeichnet sind.

Die Ordnungszahlen der Zitterrochen (1., 2., ... Torp.) entsprechen der Reihenfolge der Tage, an denen sie geopfert wurden: 13. und 27. Juni, 13. und 28. December vorigen, 2. Februar dieses Jahres. Ihre Längen in derselben Reihenfolge waren 29, 36, 29, 25, 26^{cm}. — 'Frisch' bedeutet, dass der Versuch am gleichen Tage, 2., .. Tag, dass er erst an diesem Tage nach dem der Tödtung angestellt wurde.

1.

5. Torp. — 2. Tag. — OS noch positiv.

SZ 0″0764

I	S	−234	↑	+80; +10	↓	−4	↑	+3	↓	0	↑	0; 0;	‖	X	↑	+22	↓	−15	↑
	P	4		9; 7·5		4·5		5		4·5		8; 8·5				82		71	

	+25	↓	−50	↑	−12	↓	−34				
	78		75		79		69				

Die Reihe zeigt, dass der homodrome Strom schon von Einem Grove absolut und relativ positive Polarisation zu erzeugen vermag, jedoch nur kurze Zeit lang, wonach ein stärkerer Strom noch wie gewöhnlich wirkt.

Digitized by Google

2.

Wie Reihe 1.

SZ 0″0764

II	S	↑	+ 357	↓	— 110	↑	+ 85	↓	— 5	↑	+ 74	↓	— 0.5	↑	+ 62	↓	0 ‖ ↓ — 85
	P		7.5		7		8.5		8.5		8		7.5		7.5		8 ‖ —

Die Reihe scheint zu zeigen, dass bei kurzer Schliessung eines schwachen Stromes die relativ negative Polarisation bald so zurücktritt, dass fast nur noch homodrome, absolut und relativ positive Polarisation übrig bleibt.

3.

3. Torp. — 2. Tag. — OS 0.0129. — 2′P.

SZ 0″0063

V	S	↑	+ 500 + x	↓	— 350	↑	+ 190	↓	— 118	↑	+ 160	↓ — 179
	P		5.5		2.25		4.2		3.6		4.2	2.8

Die Reihe lehrt, dass unter Umständen schon fünf Grove die positive und negative Polarisation sehr schön hervortreten lassen.

4.

2. Torp. — Frisch. — L 23^{mm}. — OS 0.0145. — 2′P.

SZ 0″0764

V	S	↑	+ 35	↓	— 126	↑	—	↓	— 122	↑	{— 3 / + 15	↓	— 70	↑	+ 28		
	P		29.5		23		28		24.5		28		24.5		28		

Der trotz der scheinbar günstigeren Bedingungen minder günstige Erfolg rührt schwerlich von der über zehnmal grösseren Länge der Schliessungszeit her, sondern von den bisher jeder Beherrschung spottenden Unregelmässigkeiten dieser Versuche. Bemerkenswerth ist die doppelsinnige Wirkung beim dritten homodromen Stromstoss.

5.

4. Torp. — Frisch.

SZ 10″580

V	S	↑	— 200	↓	— 190	u. s. f.
	P		500 + x		485 bis 471	

Bei längerer Schliessungszeit erfolgt nur noch negative Polarisation. Der polarisirende Strom sinkt bei solcher Dauer, trotz der unpolarisirbaren Elektroden, um eine kleine Grösse.

Digitized by Google

6.

3. Torp. — 2. Tag. — $2^1/_2$″-P.

SZ 0″.0032 SZ 1″.024

X S	− 32	+ 19	− 54	+ 40	− 4	+ 39	− 3	+ 35	− 2	‖	− 113	− 79	− 94	u. s. f.
P	8.2	8.2	6.6	8.2	6.6	6.6	6.6	11.5	6.6	‖	301	318	318	

In dieser Reihe mit möglichst kleiner Schliessungszeit zeigt sich wieder wie in Reihe 2 das Zurücktreten der negativen Polarisation, welche sofort allein das Feld behauptet, sobald die Schliessungszeit eine gewisse Grenze überschreitet. Auffallend, und an Ähnliches bei Zuckungsversuchen erinnernd, ist das Wachsen der Wirkungen während der ersten vier Stromwechsel.

7.

2. Torp. — Frisch. — L 25^{mm}. — OS 0.0079.

SZ 0″.0764

X S	+ 38	− 140	+ 55	− 58	+ 45	− 42	+ 44	− 30
P	68.9	42.7	68.9	58.8	62.4	57.3	62.4	59

Bei über zehnmal längerer, obschon noch immer kurzer Schliessungszeit macht sich die negative Polarisation doch schon stärker geltend als in voriger Reihe.

8.

3. Torp. — Frisch. — OS 0.0133. — 3′-P.

SZ 21″.78

X S	− 424	− 260	− 398	− 270
P	564 bis 515	589 bis 564	548 bis 484	573 bis 548

Diese Reihe zeigt die rein negative Polarisation bei längerer Schliessungszeit, und das Sinken des polarisirenden Stromes um einen erheblichen Bruchtheil.

9.

3. Torp. — 2. Tag. — OS 0.0044. — $1^1/_3$′-P.

SZ 0″.0032

XX S	+ 31	− 55	+ 57	− 5.5 ; 6	+ 58	− 3.5	44	− 3	+ 50	− 3.5	u. s. f.
P	12	6	14	6.5 ; 6.5	12	6.5	12	6	8.5	6.5	

Derselbe Erfolg wie bei X und gleicher Schliessungszeit (Reihe 6).

Digitized by Google

10.

2. Torp. — Frisch. — L 29^{mm}. 2′-P.

SZ 0″0764

XX	S	+280	−45	+50	−45	+44	−34	+34	−57	+30	−52	+26	−42	+23	−37	−9							
	P	274	91	266	92	237	104	237	108	232	112	232	104	224	125	208							
		16		17		18											28		29		30		
	S	−37	−10	−34	−14	−33	−16	−30	−18.5	−28	−20	−31	−21	−30	−23	−29							
	P	125	195	125	195	125	191	129	191	141	191	141	183	145	170	141							

In dieser Reihe, deren dreissig Stromwechsel bei der 2′-Per. eine Stunde dauerten, spricht sich am Vollständigsten das in Fig. 7 graphisch versinnlichte Gesetz aus. Vom 15. Wechsel ab deckt sich die Erscheinungsweise der Polarisationen mit der von Sachs am Zitteraal beschriebenen (s. oben S. 214 ff.).

11.

2. Torp. — 2. Tag. — OS 0.0045. — 2′-P.

SZ 0″0764 ‖ SZ 21″78

XX	S	+520	−140	+65	−95	+31	‖	−1509	−355	−1161	−606	−954	−632
	P	−	72	154	77	147	‖	929 bis 864	1161 bis 1071	1161 bis 1079	1393 bis 1213	1316 bis 1218	1548 bis 1342

Die Versuche mit kurzer Schliessungszeit, welche nur eine Wiederholung der vorigen Reihe sind, dienen zum Beweise, dass das Praeparat noch leistungsfähig war. Die Ablenkungen der Bussole (*P*) bei der längeren Schliessungszeit stimmen gut mit den in Reihe 8 mit nur X Grove bei gleicher Schliessungszeit erhaltenen. Ihre mit der Versuchsdauer wachsende Grösse rührt von Erwärmung des Praeparates her. Die Ablenkungen durch die negative Polarisation in dieser zweiten Hälfte der Reihe sind auffallend gross.

12.

1. Torp. — 2. Tag. — OS 0.0059. — 2$^1/_2$′-P.

SZ 0″0629

XXX	S	−58	+99	−50	+50	−40	+28	−38	+12	−34		
	P	239	260	256	267	260	260	260	256	253		

Fortan kehren im Wesentlichen dieselben Dinge wieder.

13.

2. Torp. — Frisch. — L 20^{mm}. — OS 0.0090. — 2′-P.

SZ 0″0764

XXX	S	−128	+80	−134	+130	−73	+49		
	P	134	284	146	262	151	268		

Digitized by Google

14.

2. Torp. — 2. Tag. — L 17^{mm}. — OS 0.0053. — 2′-P.

SZ 0″319

XXX	S	↓	− 500 − x	↑	+ 1·0	↓	− 325	↑	+ 56	↓	− 115	↑	− 10	↓	− 150	↑	− 37
	P	↓	370	↑	79(	↓	376	↑	766	↓	370	↑	684	↓	380	↑	654

15.

2. Torp. — Frisch. — L 14^{mm}.

SZ 1″024 SZ 5″202

XXX	S	↑	+ 150*	↓	− 500 − x	↑	− 145	↓	− 500 − x	↑	− 190	‖	↑	− 500 − x	↓	− 500 − x
	P	↑	1712	↓	1012	↑	1326	↓	1012	↑	1064	‖	↑	—	↓	5475

Hier bot sich die merkwürdige Erscheinung dar, dass die absolut und relativ positive Ablenkung (*) sich ganz langsam entwickelte, offenbar durch das entsprechende Sinken negativer Polarisation, welches aber in diesem Fall nicht schnell genug geschah, um Gelegenheit zu doppelsinniger Ablenkung zu geben.

16.

1. Torp. — Frisch. — L 12^{mm}. — 3′/$_3$-P.

SZ 5″202

XXX	↑	− 2288	↓	− 3840	↑	− 2247	↓	− 2105
	↑	2886	↓	3105	↑	3461	↓	2434

17.

1. Torp. — 3. Tag. — L 15^{mm}. — OS? — 2′-P.

SZ 0″0629

XXX	S	↑	− 87	↓	− 84	↑	− 90	↓	− 89
	P	↑	513	↓	513	↑	544	↓	560

Das abgestorbene Organ giebt keine positive Polarisation mehr.

18.

1. Torp. — Frisch, aber abgebrüht. — 2′/$_2$-P.

SZ 5″202

XXX	↑	− 30	↓	− 21	↑	− 21	↓	− 13
	↑	8773	↓	9830	↑	11204	↓	—

Durch die Siedhitze ist die negative Polarisation so gut wie vernichtet, dagegen der Widerstand des Praeparates vermindert, wenn auch wohl nicht im Verhältniss, wie es sich aus dem Vergleich mit Reihe 16 zu ergeben scheint (s. oben S. 224).

Digitized by Google

19.

1. Torp. — Frisch. — L 27mm. — OS 0.0083. — 2½'P.

SZ 0″0629

L	S	↑	+ 163	↓	− 184	↑	+ 45	↓	− 163	↑	{ − 20; + 16	{ − 41; + 11	↓	− 135	↑	{ − 49; + 2	↓	− 135
	P		543		390		465		407		457	457		394		390		407

Die Reihe interessirt durch das Vorkommen doppelsinniger Wirkungen.

20.

1. Torp. — Frisch. — L 27mm. — OS 0.0105. — 2½'P.

SZ 0″0629

L	S	↑	+ 756	↓	− 470	↑	+ 387	↓	− 384	↑	+ 153	↓	− 322	↑	+ 88	↓	− 337	↑	+ 20
	P		548		332		527		382		631		390		519		448		423

Nächst der gewaltigen positiven Anfangswirkung interessirt hier das Verhältniss zwischen homo- und heterodromer Stromstärke im primären Kreise (s. oben S. 219).

21.

Bei L und 21″8 Schliessungszeit wurde die Scale durch die negative Polarisation in beiden Richtungen aus dem Felde geschleudert. Es verlohnte sich nicht hier noch grössere Zahlen als die in Reihe 16 zu verzeichnen.

22.

5. Torp. — 2. Tag. — OS 0.0220.

Polarisation bei quergerichtetem polarisirenden Strom.

		SZ 0.0764					SZ 1″024			
XX	S	− 85 ←	− 20 →	− 10 ←	+ 25 →	− 60 ←	− 35 →	− 54 ←	− 38 →	− 42 ←
	P	652	665	669	665	677	—	5465	5539	5560

Die grosse Stärke des polarisirenden Stromes rührt von der Kürze und dem grossen Querschnitt der ihm bei quergelagertem Praeparat dargebotenen Bahn her. In querer Richtung scheint (abgesehen von der unverständlichen Wirkung im 4. Versuch) keine positive, nur schwache negative Polarisation stattzufinden.

Digitized by Google

23.

5. Torp. — 2. Tag. — OS 0.0030.

Polarisation bei querer Ableitung.

SZ 0″0764

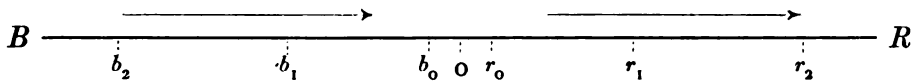
		r	s		r	s		
XX	S ↑	+ 190	— 140	Quer	32	17	0	0
	P ↓	134	75	abgeleitet	116	79	116	113

r und s bedeuten 'roth' und 'schwarz', die Farben der beiden Hälften der Scale, also die Seite, nach welcher der Spiegel abgelenkt wurde. Man sieht, dass bei querer Ableitung fast jede Wirkung ausbleibt.

24.

5. Torp. — Frisch. —

Nachweis der säulenartigen Anordnung der elektromotorischen Kräfte im polarisirten Organpraeparat.



BR stellt das als linearer Leiter schematisirte, von *B* zu *R* durch den Schlag, den Organstrom und den homodromen Strom durchflossene Praeparat vor. Beruhen die positive und negative homodrome und die negative heterodrome Polarisation auf säulenartiger Anordnung elektromotorischer Kräfte, so muss in allen Fällen zwischen beliebigen zwei Punkten der Strecke *BR* die Polarisation in gleichem Sinne, bei gleichem Abstand der ableitenden Spitzen in gleicher, bei grösserem Abstand und hinreichendem ausserwesentlichen Widerstande in grösserer Stärke erscheinen. $BR = L$ betrug 22^{mm}, b_2r_2 18^{mm}, b_0r_0 1.5^{mm}, $ob_2 = or_2$ 9^{mm}, b_1r_1 ungefähr ebensoviel. Um die Angaben nicht zu verwirren ist die in jeder Theilstrecke beobachtete, stets positive Organstromkraft fortgelassen.

A. Homodromer Strom, absolut und relativ positive Polarisation.

SZ 0″0764

		b_2r_2	b_0r_0	b_2r_2	b_0r_0		SZ 0″0764 b_1r_1	b_0r_0	b_1b_2	r_1r_2	b_1b_2	b_2r_2
XX	S ↑	+205	+20	+146	+6	Neues	+500+x	+148	+170	+31; +12	?	+20
	P ↓	171	163	159	159	Praeparat	213	180	167	159; 163	147	134

B. Homodromer Strom, absolut und relativ negative Polarisation.

SZ 1″024

		b_0r_0	b_1r_1	b_2r_2	ob_2	or_2	b_0r_0	b_2r_2
XX	S ↓	— 64	— 125	— 160	— 117	— 121	— 45	— 145
	P ↑	703	703	715	707	711	715	707

Digitized by Google

C. Heterodromer Strom, relativ negative, absolut positive Polarisation.

		SZ 0″0764							SZ 1″024			
		$b_0 r_0$	$b_2 r_2$	$o b_2$	$o r_2$	$b_0 r_0$	$b_2 r_2$	Neues Praeparat	$b_0 r_0$	$b_2 r_2$	$o r_2$	$b_2 r_2$
XX	S	− 10	− 105	− 30	− 45	− 10	− 47		− 78	− 215	− 70	− 250
	P ↓	71	75	75	79	79	75		761	744	757	736

25.

5. Torp. — Frisch.

Der Kreis der Bussole (*S*) bildet eine Nebenschliessung zum Praeparat (s. Fig. 8 A u. B u. S. 221 ff.).

		SZ 0″0764							SZ 1″024			
XX	S	230 ↑	150	216 ↑	158	193 ↑	162	190	↓ 255 ↑	245	255 ↑	255
	P	↓ 141	269 ↓	145	239 ↓	146	228 ↓	146	↓ 1162	1254 ↓	1179	1267

5000 Windungen in 21, in 36cm Abstand vom Spiegel der Bussole (*S*).

Digitized by Google

9. Bericht über die Wirksamkeit der Humboldt-Stiftung für Naturforschung und Reisen.

Von E. du Bois-Reymond,
Vorsitzendem des Curatoriums.

(Öffentliche Sitzung zur Feier des Geburtstages Seiner Majestät des Kaisers und Königs [St. XVI].)

Das Curatorium der Humboldt-Stiftung für Naturforschung und Reisen erstattet statutenmässig Bericht über die Wirksamkeit der Stiftung im verflossenen Jahre.

Diese Wirksamkeit erstreckte sich über drei bedeutende Reiseunternehmungen.

Zunächst hat die Stiftung den im October 1882 nach Deutschland zurückgekehrten Dr. Otto Finsch aus Bremen, der in ihrem Auftrag und mit ihren Mitteln drei Jahre lang die pacifische Inselwelt sammelnd durchforschte, in Stand gesetzt, sich der Bearbeitung seiner Reiseergebnisse und Sammlungen mit einiger Musse zu widmen. Nach seinen der Akademie eingereichten Berichten über den Fortschritt seiner Arbeiten hat Hr. Dr. Finsch im Laufe des Jahres die Herstellung von Gypsabgüssen oceanischer Köpfe nach den von ihm auf der Reise angefertigten Masken vollendet, und mit dankenswerther Unterstützung seitens der Berliner anthropologischen Gesellschaft einen wissenschaftlichen Katalog dieser Köpfe veröffentlicht, der als Supplementheft zur Zeitschrift für Ethnologie erschien. Dieser Katalog enthält zugleich eine ausführliche Darlegung der Beobachtungen, welche Hr. Dr. Finsch über die Rassenverhältnisse der pacifischen Inseln gemacht hat, nebst Abbildungen der Haupttypen nach photographischen Aufnahmen, Umrisszeichnungen von Händen und Füssen, Maasstabellen u. s. w. Hr. Dr. Finsch betrachtet als Hauptergebniss seiner Forschungen, dass kein durchgreifender Unterschied zwischen mikro- und polynesischen Stämmen besteht, dass vielmehr von den Carolinen bis nach Neu-Seeland, von den Sandwich-Inseln bis zum malayischen Archipel eine zusammengehörige Reihe von Varietäten derselben Rasse angesiedelt ist.

Sodann hat die Stiftung einen Beitrag zu den Kosten einer Reise geliefert, welche Hr. Dr. Paul Güssfeldt in die chilenischen Andes

Digitized by Google

grossentheils mit eigenen Mitteln unternahm. Als Reisender überhaupt durch seine westafricanische Expedition und durch viele Besteigungen ersten Ranges in den Schweizer Alpen gerade zu dieser Art geographischer Forschung in seltenem Maasse vorbereitet, beabsichtigte Dr. Güssfeldt für die mehr südliche Cordillera Ähnliches zu leisten, wie Mr. Whymper, der Besieger des Chimborazo, für die äquatorialen Andes. Er begann mit mehreren kleineren Ausflügen, in welchen er sich einen brauchbaren Stab eingeborener Begleiter heranzog, da der Schweizer Bergführer, den er bis nach Valparaiso mitgenommen hatte, hier erkrankte und zurückgesendet werden musste. Auf einer dieser Reisen entdeckte er im Cajon de los Cipreses, einem Seitenthal des Cachapual, einen vier Stunden langen, geradlinig hingezogenen Gletscher erster Ordnung, den er trigonometrisch vermass und photographirte, da man das Vorhandensein solcher Gletscher in der centralen Andeskette Chile's bisher bezweifelte.

Eine neue Expedition des Reisenden durchschnitt ein geographisch fast unbekanntes Gebiet. Sein Weg führte diesmal durch ein höheres Seitenthal des Cachapual, den Cajon de la Leña, und stieg von dort zum Kamm auf; die Passhöhe, welche er mit vier Leuten, zehn Pferden und sieben Maulthieren überschritt, liegt 4072^{m} hoch, und ist wahrscheinlich in Chile der höchste betretbare Pass. Zwei mächtige erloschene Vulcane, der Cerro Overo, 5000^{m}, und der Maipó, 5400^{m} hoch nach Dr. Güssfeldt's Bestimmungen, wurden genauer untersucht, letzterer am 19. Januar v. J. unter Beschwerden erstiegen, denen nur der Reisende selber widerstand, während die Huassos durch die Puna, die Anstrengung und den zum Sturm gesteigerten Wind bewältigt auf dem Wege liegen blieben.

Unmittelbar nach dieser Bergfahrt organisirte Dr. Güssfeldt eine neue Expedition zur Untersuchung des Aconcagua-Gebietes. Minder berühmt als der Chimborazo, ist für Chile der Aconcagua, was jener lange für Ecuador, der für unnahbar geltende König der Berge. Es gelang dem Reisenden, die Topographie dieser bisher fast unaufgeschlossenen Gegend aufzuklären und genaue Messungen anzustellen. Erreichte er auch den Gipfel des Aconcagua nicht, so kam er ihm doch bis auf einige hundert Meter nah und photographirte ihn in einer Entfernung von sechs Kilometern aus einer Höhe von 4840^{m}. Die Beschwerden, denen der Reisende sich aussetzte, erreichten hier den höchsten Grad; die ungeschützten Bivouac's (das höchste in 5300^{m}), Kälte, Schneestürme und Mangel an Futter für die Thiere rechtfertigten einigermaassen die Entmuthigung der sonst sehr zuverlässigen eingeborenen Begleiter. Erst gegen Mitte März erreichte er wieder die von Menschen bewohnte Region.

Digitized by Google

Dr. Güssfeldt beschloss seine Andesforschungen, indem er sich von Valparaiso nach Arica zu Schiff, und von hier über den Tacora-Pass in das bolivianische Hochland begab. Von der Hauptstadt La Paz machte er eine Reise in das Gebiet des Ylimani, kehrte nach La Paz zurück, und erreichte über den Titicaca-See, Puno und Arequipa von Neuem die Küste des Stillen Meeres. Durch den chilenoperuvianischen Krieg in seinen Bewegungen behindert, traf er erst am 18. Juli wieder in Hamburg ein, mit einer Fülle von Beobachtungen und Messungen aller Art, und von Photographien von Gebirgsansichten, welche bis dahin kaum ein menschliches Auge, geschweige das eines Naturforschers erblickt hatte. Das Quecksilber-Barometer, welches neben einem Baudin'schen Kochthermometer die Grundlagen seiner Höhenbestimmungen abgab, wurde auf der Kaiserlichen Seewarte in Hamburg völlig unverändert gefunden.

Das dritte Unternehmen der Humboldt-Stiftung führte abermals einen ihrer Reisenden in die pacifische Inselwelt, aber zu ganz besonderem Zweck. Es handelt sich um die weitere Ergründung einer der ältesten und gefürchtetsten Krankheitsformen, des biblischen und mittelalterlichen Aussatzes, der, in der Neuzeit aus dem Europäischen Culturbereich fast verschwunden, in anderen Welttheilen noch immer verheerend auftritt. Neuerlich ist die Lepra auf den Sandwich-Inseln mit grosser Heftigkeit ausgebrochen, und es schien, als ob dort die seit lange schwebende Frage nach der Ansteckungsfähigkeit des Aussatzes gelöst werden könnte. Denn es war glaubhaft berichtet, dass der Aussatz erst vor Kurzem dort eingeschleppt sei, und dass er sich im Laufe weniger Jahre zu einer erschreckenden Höhe entwickelt habe. Da es unlängst gelungen war, einen bestimmten Pilz in den vom Aussatz heimgesuchten Theilen des Körpers zu finden, lag die Vermuthung nah, dass dieser Pilz und damit die Krankheit übertragen werden könne, während sonst die Beobachter in Europa sich fast einstimmig gegen die Contagiosität, dagegen für die Erblichkeit des Leidens erklärt hatten. In Norwegen, wo Lepra noch immer ziemlich häufig vorkommt, forderte die Regierung deshalb schon vor zwei Jahrzehnden von dem Storthing ein Gesetz zur Ausschliessung der Aussätzigen von der Ehe.

Unter diesen Umständen konnte es nur sehr willkommen erscheinen, dass Hr. Dr. Eduard Arning, Assistent an der dermatologischen Klinik in Breslau, sich entschloss, zur Untersuchung des Aussatzes nach dem Herde der Krankheit im Stillen Meere, nach Honolulu, sich zu begeben, woselbst er, ausgerüstet mit den Mitteln unserer Stiftung, am 7. November v. J. eingetroffen ist. Die Hawayische Regierung, für welche die Lepra nachgerade eine Lebensfrage ward,

Digitized by Google

hatte auf Anfragen des Hrn. Dr. ARNING sehr zuvorkommend geantwortet und ihm jede Unterstützung zugesagt. Gleich am Morgen nach seiner Ankunft sah er gegen zweihundert Leprafälle. Dr. ARNING hat zunächst festgestellt, dass die Berichte über die Einschleppung des Aussatzes auf den Sandwich-Inseln ungenau waren. Offenbar ist die Krankheit dort schon viel länger zu Hause, als angegeben worden war. Dagegen steht fest, dass sie sich binnen wenigen Jahren zu seuchenhafter Ausbreitung entwickelt hat, so dass ein Theil der Insel ganz zu einer Aussatzstation eingerichtet und abgesperrt ist. Dr. ARNING hatte, als die letzten Nachrichten von ihm anlangten, seine Anstalten getroffen, seine Arbeiten begonnen, und es steht zu hoffen, dass es ihm gelingen werde, die ihm gestellte Aufgabe zu erledigen.

Auf der Durchreise durch San Francisco war er so glücklich, durch die Liebenswürdigkeit des Conservators des dortigen Museums, Hrn. Dr. HARFORD, einen in der Bai von San Diego an der Californischen Küste gefangenen Zitterrochen zu erhalten, der durch gefällige Vermittelung des Kaiserlich Deutschen Consulats in San Francisco und weiterhin des Auswärtigen Amtes an das hiesige physiologische Institut gelangt ist. Es ist das zweite Exemplar der *T. californica*, welches nach Europa kommt, einer Species, die das Interesse bietet, in der Säulenzahl des elektrischen Organes mit der riesigen *T. occidentalis* STORER von der atlantischen Küste Nordamerika's zu stimmen, von welcher, durch Hrn. ALEXANDER AGASSIZ's Güte, das physiologische Institut gleichfalls ein Exemplar (das dritte in Europa) besitzt.[1]

Das Capital der Stiftung hat im Jahre 1883 keinen Zuwachs erhalten. Die für das laufende Jahr zu Stiftungszwecken verwendbare Summe beläuft sich ordnungsmässig abgerundet auf 9300 Mark.

[1] S. diese Berichte, 1882. Bd. I. S. 489.

Digitized by Google

10. Studien zur Statik monocyklischer Systeme.

Von H. von Helmholtz.

(Vorgetragen am 27. März: — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [S. XVII]: — ausgegeben am 3. April.)

Fortsetzung der Mittheilung vom 6. März d. J.

§. 7.

Reine Bewegungskoppelung.

Mechanische Verbindungen zweier monocyklischer Systeme sind, wie schon bemerkt, in sehr mannigfacher Weise ausführbar, und ihr Resultat wird im Allgemeinen durch eine Gleichung zwischen den Parametern der beiden verbundenen Systeme analytisch dargestellt werden können, welche wir die Koppelungs-Gleichung nennen wollen. Nehmen wir an, als Parameter seien gebraucht langsam veränderliche Raumabmessungen p_a und die der Entropie entsprechenden Grössen s_1 und s_2, welche letzteren die Intensität der Bewegung bestimmen, so wird jede Gleichung zwischen diesen Parametern beider Systeme einen bestimmten Werth des s_2 vorschreiben, wenn sämmtliche p_a und das s_1 gegeben ist. Beide Systeme sind also dann zu einem monocyklischen System verbunden, welches der in §. 4 erwähnten allgemeineren Form entspricht.

Wenn wir die genannten Parameter benutzen, wird die Gleichung der Energie für jedes einzelne System [§. 1. Gleichung (1)] die Form erhalten:

$$dU + \sum_a [P_a \cdot dp_a] = q \cdot ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \{8,$$

worin U, P_a und q als Functionen der p_a und des s anzusehen sind. Daraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} P_a &= -\frac{\partial U}{\partial p_a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q &= \frac{\partial U}{\partial s}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} 8_a.$$

wie dies schon S. 164 nach Hrn. Gibbs bemerkt ist.

Wir wollen die beiden Systeme durch die Indices 1 und 2 unterscheiden, und ein für allemal annehmen, dass durch die Art der Verbindung keine Energie verloren gehe, aber auch keine andere auf-

Digitized by Google

gewendet werde, als die etwa bei der Herstellung der Koppelung gegen die Kräfte P_a zu leisten ist. Dann wird nothwendig während des Bestehens der Koppelung die gesammte Energie $\mathfrak{U}$ des gekoppelten Systems gleich der Summe der Energiewerthe der einzelnen Systeme, diese genommen in ihrem gegenwärtigen Zustande, sein müssen.

$$U_1 + U_2 = \mathfrak{U} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \{9.$$

Die Grösse $\mathfrak{U}$ wird nun wiederum dargestellt werden können als Function der sämmtlichen Coordinaten p_a und der Entropie $\mathfrak{S}$ des verbundenen Systems. Dann ist die Gleichung 9 eine Gleichung zwischen den Grössen p_a, s_1, s_2 und $\mathfrak{S}$. Da nun die Koppelungs-Gleichung eine Gleichung zwischen diesen selben Grössen mit Ausschluss von $\mathfrak{S}$ ist, so werden wir die genannten beiden Gleichungen benutzen können, um eine jede der Grössen s_1 und s_2 als Function der p_a und des $\mathfrak{S}$ darzustellen.

Nun wollen wir untersuchen, unter welchen Bedingungen die allgemeinen monocyklischen Systeme den wichtigen Charakter der Wärmebewegung haben, der sich darin zeigt, dass die mechanischen Kräfte P_a eines warmen Körpers durchaus nicht dadurch geändert werden, dass er in die Möglichkeit des Wärmeaustausches mit einem anderen Körper von gleicher Temperatur gesetzt wird, obgleich bei eintretenden Formänderungen, welche Arbeit der Kräfte P_a hervorrufen, jetzt andere Temperaturänderungen in dem betreffenden Körper eintreten, als wenn er isolirt ist. Hierin liegt ein wesentlicher Unterschied gegen das Princip des Gleichgewichts solcher Kräfte, die von der Bewegung unabhängig sind. Würde durch die Verbindung eine Mittheilung potentieller Energie von Seiten des zweiten Körpers bei irgend einer Formänderung des ersten Körpers bedingt, so würde auch das Kraftmoment, welches dieser Formänderung entspricht, sich ändern, wie dies ganz allgemein im Princip der virtuellen Geschwindigkeiten ausgesprochen ist.

Wir fragen also, welcher Art muss die Koppelung sein, damit durch dieselbe die Kräfte P_a nicht geändert werden? Wir fahren fort U_1 als Function seiner p_a und des s_1, U_2 als solche der p_b und des s_2 zu betrachten, s_1 und s_2 selbst aber, so wie $\mathfrak{U}$ als abhängig von den sämmtlichen p_a, p_b und dem $\mathfrak{S}$.

Dann ist im gekoppelten System nach 8_a und 9:

$$P_a = -\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial p_a} = -\frac{\partial U_1}{\partial p_a} - \frac{\partial U_1}{\partial s_1}\cdot\frac{\partial s_1}{\partial p_a} - \frac{\partial U_2}{\partial s_2}\cdot\frac{\partial s_2}{\partial p_b},$$

$$P_b = -\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial p_b} = -\frac{\partial U_2}{\partial p_b} - \frac{\partial U_1}{\partial s_1}\cdot\frac{\partial s_1}{\partial p_b} - \frac{\partial U_2}{\partial s_2}\cdot\frac{\partial s_2}{\partial p_b}.$$

Digitized by Google

Damit nun diese Werthe mit denen der Gleichung 8_a zusammenfallen, muss für jedes p_a oder p_b sein

$$\frac{\partial U_1}{\partial s_1}\cdot\frac{\partial s_1}{\partial p}+\frac{\partial U_2}{\partial s_2}\cdot\frac{\partial s_2}{\partial p}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9_a.$$

Daraus folgt, dass die Functionaldeterminanten der s_1 und s_2 für jede Combination von je zwei p_a oder p_b gleich Null sein müssen. Das heisst, es muss eine Gleichung zwischen dem s_1 und s_2 geben, deren Coefficienten von den p_a und p_b unabhängig sein müssen, der Regel nach aber von $\mathfrak{S}$ abhängen werden. Diese Gleichung kann ich bringen auf die Form:

$$\mathfrak{S}=F_{s_1,s_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9_b.$$

Die Function F ist nur von dem s_1 und s_2 abhängig; alle sonst darin vorkommenden Grössen müssen Constanten sein.

Aus Gleichung 9_b folgt weiter, wenn wir nach den p_a, die wir nicht weiter von den p_b zu unterscheiden brauchen, differentiiren

$$\frac{\partial F}{\partial s_1}\cdot\frac{\partial s_1}{\partial p_a}+\frac{\partial F}{\partial s_2}\cdot\frac{\partial s_2}{\partial p_a}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9_c$$

$$\frac{\partial F}{\partial s_1}\cdot\frac{\partial s_1}{\partial \mathfrak{S}}+\frac{\partial F}{\partial s_2}\cdot\frac{\partial s_2}{\partial \mathfrak{S}}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9_d.$$

Vergleichen wir die Reihe der Gleichungen 9_c mit 9_a, so folgt

$$\frac{\partial U}{\partial s_1}\cdot\frac{\partial F}{\partial s_2}-\frac{\partial U}{\partial s_2}\cdot\frac{\partial F}{\partial s_1}=0$$

oder

$$q_1\cdot\frac{\partial F}{\partial s_2}-q_2\cdot\frac{\partial F}{\partial s_1}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9_e.$$

Diese Gleichung muss die Koppelungs-Gleichung als Theiler enthalten, wenn sie nicht mit ihr identisch ist; denn wenn F als Function von s_1 und s_2 bestimmt worden ist, so giebt diese Gleichung eine Beziehung zwischen den sämmtlichen Parametern p_a, s_1 und s_2, welche während der Koppelung erfüllt sein muss.

Setzen wir entsprechend der zweiten Gleichung 8_a

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial \mathfrak{S}}=\mathfrak{q}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9_f$$

oder

$$\frac{\partial U_1}{\partial s_1}\cdot\frac{\partial s_1}{\partial \mathfrak{S}}+\frac{\partial U_2}{\partial s_2}\cdot\frac{\partial s_2}{\partial \mathfrak{S}}=\mathfrak{q}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9_g$$

so ergiebt Vergleichung mit 9_d und 9_e, dass

Digitized by Google

$$q \cdot \frac{\partial F}{\partial s_1} = q_1,$$
$$q \cdot \frac{\partial F}{\partial s_2} = q_2,$$

wodurch die Verhältnisse dieser Grössen vollständig bestimmt sind.

Beispiele solcher Koppelungen sind schon in den früheren Paragraphen angeführt. Namentlich gehören dahin alle isomoren Koppelungen des §. 5, deren Gleichung 9_b die Form erhält:

$$\mathfrak{S} = s_1 + s_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \{ 9_h$$

(s. auch S. 161). Ebenso gehören dahin die Koppelungen, welche in §. 6 behandelt sind, in denen die lebendige Kraft vor und nach der Koppelung integrirender Nenner ist. Für sie besteht eine Gleichung mit constanten Coefficienten zwischen den Grössen

$$\frac{s_1}{\mathfrak{S}} \text{ und } \frac{s_2}{\mathfrak{S}}.$$

Andrerseits sind Beispiele vom Gegentheil denkbar. So könnte eine elastisch gespannte Schnur ohne Ende, welche auf einer nicht cylindrischen Rolle liefe, auch die Stellung der Rolle beeinflussen und also eine den P_a entsprechende Kraft ausüben. Wir würden eine solche also nicht als eine reine Koppelung der inneren Bewegungen bezeichnen dürfen.

§. 8.

Gleichgewicht der inneren Bewegung für drei monocyklische Systeme.

Wir haben schliesslich noch das Analogon zu suchen für diejenige charakteristische Eigenschaft der Wärmebewegung, welche es möglich macht von der Temperatur eines Körpers als einer Grösse zu reden, und die sich in dem Satze zusammenfasst: Wenn jeder einzelne von zwei Körpern mit demselben dritten im Wärmegleichgewicht ist, sind sie mit einander in Wärmegleichgewicht.

Die entsprechende Bedingung für drei monocyklische Systeme kann so formulirt werden: Es wird verlangt, dass die Koppelungsgleichung zwischen 2 und 3 erfüllt sei, so oft sie zwischen 1 und 2 einerseits, so wie zwischen 1 und 3 andrerseits erfüllt ist.

Daraus folgt, wie analytisch unschwer nachzuweisen ist, dass die Koppelungs-Gleichungen sich auf die Form bringen lassen müssen:

$$\phi_1 - \psi_2 = \chi_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \{ 10,$$

Digitized by Google

wo ϕ_1 eine Function der Parameter des ersten Systems ist, ψ_2 eine solche des zweiten, χ_3 des dritten. Es würden diese drei Grössen also das Analogon der Temperatur für die monocyklischen Systeme darstellen.

Von den früher angeführten Beispielen fallen unter die hier aufgestellte Bedingung die Kreisel mit gleicher Rotationsgeschwindigkeit ihrer zu koppelnden Axen, und die Ströme in ringförmigen Canälen, deren Strömung durch den Querschnitt übereinstimmend sein muss.

Wenn endlich die in den beiden letzten Paragraphen besprochenen Eigenthümlichkeiten gleichzeitig stattfinden sollen, so muss die Koppelungs-Gleichung 9_e von der Form 10 sein, d. h. die beiden gleichwerthigen Ausdrücke

$$\left.\frac{q_1}{\frac{\partial F}{\partial s_1}} = \frac{q_2}{\frac{\partial F}{\partial s_2}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\right\} 9_e$$

können s_1 und s_2 gleichzeitig auf beiden Seiten nur in einem gemeinsamen Factor enthalten, der wegzuheben ist, und zwar muss dieser Factor in den Differentialquotienten von F stecken, da q_1 nur Parameter des ersten und q_2 nur solche des zweiten Körpers enthält. Also muss sein:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial s_1} &= \phi_{s_1} \cdot \chi, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial F}{\partial s_2} &= \psi_{s_2} \cdot \chi, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\} 11$$

worin χ Function von s_1 und s_2 ist. Daraus folgt:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s_1 \cdot \partial s_2} = \phi \cdot \frac{\partial \chi}{\partial s_2} = \psi \cdot \frac{\partial \chi}{\partial s_1}.$$

Vergleichung der letzten Gleichung mit 11 zeigt, dass

$$\left.\frac{\partial F}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial s_2} - \frac{\partial F}{\partial s_2} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial s_1} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\right\} 11_a$$

d. h. dass χ eine Function nur von F ist. Schreiben wir:

$$\frac{1}{\chi} = \frac{dX}{dF},$$
$$\phi = \frac{d\Phi}{ds_1},$$
$$\psi = \frac{d\Psi}{ds_2},$$

so ergeben die Gleichungen 11 das Integral:

$$\left.X = \Phi_{s_1} + \Psi_{s_2} + C \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\right\} 11_b.$$

Digitized by Google

Da der Werth von F gleich dem der Entropie $\mathfrak{S}$ des vereinigten Systems sein muss, so kann nun X als Function von $\mathfrak{S}$ angesehen werden.

Da endlich jede Function der Entropie auch wieder als Entropie benutzt werden kann, so ist diese Form der Gleichung bei passender Wahl der Entropie zurückführbar auf die oben erwähnte einfachste Form:

$$\mathfrak{S} = s_1 + s_2 .$$

Andererseits wird die Koppelungs-Gleichung 9_e nun

$$\frac{q_1}{\phi_{s_1}} = \frac{q_2}{\psi_{s_2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11_e.$$

Wenn, wie wir vorausgesetzt haben, q_1 ein integrirender Nenner für das erste, q_2 für das zweite System ist, so ist auch jedes Product von einem jeden q mit einer beliebigen Function der zugehörigen Entropie integrirender Nenner des betreffenden Systems. Die in obiger Gleichung 11_e gleichgesetzten Grössen sind also die integrirenden Nenner, die zu den Entropiewerthen Φ_{s_1} und Ψ_{s_2} gehören, die Koppelung ist eine isomore, und die Verwandlungsfähigkeit der inneren Bewegung ist, wie in §. 5 erörtert wurde, entsprechenden Beschränkungen unterworfen, wie die der Wärme nach Carnot's Gesetz.

Es zeigt sich also ganz allgemein, dass, wenn monocyklische Systeme nur solche Verbindungen unter einander zulassen, für welche die genannten zwei Eigenthümlichkeiten der Wärmebewegung gültig sind, dann auch die dritte durch das Carnot'sche Gesetz ausgesprochene wesentliche Eigenthümlichkeit der Wärme für sie gilt, die beschränkte Umwandlungsfähigkeit. Die genannten beiden Charaktere der Koppelung sind:

1. Die äusseren Kräfte jedes einzelnen Systems hängen nur von dem augenblicklichen Zustand dieses Systems ab, unabhängig von der eintretenden oder aufhörenden Verbindung mit anderen Systemen.

2. Sobald die Bedingungen des Austausches der inneren Bewegung zwischen zweien oder mehreren Systemen eintreten, hängt das Gleichgewicht der inneren Bewegungen zwischen ihnen davon ab, dass eine bestimmte Function der Parameter eines jeden einzelnen denselben Werth habe, wie die entsprechenden Functionen der andern.

Diese bestimmte Function, welche die der Temperatur in der Wärmelehre zufallende Rolle spielt, muss dann nothwendig ein integrirender Nenner des Systems sein, woraus die beschränkte Verwandlungsfähigkeit der inneren Arbeit folgt. Andererseits ist hervorzuheben, dass wenn jede Koppelung isomor ist, und der zweiten der eben angeführten Bedingungen entspricht, auch die erste Bedingung erfüllt sein muss.

Digitized by Google

§. 9.

Analogie für Wärmevorgänge bei Änderungen im molecularen Bau.

Zwei monocyklische Systeme können bei ihrer Verbindung nun auch dadurch Veränderungen erleiden, dass die für die Verbindung nöthige Annäherung oder Lagenänderung Kräfte wachruft, die zwischen einzelnen Theilen beider Systeme wirksam sind. Wenn diese Kräfte bekannt sind, und mit eingerechnet werden unter die Kräfte P_a, die in unseren Theoremen vorkommen, so wird an der Anwendbarkeit unserer Sätze dadurch nichts geändert. Scheinbare Ausnahmen aber, z. B. gegen den Schlusssatz unseres §. 8 können eintreten, wenn wir die Existenz solcher Kräfte nicht kennen, und die durch sie bedingten Lagenveränderungen der bewegten Theile nicht zu beurtheilen wissen. In einem solchen Falle würden wir einen Fehler begehen, wenn wir voraussetzen wollten, dass, weil alle uns bekannten Componenten der Kräfte P_a unverändert geblieben sind, auch die Coordinaten p_a durch die Koppelung nicht verändert seien.

Soll dabei der gleiche integrirende Nenner beider Systeme nach der Koppelung denselben Werth behalten, ebenso wie die bekannten Bestandtheile der Kräfte P, so wird im Allgemeinen innere Bewegung abgegeben oder eingenommen werden müssen, der Formel entsprechend

$$dQ = q \cdot ds.$$

Wenn q constant bleiben soll, ist, wie oben gezeigt, s eine Function der p_a und ändert sich mit diesen. Wenn also die unbekannten Kräfte eine solche Änderung bewirken, wird das Quantum der inneren Bewegung sich ändern müssen. Das aufgenommene Quantum innerer Bewegung wird aber wieder abgegeben werden müssen, wenn der alte unverbundene Zustand beider Systeme unter den früheren Bedingungen wiederhergestellt werden soll.

Auch kann dabei unter den von uns festgehaltenen Voraussetzungen, wenn keine Änderung des übereinstimmenden Nenners q zugelassen wird, keine Energie der inneren Bewegung in Arbeit der Kräfte P verwandelt oder aus solcher entnommen werden.

In der Wärmelehre würden wir dieses Ein- und Austreten innerer Bewegung bei constant bleibender Temperatur als »Latentwerden freier Wärme« oder »Freiwerden latenter Wärme« bezeichnen können, wenn wir uns eine, wie mir scheint, nützliche Verallgemeinerung dieses Begriffs erlauben wollen. Man hat damit bisher nur die Wärmeänderungen bei Änderungen der Aggregatzustände bezeichnet, welche reversible Processe im Sinne der Thermodynamik sind. Aber es scheint mir

Digitized by Google

kein Grund vorhanden, warum man nicht die bei allerlei anderen Änderungen des molecularen Baus, auch bei Dichtigkeitsänderungen der Gase, Auflösung von Salzen und chemischen Processen auftretenden Wärmeänderungen ebenso bezeichne, vorausgesetzt, dass dieselben reversibel und bei constant gehaltener Temperatur durchgeführt werden. Dann wäre bei constant gehaltener Temperatur ϑ entsprechend der Gleichung

$$dQ = \vartheta \cdot ds$$

die Grösse s, die Entropie, multiplicirt mit dem constant bleibenden ϑ, als das Quantum der latenten Wärme des Körpersystems zu bezeichnen. Dies ist gerade der Theil der Energie, der bei isothermen Änderungen des molecularen Baus die Energieform der Wärme behalten muss, den ich deshalb als gebundene Energie bezeichnet, und dessen Scheidung von der frei verwandelbaren Energieder molecularen Kräfte ich in meinen thermodynamischen Arbeiten auf bestimmtere Grundsätze zu bringen gesucht habe. Dass die bei Änderungen des Aggregatzustandes frei oder latent werdende Wärme keinen Einfluss auf die chemischen Verwandtschaften habe, ist ja von den Beobachtern, die sich mit Thermochemie beschäftigten, namentlich von Hrn. M. Berthelot längst richtig erkannt und hervorgehoben worden. Was aber das Analogon dieses Latentwerdens der Wärme in anderen Fällen von Änderungen des Molecularbaus ist, lässt sich meines Erachtens ohne genaue Untersuchung der entsprechenden Arbeit bei reversiblen Processen nicht streng scheiden.

Digitized by Google

11. Untersuchungen über das Coniin.

Austreten von Wasserstoff aus organischen Verbindungen unter dem Einflusse von Wasserstoff *in condicione nascendi.*

Von A. W. Hofmann.

(Vorgetragen am 27. März: — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XVII]; — ausgegeben am 3. April.)

Bei der Fortsetzung meiner Studien über das Coniin, welche der Akademie bereits vorgelegt worden sind[1], habe ich einige Beobachtungen gemacht, welche mir werth erscheinen, schon heute gesondert mitgetheilt zu werden.

Fälle, in denen sauerstoffreiche Körper, dadurch dass sie sich eines Theiles ihres Sauerstoffs begeben, gleichzeitig ein Austreten dieses Elementes aus anderen sauerstoffhaltigen Substanzen bedingen, sind mehrfach beobachtet worden. Es braucht nur an die Einwirkung des Wasserstoffsuperoxyds auf Kaliumpermanganat, auf Mangansuperoxyd, auf Silberoxyd erinnert zu werden, bei welcher sich der Sauerstoff der letztgenannten Verbindungen, theilweise oder ganz entwickelt, während das Wasserstoffsuperoxyd zu Wasser reducirt wird. Man pflegt sich vorzustellen, dass Sauerstoffatome aus dem Wasserstoffsuperoxyd, und Sauerstoffatome aus dem mit ihm in Berührung befindlichen sauerstoffhaltigen Körper, zu Moleculen geeinigt, in Freiheit gesetzt werden.

Ein ganz ähnliches Beispiel von Wasserstoffentwickelung aus organischen Verbindungen, bedingt durch die Einwirkung nascenten Wasserstoffs, ist mir in den letzten Tagen durch die Hände gegangen.

Mit Versuchen beschäftigt, dem Coniin

$$C_8H_{17}N$$

Wasserstoff zuzuführen, um es theilweise wenigstens in Octylamin

$$C_8H_{19}N$$

[1] Hofmann, Monatsberichte 1881, 363.

Digitized by Google

zu verwandeln, wurde das trockene salzsaure Salz der erstgenannten Base mit Zinkstaub der Destillation unterworfen.

Unter lebhafter Entwickelung von Wasserstoff, dem Spuren eines Kohlenwasserstoffs beigemengt waren, ging eine schwach gelb gefärbte Base in reichlicher Menge über. Dass die Reaction nicht so verlaufen war, wie man erwartet hatte, erhellte schon aus dem Umstande, dass der Wasserstoff, statt sich dem Coniin zuzugesellen, als solcher entwickelt wurde. Bei quantitativen Versuchen ergab sich ferner, dass weit mehr Wasserstoff austrat, als in der Salzsäure des Chlorhydrats enthalten war. Bei der Destillation von 10^g trocknen salzsauren Coniins mit einem Überschuss von Zinkstaub (15^g) wurden 1800^{cc}, bei einem zweiten Versuche mit derselben Quantität 1780^{cc} eines Gases erhalten, welches sich bei der Verbrennung als Wasserstoff erwies. Wäre ausschliesslich der Wasserstoff aus der in dem Salze vorhandenen Salzsäure in Freiheit gesetzt worden, so hätten sich nur 610^{cc} entwickeln können, also nur etwa ein Drittheil von dem wirklich beobachteten, die beiden anderen Drittheile konnten nur dem Coniin entstammen. In dem Destillate musste daher eine Base vorhanden sein, welche weniger Wasserstoff als das Coniin enthält, und da der eigenthümliche Geruch des Destillats an die Pyridinbasen erinnerte, so durfte man alsbald an eine Base

$$C_8H_{11}N = C_8H_{17}N - 6H$$

denken, an eine Base also, welche zu dem Coniin in derselben Beziehung steht, wie das Pyridin zu dem Piperidin.

Der Versuch hat diese Auffassung vollkommen bestätigt. Das Destillat enthält eine erhebliche Menge, etwa 25—30 Procent, einer Base von der angegebenen Zusammensetzung, welcher ich den Namen Conyrin beilegen will, um an die oben angedeutete Beziehung zu erinnern. Die Trennung des Conyrins von dem Coniin hat zunächst einige Schwierigkeit geboten, da beide Basen fast genau denselben Siedepunkt besitzen, gelang aber schliesslich durch das verschiedene Verhalten der salzsauren Salze. Ich gedenke auf die etwas umständliche Darstellung des Conyrins bei Beschreibung einiger anderer Coniinderivate demnächst zurück zu kommen und will daher heute nur noch kurz die Eigenschaften des Conyrins angeben.

Es ist eine farblos durchsichtige Flüssigkeit, welche, zumal im Sonnenlichte, eine prächtige hellblaue Fluorescenz zeigt. Sie besitzt einen eigenthümlichen, nicht unangenehmen Geruch, welcher dem des Pyridins und Picolins ähnelt, aber minder penetrant ist. Das Conyrin ist leichter als Wasser; es siedet constant bei 168—170 unter einem Druck von $0^m.758$.

Digitized by Google

Es löst sich mit Leichtigkeit in allen Säuren, die Salze sind aber äusserst löslich und nur schwer zum Krystallisiren zu bringen.

Eine Ausnahme in letzterer Beziehung bildet das Platindoppelsalz, welches in schönen orangegelben, vierseitigen Tafeln krystallisirt. Es ist ziemlich leicht löslich in Wasser, aus dem es sich umkrystallisiren lässt. Auch das Goldsalz krystallisirt leicht. Es bildet lange, gelbe Nadeln, welche im Wasser und Alkohol löslich sind.

Die Zusammensetzung des Conyrins ist durch die Analyse einerseits der Base selbst, andererseits des Platinsalzes festgestellt worden. Die Formel

$$C_8H_{11}N$$

verlangt folgende Werthe

		Theorie	Versuch	
C_8	96	79.33	78.78	78.90
H_{11}	11	9.09	9.10	9.13
N	14	11.58	—	—
	121	100.00		

Dem entsprechend wurden bei der Analyse des Platindoppelsalzes Zahlen gefunden, welche zu der Formel

$$2\,(C_8H_{11}N \cdot HCl)\,PtCl_4$$

führen.

		Theorie	Versuch	
C_{16}	192	29.35	29.42	—
H_{24}	24	3.37	3.77	—
N_2	28	4.28	—	—
Pt	197	30.13	—	29.93
Cl_6	213	32.57	—	—
	654	100.00		

Dass hier wirklich eine Pyridinbase vorliege, ergab sich unzweideutig aus dem Verhalten des Conyrins zum Jodmethyl. Beide Substanzen wirken schon bei gewöhnlicher Temperatur auf einander ein; im geschlossenen Rohr bei 100° ist die Reaction in kurzer Frist vollendet. Es entsteht das Jodid einer Ammoniumbase, welches in Wasser leicht löslich ist und sich aus dieser Lösung auf Zusatz von concentrirtem Alkali als dickflüssiges Öl ausscheidet. Wird dieses Öl mit festem Natronhydrat erhitzt, so entwickelt sich der stechende, die Schleimhaut der Nase unerträglich reizende Geruch, welcher den

Digitized by Google

Gliedern einer eigenthümlichen, vor einigen Jahren von mir[1] signalisirten, durch Wechselwirkung der alkylirten Ammoniumbasen der Pyridinreihe mit Alkali entstehenden Körpergruppe angehört. Dieser in hohem Grade charakteristische Geruch ist ein nicht zu unterschätzendes Erkennungsmittel der Pyridinbasen.

Das durch Behandlung des Conyrins mit Jodmethyl entstehende Jodid lässt sich mittelst Chlorsilbers leicht in das entsprechende Chlorid überführen, welches beim Abdampfen einen syrupdicken Rückstand hinterlässt. Derselbe erstarrt *in vacuo* zu einer grossstrahligen krystallinischen Masse; seine Lösung liefert mit Platinchlorid ein schön krystallisirtes, schwer lösliches Platinsalz, dessen Analyse die Zusammensetzung der methylirten Ammoniumbase des Conyrins feststellt. Die Formel

$$2\,[C_8H_{11}N \cdot CH_3Cl]\,PtCl_4$$

verlangt 28.88 Procent Platin; in dem bei 100° getrocknetem Salze wurden 28.57 Procent gefunden.

Noch darf hier nicht unerwähnt bleiben, dass Basen von der Formel

$$C_8H_{11}N,$$

welche das Conyrin ausdrückt, bereits mehrfach beobachtet worden sind. Ich erinnere an das von Anderson[2] aus dem Knochenöl dargestellte α Collidin, an das von Greville Williams[3] bei der Einwirkung von Ätzkali auf Cinchonin gewonnene β Collidin, an die Aldehyd-Collidine, Aldehydin und Paracollidin, welche nach Baeyer und Ador[4] aus Aldehydammoniak, nach Krämer aus Aethylidenchlorid und Ammoniak entstehen. Aber alle diese Basen besitzen einen weit höheren Siedepunkt als das Conyrin. α und β Collidin sieden bei 179—180, Aldehydin bei 180—182, Paracollidin sogar erst bei 220—230. Auch finde ich nirgends der auffallenden blauen Fluorescenz erwähnt, welche das Conyrin auszeichnet. Vor einigen Jahren ist jedoch auch noch von Cahours und Étard[5] ein Collidin beobachtet worden, welches beim Durchtreiben von Nicotindämpfen durch glühende Röhren entsteht. Dies siedet gleichfalls bei 170°, zeigt aber eine grosse Neigung zur Polymerisation, eine Eigenschaft, welche dem Cony-

---

[1] Hofmann, Monatsberichte 1881, 763.

[2] Anderson, Ann. Chem. Pharm. XCIV. 360.

[3] Greville Williams, J. f. p. Chem. LXVI 334.

[4] Baeyer und Ador, Ann. Chem. Pharm. CLV 294. Krämer, Ber. chem. Ges. III. 202.

[5] Cahours und Étard, C. R. 1881. 1079.

Digitized by Google

rin völlig abgeht. Ich glaube daher die letztgenannte Base als eine eigenthümliche, bisher noch nicht beobachtete Pyridinbase ansprechen zu dürfen, werde aber nicht ermangeln, durch genaue Vergleichung mit den genannten Collidinen, namentlich durch Oxydationsversuche, Zweifel, welche immerhin noch bleiben, zu entfernen.

Die Bildung des Conyrins unter den Bedingungen, welche im Vorhergehenden beschrieben worden sind, giebt zu mancherlei Betrachtungen Veranlassung. Wollte man annehmen, dass die aus dem Coniin austretenden 6 At. Wasserstoff von den aus der Salzsäure in Freiheit gesetzten Wasserstoffatomen als Molecule entführt werden, so müssten sich bei der Destillation der Mischung von Coniinchlorhydrat mit Zinkstaub auf 1 Mol. Conyrin 5 Mol. Coniin zurückbilden

$$6\,[C_8H_{17}N \cdot HCl] + 3\,Zn = 3\,ZnCl_2 + C_8H_{11}N + 5\,C_8H_{17}N.$$

Dies ist aber keineswegs der Fall. Das Conyrin tritt in weit grösserer Menge auf. Bei der Destillation von 35^g salzsauren Coniins, welches nicht einmal besonders sorgfältig getrocknet worden war, wurden unter Rückbildung von 15^g Coniin 7^g reines Conyrin erhalten. Die wirklich entstandene Menge muss indessen viel mehr betragen haben, da die Trennung und Reinigung nicht unerhebliche Verluste bedingt. Im Sinne der oben gegebenen Gleichung hätten nur 4.3^g Conyrin erhalten werden können. Ebenso hätten sich nach dieser Gleichung aus 10^g salzsauren Coniins nur 1.355^l Wasserstoff entwickeln können, während in Wirklichkeit aus 10^g nicht weniger als 1.790^l Gas erhalten wurden. Aus dem Vorstehenden erhellt, dass sich die Reaction keineswegs in dem oben angedeuteten Mechanismus vollzieht. Möglich, dass sich zunächst Wasserstoff in der gedachten Weise abspaltet; das gestörte moleculare Gleichgewicht bedingt aber alsdann eine weitere Umsetzung.

Die eigenthümliche Umbildung des Coniins in einem Reductionsprocesse, die Erzeugung einer Verbindung, welche man eher unter dem Einflusse oxydirender Agentien hätte erwarten sollen, musste mein Interesse begreiflich auch wieder den Veränderungen zulenken, welche das Coniin durch Oxydation erleidet. Es hat sich bei nach dieser Richtung hin unternommenen Untersuchungen herausgestellt, dass sich das Conyrin aus dem Coniin ebensowohl durch Oxydation als durch Reduction erzeugen lässt. Aber es entsteht bei der Oxydation des Coniins nicht nur das Conyrin, sondern es bilden sich sämmtliche Zwischenglieder.

Ich hoffe, der Akademie demnächst über diese Zwischenglieder eine ausführlichere Mittheilung zu machen. Heute will ich nur die

Digitized by Google

Formeln der Verbindungen angeben, deren Zusammensetzung durch die Analyse festgestellt ist.

Octylamin	$C_8H_{19}N$
Coniin	$C_8H_{17}N$
Conicëin	$C_8H_{15}N$
Neue Base (noch nicht getauft)	$C_8H_{13}N$
Conyrin	$C_8H_{11}N$.

Ich setze diese Arbeit, welche nach verschiedenen Richtungen zu weiteren Forschungen einladet, fort, möchte aber schon heute Hrn. P. Ehestädt, der mich mit grossem Eifer und seltenem Geschick bei derselben unterstützt, meinen besten Dank aussprechen.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

Digitized by Google

12. Zur Constitution des Coniins.

Von A. W. Hofmann.

(Vorgetragen am 3. April: — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XVIII]; — ausgegeben am 10. April.)

In der letzten Sitzung habe ich der Akademie Mittheilung über eine eigenthümliche Umbildung gemacht, welche das salzsaure Coniin bei der Destillation mit Zinkstaub erleidet. Das Coniin geht unter diesen Verhältnissen durch Verlust von 6 At. Wasserstoff in eine Base über, welche ich mit dem Namen Conyrin bezeichnet habe. Ich war zunächst geneigt, diese ganz unerwartete Bildung einer wasserstoffärmeren Base aus dem Coniin der Einwirkung des aus der Salzsäure des Salzes entwickelten Wasserstoffs zuzuschreiben, wies aber bereits auf die Unzulänglichkeit dieser Erklärungsweise hin, insofern die Menge des gebildeten Conyrins diejenige, welche im Sinne einer solchen Anschauungsweise erwartet werden durfte, fast um das Doppelte übersteigt. Weitere Versuche, welche seitdem angestellt worden sind, haben in der That gezeigt, dass das Coniin eine ganz ähnliche Umbildung erleidet, wenn es einfach mit Zinkchlorid destillirt wird. Die Zersetzung ist in diesem Falle weniger einfach; es treten nicht-basische Öle auf, anscheinend Kohlenwasserstoffe, aber es werden gleichwohl unter lebhafter Wasserstoffentwickelung reichliche Mengen von Conyrin gebildet. Ich unterlasse es, im Augenblick eine Erklärung dieser auffallenden Erscheinung zu versuchen, bemerke aber schon heute, dass diese Reaction für die Erkenntniss der Natur mancher Basen erwünschte Anhaltspunkte zu geben verspricht und dass ich mir die weitere Verfolgung derselben vorbehalte. In der That erleidet z. B. das Nicotin eine ganz ähnliche Umbildung, indem sich unter Wasserstoffentwickelung eine Base bildet, welche der Pyridinreihe angehört.

Was das Coniin selbst anlangt, so darf man nach der Überführung desselben in Conyrin an dessen Beziehungen zum Pyridin nicht länger mehr zweifeln. Eine solche Beziehung ist bereits von verschiedener Seite angedeutet worden, allein noch fehlte eine thatsächliche Unterlage für diese Auffassung. Ein ausgezeichneter russischer Chemiker A. Wischnegradsky, dessen frühen Tod die Wissenschaft zu beklagen hat, glaubt zwar durch directe Oxydation des Coniins eine Pyridincarbonsäure erhalten zu haben[1], allein seine Untersuchung ist unvollendet geblieben. Ich selber habe bei einer in grösserem Maassstabe

[1] A. Krakau, Ber. chem. Ges. XIII. 2316.

Digitized by Google

ausgeführten Oxydation mittelst Permanganat wohl reichliche Mengen von Fettsäuren, zwischen 100° und 250° siedend, gewonnen, bin aber bisher nicht auf eine Pyridincarbonsäure gestossen, deren Bildung nach den jetzt vorliegenden Beobachtungen in hohem Grade wahrscheinlich ist.

Um die Beziehung des Coniins zum Pyridin noch näher zu präcisiren, war es übrigens nöthig, das Conyrin abzubauen. Dies gelingt ohne Schwierigkeit mittelst Permanganat. Es entsteht auf diese Weise eine reichliche Menge der von Weidel[1] studirten Picolinsäure, welche durch Bestimmung des Schmelzpunktes (134°) und durch die Analyse des schönen charakteristischen Kupfersalzes identificirt worden ist.

Der Formel

$$2(C_6H_4NO_2)Cu$$

entsprechen folgende Werthe:

	Theorie	Versuch
Kohlenstoff.....	46.82	46.35
Wasserstoff.....	2.60	2.64

Die Gegenwart einer Propylgruppe in dem Conyrin und mithin auch in dem Coniin kann also nicht zweifelhaft sein. Das Coniin erscheint demnach als ein sechsfach hydrirtes Propylpyridin. Es muss vor der Hand dahingestellt bleiben, welche der sechs von der Theorie angedeuteten Verbindungen dieser Gattung das Coniin wirklich ist. Hierüber wird sich erst entscheiden lassen, wenn die Natur der Picolinsäure vollständig aufgeklärt sein wird.

Noch verdient hervorgehoben zu werden, dass Wischnegradsky eine ganz richtige Vorstellung von dem Coniin hatte. Er betrachtete dasselbe allerdings nicht als eine Propyl-, sondern als eine Allylverbindung. Allein damals hatte noch die alte Formel des Coniins Geltung. Wäre ihm schon die neue Formel des Coniins bekannt gewesen, so würde er unzweifelhaft eine Propylgruppe in dem Coniin angenommen haben.

Schliesslich will ich noch anführen, dass die gedachte Auffassung eines Coniins von der Formel

$$C_8H_{17}N$$

die Existenz dreier Basen von der Formel

$$C_8H_{15}N$$

andeutet, von denen zwei secundäre sein müssen, während der dritten tertiäre Construction zukommt. Versuche, bei denen ich mich der freundlichen Unterstützung der HH. F. Mylius und P. Ehestädt zu erfreuen hatte, haben diese Voraussetzung in willkommener Weise bestätigt.

[1] Weidel, Ber. chem. Ges. XII. 1989.

Digitized by Google

13. Über die Ein- und Mehrdeutigkeit der Fundamental-Bogen-Complexe für die Elemente monoklinischer Krystall-Gattungen.

Von Mart. Websky.

(Vorgetragen am 17. April; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XX]; — ausgegeben am 24. April.)

Die Berechnung der krystallographischen Elemente aus drei gewählten Fundamental-Bögen für ein monoklinisches Axensystem hat die besondere Schwierigkeit, dass der Gang derselben nicht, wie bei den übrigen Krystallisations-Systemen — das triklinische eingeschlossen — in einen einheitlichen Rahmen gefasst werden kann, sondern eine grosse Anzahl von Sonderverhältnissen darbietet.

In meinem Vortrage am 1. März 1880[1] habe ich die erforderlichen Eigenschaften der zu wählenden Fundamental-Bögen und die Limiten der die Aufstellung begründenden Willkür in der Wahl der Fundamental-Flächen-Symbole besprochen, doch ist in den daraus gezogenen Consequenzen der Umfang der aufkommenden Casuistik keineswegs erschöpft, auch die Frage der Ein- und Mehrdeutigkeit der Resultate nicht ganz richtig zum Ausdruck gebracht worden.

Wenn man den letzteren Gesichtspunkt in den Vordergrund stellen will, wird es nothwendig, einen anderen Eintheilungs-Modus der verschieden möglichen Fälle ins Auge zu fassen.

Eindeutig sind allemal diejenigen Fälle, in denen zu Fundamental-Bögen zwei aneinander schliessende Bögen zwischen drei, der concreten Reihenfolge nach, sonst willkürlich symbolisirten Flächen e_1, e_2, e_3 der auf der Symmetrie-Axe OB senkrechten Zone $[aec]$ gewählt sind, der dritte, von e_1 oder e_2, e_3 ausgehend, nach einer vierten Fläche g führt, welche, in einer der Zonen $[e_1 b]$ oder $[e_2 b], [e_3 b]$ belegen, nicht mit $b = (\infty a : b : \infty c)$ zusammenfällt, bezüglich des Axenschnittes $\frac{a}{\mu}$ demgemäss, im Axenschnitt $\frac{b}{\nu}$ — mit Ausschluss der Werthe $\frac{b}{\infty}$ und $\frac{b}{0}$ — willkürlich symbolisirt ist. Es sind dies die Fälle, welche

[1] Monatsberichte 1880, S. 240—257.

Digitized by Google

ich damals unter A, 1. a, b[1] aufführte und welche direct die Grundlagen der zu den Elementen selbst führenden Schlussrechnung enthalten.

Eindeutig sind ferner die Fälle, in denen als erster Fundamental-Bogen der zwischen zwei willkürlich symbolisirten Flächen e_1, e_2 der Zone $[aec]$ belegene genommen wird und die weiteren zwei Bögen von e_1 und e_2 aus nach einer Fläche g führen, welche nicht in den Zonen $[aec], [e_1 b], [e_2 b]$ belegen ist; das Symbol dieser Fläche ist im Axenschnitt $\frac{b}{\nu}$ — mit Ausschluss der Werthe $\frac{b}{\infty}, \frac{b}{0}$ — willkürlich wählbar, im Axenschnitt $\frac{a}{\mu}$ aber nach Maassgabe der Bögen $e_1 e_2, e_1 g, e_2 g$ limitirt[2]. Es sind dies die damals sub B, 1. aufgeführten Fälle.

Eindeutig wird auch das Resultat, wenn gleichfalls als erster Fundamental-Werth ein Bogen $e_1 e_2$ zwischen willkürlich symbolisirten Flächen der Zone $[aec]$ gewählt wird, der zweite Bogen in Zone $[e_1 b]$ (resp. $[e_2 b]$) von e_1 (resp. e_2) nach einer nur im Schnitt $\frac{b}{\nu}$ willkürlich symbolisirten Fläche g geht, der dritte Fundamental-Bogen aber von g aus in Zone $[g e_2]$, (resp. in Zone $[g e_1]$) gewonnen wird nach einer vierten Fläche h, deren Symbol im Sinne der Zonenlage und concreten Reihenfolge, sonst willkürlich gewählt werden darf.

Wird an Stelle dieses dritten Winkels gh der Normalenbogen von h nach $b = \infty a : b : \infty c$ benutzt, so ist das Resultat zweideutig, weil alsdann der abgeleitete Werth $= \sin gh$ sich auf einen Bogen $gh <$ oder $> 90°$ beziehen kann; wenn das Augenmaas nicht ausreicht, entscheidet eine Auxiliar-Messung des Bogens gh.

Es bleiben nun noch die Gruppirungen übrig, bei denen die Aufstellung des Krystalls durch die willkürliche Wahl der Symbole zweier Octaïd-Flächen $g = \frac{a}{\mu_1} : \frac{b}{\nu_1} : c$ und $h = \frac{a}{\mu_2} : \frac{b}{\nu_2} : c$ bedingt wird, welche nicht der Zone $[aec]$ angehören, auch nicht mit $b = (\infty a : b : \infty c)$ zusammenfallen. Es möge für die Folge vorausgesetzt sein, dass g und h stets auf der rechten Seite der Symmetrie-Ebne belegen seien, auch die Fundamental-Bögen durchweg in Werthen $< 180°$ ausgedrückt werden. Um die Zahl der erforderlichen Fundamental-Bögen zu erreichen, müssen, wenn der Bogen gh benützt wird, noch zwei, sonst drei Bogen-Abstände herbeigezogen werden, welche auf Flächen führen, deren Symbole auf dem Wege der Deduction mit Berücksichtigung

[1] A. a. O. S. 248.
[2] A. a. O. S. 247. 252.

Digitized by Google

der Symmetrie-Verhältnisse aus der für g und h getroffenen Wahl hergeleitet werden können.

Es sind dies[1] zunächst die symmetrisch liegenden Flächen $g = \frac{a}{\mu_1} : \frac{b}{-\nu_1} : c$ und $\bar{h} = \frac{a}{\mu_2} : \frac{b}{-\nu_2} : c$, ferner die Dodecaïdflächen:

$$e_1 = \frac{a}{\mu_1} : \infty b : c \text{ in Zone } [b g \bar{g} \bar{b}],$$

$$e_2 = \frac{a}{\mu_2} : \infty b : c \text{ in Zone } [b h \bar{h} \bar{b}],$$

welche die Kanten $g \mid \bar{g}$ und $h \mid \bar{h}$ grade abstumpfen, dann aber noch die Dodecaïdflächen:

$$e_3 = \frac{a}{\mu_3} : \infty b : c = \frac{\nu_2 + \nu_1}{\nu_2\mu_1 + \nu_1\mu_2} a : \infty b : c,$$

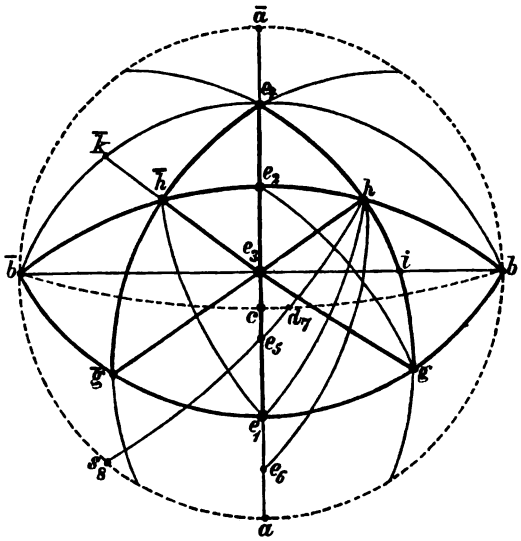
$$e_4 = \frac{a}{\mu_4} : \infty b : c = \frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_2\mu_1 - \nu_1\mu_2} a : \infty b : c$$

in den Zonen $[g e_3 \bar{h}][\bar{g} e_3 h]$ und $[g h e_4][\bar{g} \bar{h} e_4]$.

Wenn der Bogen $gh < 180°$ gedacht wird, fällt e_3 in den Bogen $e_1 e_2 < 180°$, e_4 ausserhalb desselben.

Es kommen im Ganzen also 8 Flächenpositionen in Betracht, zwischen denen 10 selbstständige Bögen gemessen werden können; welche ich der Kürze halber, wie folgt, bezeichnen will:

[1] Wiederabdruck der in den Monatsberichten, 1880 S. 244 benutzten Figur.



Die Positionen $c, a, e_5, e_6, s_8, d, i, k$ kommen in diesem Vortrage nicht in Betracht.

Digitized by Google

$$\begin{aligned}
\delta &= gh = \bar{g}\bar{h} \\
\varepsilon &= he_4 = \bar{h}e_4 \\
(\delta+\varepsilon) &= ge_4 = \bar{g}e_4 \\
\zeta &= ge_3 = \bar{g}e_3, \\
\eta &= he_3 = \bar{h}e_3 \\
(\zeta+\eta) &= g\bar{h} = \bar{g}h \\
\varkappa &= e_1 h = e_1\bar{h} \\
\lambda &= e_2 g = e_2\bar{g} \\
\sigma &= ge_1 = \bar{g}e_1 = 90^\circ - gb = \tfrac{1}{2}g\bar{g}, < 90^\circ \\
\tau &= he_2 = \bar{h}e_2 = 90^\circ - hb = \tfrac{1}{2}h\bar{h}, < 90^\circ
\end{aligned}$$

Da mit den Flächen $\bar{g}, \bar{h}, e_1, e_2, e_3, e_4$ keineswegs der Cyclus der deducirbaren Positionen abgeschlossen ist, könnte man das disponible Bogenmaterial und zwar ohne ersichtliche Grenze noch vermehren; es bilden aber die hier in Betracht gezogenen Flächen e_1, e_2, e_3, e_4 den unmittelbar aus den Kantenlagen von $g, \bar{g}, h, \bar{h}$ symbolisirbaren Complex; da nun schon sie auf eine zahlreiche Casuistik führen und die secundären Deductionen noch complicirtere Verhältnisse darbieten, so habe ich mich auf die hier verzeichneten Bögen beschränkt.

Es lassen nämlich diese 10 Bögen, von denen zwei die Summe von je zwei anderen bilden, 90 verschiedene Combinationen von je drei derselben zu. Dabei führen alle diese 90 Combinationen auf Elemente, indessen nur 26 auf ein eindeutiges Resultat, 24 weitere auf ein im Allgemeinen zweideutiges und 40 auf ein mehrdeutiges. Diese letzteren, mehr als zweideutigen, haben keinen praktischen Werth, dagegen sind die zweideutigen zum Theil in besonderen Fällen eindeutig und, wenn dies nicht stattfindet, durch die, selbst approximative Messung eines vierten Auxiliarbogens eindeutig auszulegen.

In der folgenden Tabelle sind die auf unzweideutige Elemente führenden Drei-Bogen-Complexe unterstrichen gedruckt, die mehr als zweideutigen eingeklammert.

1. $\delta\varepsilon\zeta$	8. $\delta\zeta\eta$	[13. $\delta\eta\varkappa$]	17. $\delta(\zeta+\eta)\varkappa$
2. $\delta\varepsilon\eta$	[9. $\delta\zeta\varkappa$]	14. $\delta\eta\lambda$	18. $\delta(\zeta+\eta)\lambda$
3. $\delta\varepsilon(\zeta+\eta)$	10. $\delta\zeta\lambda$]	15. $\delta\eta\sigma$]	19. $\delta(\zeta+\eta)\sigma$
4. $\delta\varepsilon\varkappa$	11. $\delta\zeta\sigma$	16. $\delta\eta\tau$	20. $\delta(\zeta+\eta)\tau$
5. $\delta\varepsilon\lambda$	[12. $\delta\zeta\tau$]		
6. $\delta\varepsilon\sigma$			
7. $\delta\varepsilon\tau$			

[21. $\delta\varkappa\lambda$]	24. $\delta\lambda\sigma$	26. $\delta\sigma\tau$
22. $\delta\varkappa\sigma$	25. $\delta\lambda\tau$	
23. $\delta\varkappa\tau$		

Digitized by Google

27. $\varepsilon\zeta\eta$ | [32. $\varepsilon\eta\varkappa$ | [36. $\varepsilon(\zeta+\eta)\varkappa$ | [40. $\varepsilon\varkappa\lambda$
[28. $\varepsilon\zeta\varkappa$ | 33. $\varepsilon\eta\lambda$ | 37. $\varepsilon(\zeta+\eta)\lambda$ | 41. $\varepsilon\varkappa\sigma$]
29. $\varepsilon\zeta\lambda$ | 34. $\varepsilon\eta\sigma$] | 38. $\varepsilon(\zeta+\eta)\sigma$] | 42. $\varepsilon\varkappa\tau$
30. $\varepsilon\zeta\sigma$ | 35. $\varepsilon\eta\tau$ | 39. $\varepsilon(\zeta+\eta)\tau$
31. $\varepsilon\zeta\tau$]

[43. $\varepsilon\lambda\sigma$] 45. $\varepsilon\sigma\tau$
44. $\varepsilon\lambda\tau$

46. $(\delta+\varepsilon)\zeta\eta$ | [51. $(\delta+\varepsilon)\eta\varkappa$ | [55. $(\delta+\varepsilon)(\zeta+\eta)\varkappa$ | [59. $(\delta+\varepsilon)\varkappa\lambda$]
[47. $(\delta+\varepsilon)\zeta\varkappa$ | 52. $(\delta+\varepsilon)\eta\lambda$ | 56. $(\delta+\varepsilon)(\zeta+\eta)\lambda$] | 60. $(\delta+\varepsilon)\varkappa\sigma$
48. $(\delta+\varepsilon)\zeta\lambda$] | 53. $(\delta+\varepsilon)\eta\sigma$ | 57. $(\delta+\varepsilon)(\zeta+\eta)\sigma$ | [61. $(\delta+\varepsilon)\varkappa\tau$]
49. $(\delta+\varepsilon)\zeta\sigma$ | 54. $(\delta+\varepsilon)\eta\tau$] | [58. $(\delta+\varepsilon)(\zeta+\eta)\tau$]
[50. $(\delta+\varepsilon)\zeta\tau$]

62. $(\delta+\varepsilon)\lambda\sigma$ 64. $(\delta+\varepsilon)\sigma\tau$
[63. $(\delta+\varepsilon)\lambda\tau$]

65. $\zeta\eta\varkappa$ | [69. $\zeta\varkappa\lambda$] | 72. $\zeta\lambda\sigma$ | 74. $\zeta\sigma\tau$
66. $\zeta\eta\lambda$ | 70. $\zeta\varkappa\sigma$ | [73. $\zeta\lambda\tau$]
67. $\zeta\eta\sigma$ | [71. $\zeta\varkappa\tau$]
68. $\zeta\eta\tau$

[75. $\eta\varkappa\lambda$ | [78. $\eta\lambda\sigma$] | 80. $\eta\sigma\tau$
76. $\eta\varkappa\sigma$] | 79. $\eta\lambda\tau$
77. $\eta\varkappa\tau$

[81. $(\zeta+\eta)\varkappa\lambda$] | 84. $(\zeta+\eta)\lambda\sigma$ | 86. $(\zeta+\eta)\sigma\tau$
82. $(\zeta+\eta)\varkappa\sigma$ | 85. $(\zeta+\eta)\lambda\tau$
83. $(\zeta+\eta)\varkappa\tau$

87. $\varkappa\lambda\sigma$ | 89. $\varkappa\sigma\tau$ | 90. $\lambda\sigma\tau$
88. $\varkappa\lambda\tau$

Die Berechnung der Elemente erfolgt aus diesen Complexen stets in der Weise, dass zunächst aus den Fundamental-Bögen zwei an einander schliessende Bögen zwischen e_1, e_3, e_2, e_4 ermittelt, und damit die Verhältnisse der ersten Abtheilung herbeigeführt werden.

In 40 Fällen liegen die Fundamental-Bögen so, dass dies durch Auflösung von sphärischen Dreiecken bewirkt werden kann; von diesen sind 24 eindeutig, 16 zweideutig, in so fern in der Rechnung als Resultat der Sinus-Werth eines Bogens oder Winkels auftritt, der nur unter Umständen auf den einen der möglichen Bögen unzweideutig auszulegen ist.

Es existiren aber neben den Dreiecks-Beziehungen noch einige, auf den obwaltenden Deductions-Verhältnissen beruhende Winkel-Relationen, welche in 2 Fällen die unzweideutige Ableitung eines von den gewählten Fundamental-Bögen abhängigen vierten Bogens geben,

Digitized by Google

welcher den betreffenden Complex zur Auflösung von sphärischen Dreiecken vervollständigt. In 4 anderen Fällen gelangt man linear zu dem Sinus-Werth eines vierten Bogens, in 4 weiteren Fällen mittelst einer quadratischen Gleichung zu dem Cosinus-Werth eines vierten, die Verwerthung von sphärischen Dreiecken ermöglichenden Bogens.

Es sind also im Ganzen 50 praktisch verwerthbare Combinationen vorhanden; die verbleibenden übrigen 40 Combinationen erfordern, dass man mehrere der singulären Deductions-Relationen combinirt, um einen vierten zur Dreiecks-Auflösung führenden Bogen zu finden, für den aber eine biquadratische und auch noch höhere Gleichung aufkommt, welche also besagt, dass der betreffende Fundamental-Bogen-Complex in vier oder noch mehr verschiedenen Elementen bestehen könne.

Diese singulären, auf den besonderen Deductions-Verhältnissen beruhenden Relationen lassen sich wie folgt ausdrücken.

$$\cos ghb = \frac{\cos(90^\circ-\sigma)-\cos\delta\cos(90^\circ-\tau)}{\sin\delta\sin(90^\circ-\tau)} = \frac{\sin\sigma-\cos\delta\sin\tau}{\sin\delta\cos\tau} =$$

$$= \cos e_2 h e_4 = \frac{\cos\varepsilon\sin\tau}{\sin\varepsilon\cos\tau}\text{; daraus: } \frac{\sin\sigma}{\sin\tau} = \frac{\sin(\delta+\varepsilon)}{\sin\varepsilon}. \quad \ldots\ldots(a)$$

$$\cos g\bar{h}b = \frac{\cos(90^\circ-\sigma)-\cos(\zeta+\eta)\cos(90^\circ+\tau}{\sin(\zeta+\eta)\sin(90^\circ+\tau)} = \frac{\sin\sigma+\cos(\zeta+\eta)\sin\tau}{\sin(\zeta+\eta)\cos\tau} =$$

$$= \cos e_2 \bar{h} e_3 = \frac{\cos\eta\sin\tau}{\sin\eta\cos\tau}\text{; daraus: } \frac{\sin\sigma}{\sin\tau} = \frac{\sin\zeta}{\sin\eta}. \quad \ldots\ldots\ldots(b)$$

$$\cos e_2 e_1 = \frac{\cos\lambda}{\cos\sigma} = \frac{\cos\varkappa}{\cos\tau} \text{ oder } \frac{\cos\lambda}{\cos\varkappa} = \frac{\cos\sigma}{\cos\tau} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

$$\cos e_2 e_1 = \cos gbh = \frac{\cos\delta-\cos(90^\circ-\tau)\cos(90^\circ-\sigma)}{\sin(90^\circ-\tau)\sin(90^\circ-\sigma)} = \frac{\cos\delta-\sin\sigma\sin\tau}{\cos\sigma\cos\tau};$$

$$\text{daraus: } \cos\delta = \cos\lambda\cos\tau+\sin\sigma\sin\tau, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (d)$$

$$\cos\delta = \cos\varkappa\cos\sigma+\sin\sigma\sin\tau. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (e)$$

$$\cos e_2 e_1 = \cos g\bar{b}\bar{h} = \frac{\cos(\zeta+\eta)-\cos(90^\circ+\tau)\cos(90^\circ-\sigma)}{\sin(90^\circ+\tau)\sin(90^\circ-\sigma)}$$

$$= \frac{\cos(\zeta+\eta)+\sin\sigma\sin\tau}{\cos\sigma\cos\tau};$$

$$\text{daraus: } \cos(\zeta+\eta) = \cos\lambda\cos\tau-\sin\sigma\sin\tau, \quad \ldots\ldots\ldots (f)$$

$$\cos(\zeta+\eta) = \cos\varkappa\cos\sigma-\sin\sigma\sin\tau. \quad \ldots\ldots\ldots (g)$$

Man findet nun ferner:

$$\text{aus (a) (b): } \frac{\sin(\delta+\varepsilon)}{\sin\varepsilon} = \frac{\sin\zeta}{\sin\eta}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (h)$$

$$\text{aus (d) (f): } \cos\delta+\cos(\zeta+\eta) = 2\cos\lambda\cos\tau, \quad \ldots\ldots\ldots (i)$$

$$\text{aus (e) (g): } \cos\delta+\cos(\zeta+\eta) = 2\cos\varkappa\cos\sigma, \quad \ldots\ldots\ldots (k)$$

Digitized by Google

aus (d) (f): $\cos\delta - \cos(\zeta+\eta) = 2\sin\sigma\sin\tau$, ... (l)

aus (a) (d): $\cos\delta = \cos\lambda\cos\tau + \frac{\sin^2\tau\sin(\delta+\varepsilon)}{\sin\varepsilon}$ ..... (m)

aus (a) (e): $\cos\delta = \cos\varkappa\cos\sigma + \frac{\sin^2\sigma\sin\varepsilon}{\sin(\delta+\varepsilon)}$ ..... (n)

aus (b) (f): $\cos(\zeta+\eta) = \cos\lambda\cos\tau - \frac{\sin^2\tau\sin\zeta}{\sin\eta}$ ..... (o)

aus (b) (g): $\cos(\zeta+\eta) = \cos\varkappa\cos\sigma - \frac{\sin^2\sigma\sin\eta}{\sin\zeta}$ ..... (p)

aus (a) (l): $\cos\delta - \cos(\zeta+\eta) = \frac{2\sin^2\tau\sin(\delta+\varepsilon)}{\sin\varepsilon}$ ..... (q)

$\cos\delta - \cos(\zeta+\eta) = \frac{2\sin^2\sigma\sin\varepsilon}{\sin(\delta+\varepsilon)}$ ..... (r)

aus (b) (l): $\cos\delta - \cos(\zeta+\eta) = \frac{2\sin^2\tau\sin\zeta}{\sin\eta}$ ..... (s)

$\cos\delta - \cos(\zeta+\eta) = \frac{2\sin^2\sigma\sin\eta}{\sin\zeta}$ ..... (t)

In der hier folgenden Discussion der einzelnen Combinationen kommen nur reale Fälle — unter Ausschluss der unmöglichen und imaginären — in Betracht, da vorausgesetzt wird, dass die zur Verwerthung gelangenden Fundamental-Bögen Abmessungsresultate an concreten Krystallen sind.

I. Ein unzweideutiges Resultat geben folgende Combinationen und zwar:

a. unter Verwerthung von zwei sphärischen Dreiecken, deren 12:

6. $\delta\varepsilon\sigma$; im Dreieck ge_4e_1 ergiebt sich — oder, wie hier der Kürze halber geschrieben werden soll:
$\triangle ge_4e_1 : \cos e_4e_1$; $\triangle he_4e_2 : \operatorname{tg} e_4e_2$.

7. $\delta\varepsilon\tau$; $\triangle he_4e_2 : \cos e_4e_2$; $\triangle ge_4e_1 : \operatorname{tg} e_4e_1$.

26. $\delta\sigma\tau$; $\triangle ghb$ giebt aus $gb = 90^\circ - \sigma$, $hb = 90^\circ - \tau$, $\delta : \cos hbg = \cos e_2e_1$, $\cos bhg = \cos e_4he_2$; $\triangle he_4e_2 : \operatorname{tg} e_4e_1$.

35. $\varepsilon\eta\tau$; $\triangle he_4e_2 : \cos e_4e_2$; $\triangle he_2e_3 : \cos e_2e_3$.

42. $\varepsilon\varkappa\tau$; $\triangle he_4e_2 : \cos e_4e_2$; $\triangle he_2e_1 : \cos e_2e_1$.

49. $(\delta+\varepsilon)\zeta\sigma$; $\triangle ge_4e_1 : \cos e_4e_1$; $\triangle ge_3e_1 : \cos e_3e_1$.

62. $(\delta+\varepsilon)\lambda\sigma$; $\triangle ge_4e_1 : \cos e_4e_1$; $\triangle ge_2e_1 : \cos e_2e_1$.

67. $\zeta\eta\sigma$; $\triangle ge_3e_1 : \cos e_3e_1$, $\sin ge_3e_1$; $\triangle he_2e_3 : \operatorname{tg} e_2e_3$.

68. $\zeta\eta\tau$; $\triangle he_3e_2 : \cos e_2e_3$, $\sin he_3e_2$; $\triangle ge_3e_1 : \operatorname{tg} e_3e_1$.

72. $\zeta\lambda\sigma$; $\triangle ge_2e_1 : \cos e_2e_1$; $\triangle ge_3e_1 : \cos e_3e_1$.

Digitized by Google

77. $\eta\varkappa\tau$; $\triangle he_2e_3 : \cos e_2e_3$; $\triangle he_2e_1 : \cos e_2e_1$.

86. $(\zeta+\eta)\sigma\tau$; $\triangle bh\bar{g}$ giebt aus $hb = 90^\circ - \tau$, $b\bar{g} = 90^\circ + \sigma$, $\bar{g}h = (\zeta+\eta) : \cos hb\bar{g} = \cos e_2e_1$, $\cos h\bar{g}g = \cos e_3ge_1$; $\triangle ge_3e_1 : \operatorname{tg} e_3e_1$.

b. unterVerwerthung von drei sphärischen Dreiecken, deren 10:

3. $\delta\varepsilon(\zeta+\eta)$; $\triangle g\bar{h}e_4$ giebt aus $ge_4 = (\delta+\varepsilon)$, $g\bar{h} = (\zeta+\eta)$, $\bar{h}e_4 = \varepsilon : \cos ge_4\bar{h}$ $= \cos 2 \cdot he_4e_2 = \cos 2 \cdot ge_4e_1$; $\triangle he_4e_2 : \operatorname{tg} e_4e_2$, $\triangle ge_4e_1 : \operatorname{tg} e_4e_1$.

8. $\delta\zeta\eta$; $\triangle ghe_3$ giebt aus $\delta, \zeta, \eta : \cos ge_3h = \cos(180^\circ - 2 \cdot he_3e_2) =$ $= \cos(180^\circ - 2 \cdot ge_3e_1)$; $\triangle he_2e_3 : \operatorname{tg} e_2e_3$; $\triangle ge_3e_1 : \operatorname{tg} e_3e_1$.

19. $\delta(\zeta+\eta)\sigma$; $\triangle g\bar{g}\bar{h}$ giebt aus $g\bar{g} = 2\sigma$, $g\bar{h} = (\zeta+\eta)$, $\bar{g}\bar{h} = \delta : \cos g\bar{g}\bar{h}$ $= \cos e_4ge_1$ und $\cos\bar{h}g\bar{g} = \cos e_3ge_1$; $\triangle ge_4e_1 : \operatorname{tg} e_4e_1$, $\triangle ge_3e_1 : \operatorname{tg} e_3e_1$.

20. $\delta(\zeta+\eta)\tau$; $\triangle gh\bar{h}$ giebt aus $h\bar{h} = 2\tau$, $g\bar{h} = (\zeta+\eta)$, $gh = \delta : \cos gh\bar{h}$ $= \cos(180^\circ - e_4he_2)$ und $\cos h\bar{h}g = \cos e_2he_3$; $\triangle he_4e_2 : \operatorname{tg} e_4e_2$; $\triangle he_2e_3 : \operatorname{tg} e_2e_3$.

22. $\delta\varkappa\sigma$; $\triangle ghe_1 : \cos hge_1 = \cos e_4ge_1$ und $\cos he_1g = \cos(90^\circ - he_1e_2)$; $\triangle ge_4e_1 : \operatorname{tg} e_4e_1$; $\triangle he_2e_1 : \operatorname{tg} e_2e_1$.

25. $\delta\lambda\tau$; $\triangle ghe_2 : \cos ghe_2 = \cos(180^\circ - e_4he_2)$ und $\cos he_2g =$ $= \cos(90^\circ - ge_2e_1)$; $\triangle he_4e_2 : \operatorname{tg} e_4e_2$; $\triangle ge_2e_1 : \operatorname{tg} e_2e_1$.

82. $(\zeta+\eta)\varkappa\sigma$; $\triangle g\bar{h}e_1 : \cos ge_1\bar{h} = \cos(90^\circ + \bar{h}e_1e_2)$ und $\cos\bar{h}ge_1 =$ $= \cos e_3ge_1$; $\triangle\bar{h}e_2e_1 : \operatorname{tg} e_2e_1$; $\triangle ge_3e_1 : \operatorname{tg} e_3e_1$.

85. $(\zeta+\eta)\lambda\tau$; $\triangle g\bar{h}e_2 : \cos ge_2\bar{h} = \cos(90^\circ + ge_2e_1)$ und $\cos e_2\bar{h}g = e_2\bar{h}e_3$; $\triangle ge_2e_1 : \operatorname{tg} e_2e_1$; $\triangle\bar{h}e_2e_3 : \operatorname{tg} e_3e_1$.

89. $\varkappa\sigma\tau$; $\triangle he_2e_1 : \cos e_2e_1$, $\sin he_1e_2$ und zwar $he_1e_2 < 90^\circ$ und $= 90^\circ - ge_1h$; $\triangle ghe_1 : \operatorname{tg}\frac{1}{2}(hge_1 \pm ghe_1)$ und $hge_1 = e_4ge_1$; $\triangle ge_4e_1 : \operatorname{tg} e_4e_1$.

90. $\lambda\sigma\tau$; $\triangle ge_2e_1 : \cos e_2e_1$, $\sin ge_2e_1$ und zwar $ge_2e_1 < 90^\circ$ und $= 90^\circ - ge_2h$; $\triangle ghe_2 : \operatorname{tg}\frac{1}{2}(ghe_2 \pm hge_2)$ und $ghe_2 = 180^\circ - e_4he_2$; $\triangle e_4he_2 : \operatorname{tg} e_4e_2$.

c. unter Verwerthung von vier sphärischen Dreiecken, deren 2:

87. $\varkappa\lambda\sigma$; $\triangle ge_2e_1 : \cos e_2e_1$; $\triangle he_2e_1 : \cos he_1e_2 = \cos(ge_1\bar{h} - 90^\circ)$; $\triangle g\bar{h}e_1$ giebt aus $ge_1 = \sigma$, $\bar{h}e_1 = \varkappa$, $ge_1\bar{h} : \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\bar{h}ge_1 \pm g\bar{h}e_1)$ und $\bar{h}ge_1 = e_3ge_1$; $\triangle ge_3e_1 : \operatorname{tg} e_3e_1$.

88. $\varkappa\lambda\tau$; $\triangle he_2e_1 : \cos e_2e_1$; $\triangle ge_2e_1 : \cos ge_2e_1 = \cos(ge_2\bar{h} - 90^\circ)$; $\triangle g\bar{h}e_2$ giebt aus λ, τ, $ge_2\bar{h} : \operatorname{tg}\frac{1}{2}(ghe_2 \pm \bar{h}ge_2)$ und $g\bar{h}e_2 = e_2he_3$; $\triangle he_2e_3 : \operatorname{tg} e_2e_3$.

Digitized by Google

d. unter Verwerthung anderer Relationen, deren 2:

17. $\delta(\zeta+\eta)\varkappa$; nach (k) : $\dfrac{\cos\delta+\cos(\zeta+\eta)}{2\cos\varkappa}=\cos\sigma$; daraus, wie I. b. 22, aus $\delta\varkappa\sigma$: tg e_4e_1 , tg e_2e_1.

18. $\delta(\zeta+\eta)\lambda$; nach (i) : $\dfrac{\cos\delta+\cos(\zeta+\eta)}{2\cos\lambda}=\cos\tau$; daraus, wie I. b. 25, aus $\delta\lambda\tau$: tg e_4e_2 , tg e_2e_1.

II. Ein im Allgemeinen zweideutiges (unter Umständen eindeutig werdendes) Resultat geben folgende Combinationen und zwar:

a. unter Verwerthung von zwei sphärischen Dreiecken, deren 4:

45. $\varepsilon\sigma\tau$; $\triangle he_4e_2$: cos e_4e_2 und sin he_4e_2 ; $he_4e_2<90°$ und $=ge_4e_1$; $\triangle ge_4e_1$: sin e_4e_1. Ob $e_4e_1<$ oder $>90°$ zu nehmen, bleibt zweideutig, wenn nicht $e_4e_1>e_4e_2$ den Ausschlag giebt.

64. $(\delta+\varepsilon)\sigma\tau$; $\triangle ge_4e_1$: cos e_4e_1 und sin ge_4e_1 ; $ge_4e_1<90°$ und $=he_4e_2$; $\triangle he_4e_2$: sin e_4e_2. Ob $e_4e_2<$ oder $>90°$ zu nehmen, bleibt zweideutig, wenn nicht $e_4e_1>e_4e_2$ den Ausschlag giebt.

74. $\zeta\sigma\tau$; $\triangle ge_3e_1$: cos e_3e_1 und sin ge_3e_1 ; $ge_3e_1<90°$ und $=he_3e_2$; $\triangle he_2e_3$: sin e_2e_3. Ob $e_2e_3<$ oder $>90°$ zu nehmen, bleibt zweideutig, wenn nicht $e_2e_3+e_3e_1<180°$ den Ausschlag giebt.

80. $\eta\sigma\tau$; $\triangle he_2e_3$: cos e_2e_3 und sin he_3e_2 ; $he_3e_2<90°$ und $=ge_3e_1$; $\triangle ge_3e_1$: sin e_3e_1. Ob $e_3e_1<$ oder $>90°$ zu nehmen, bleibt zweideutig, wenn nicht $e_2e_3+e_3e_1<180°$ den Ausschlag giebt.

b. unter Verwerthung von drei sphärischen Dreiecken, deren 12:

11. $\delta\zeta\sigma$; $\triangle ge_3e_1$: cos e_3e_1 , sin ge_3e_1 ; $ge_3e_1<90°=90°-\frac{1}{2}ge_3h$; $\triangle ghe_3$ giebt aus δ , ζ , ge_3h : sin ghe_3 und tg $\frac{1}{2}he_3$ eindeutig, wenn δ näher an 90° ist, als ζ ; $\triangle he_2e_3$: tg e_2e_3.

16. $\delta\eta\tau$; $\triangle he_2e_3$: cos e_2e_3 , sin he_3e_2 ; $he_3e_2<90°=90°-\frac{1}{2}ge_3h$; $\triangle ghe_3$ giebt aus δ , η , ge_3h : sin hge_3 und tg $\frac{1}{2}ge_3$ eindeutig, wenn δ näher an 90° ist als η; $\triangle ge_3e_1$: tg e_3e_1.

23. $\delta\varkappa\tau$; $\triangle he_2e_1$: cos e_2e_1 , sin he_1e_2 ; $he_1e_2<90°=90°-he_1g$; $\triangle ghe_1$ giebt aus $\varkappa$, δ , he_1g : sin $hge_1=$ sin e_4ge_1 , tg $\frac{1}{2}ge_1$ eindeutig, wenn δ näher an 90° liegt als $\varkappa$; $\triangle ge_4e_1$: tg e_4e_1.

Digitized by Google

24. $\delta\lambda\sigma$; $\triangle ge_2e_1 : \cos e_2e_1$, $\sin ge_2e_1$; $ge_2e_1 < 90^\circ = 90^\circ - ge_2h$; $\triangle ghe_2$ giebt aus $\delta, \lambda, ge_2h : \sin ghe_2 = \sin 180^\circ - e_4he_2$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2} he_2$ eindeutig, wenn δ näher an 90° liegt als λ ; $\triangle he_4e_2 : \operatorname{tg} e_4e_2$.

39. $\varepsilon(\zeta+\eta)\tau$; $\triangle he_4e_2 : \cos e_4e_2$, $\cos e_4he_2 = \cos(180^\circ - \bar{h}hg)$, $\sin he_4e_2$; $he_4e_2 < 90^\circ$; $\triangle gh\bar{h}$ giebt aus $\zeta+\eta$, $h\bar{h} = 2\tau$, $\bar{h}hg : \sin hg\bar{h}$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2} hg$ eindeutig, wenn $(\zeta+\eta)$ näher an 90° ist als 2τ; $\triangle ge_4e_1 : \operatorname{tg} e_4e_1$.

44. $\varepsilon\lambda\tau$; $\triangle he_4e_1 : \cos e_4e_2$, $\cos e_4he_2 = \cos(180^\circ - ghe_2)$, $\sin he_4e_2$; $he_4e_2 < 90^\circ$; $\triangle ghe_2$ giebt aus $\tau, \lambda, ghe_1 : \sin hge_2$ und $\operatorname{tg} \frac{1}{2} hg$ eindeutig, wenn λ näher an 90° als τ ist; $\triangle ge_4e_1 : \operatorname{tg} e_4e_1$.

57. $(\delta+\varepsilon)(\zeta+\eta)\sigma$; $\triangle ge_4e_1 : \cos e_1e_4$, $\sin ge_4e_1$; $ge_4e_1 < 90^\circ = \frac{1}{2} ge_4\bar{h}$; $\triangle g\bar{h}e_4$ giebt aus $(\delta+\varepsilon)$, $(\zeta+\eta)$, $ge_4\bar{h} : \sin g\bar{h}e_4$ und $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \bar{h}e_4$ eindeutig, wenn $(\zeta+\eta)$ näher an 90° ist als $(\delta+\varepsilon)$; auch ist $\bar{h}e_4 = \varepsilon$ und $< (\delta+\varepsilon)$; $\triangle \bar{h}e_4e_2 : \operatorname{tg} e_4e_2$.

60. $(\delta+\varepsilon)\varkappa\sigma$; $\triangle ge_4e_1 : \cos e_1e_4$, $\cos e_4ge_1$, $\sin ge_4e_1$; $ge_4e_1 < 90^\circ$; $\triangle ghe_1$ giebt aus $\varkappa, \sigma, hge_1 = e_4ge_1 : \sin e_1hg$ und $\operatorname{tg} \frac{1}{2} gh$ eindeutig, wenn $\varkappa$ näher an 90° als σ ; auch ist $gh = \delta$ und $< (\delta+\varepsilon)$; $\triangle he_4e_1$ giebt aus $he_4e_1 = ge_4e_1$ und $he_4 = (\delta+\varepsilon) - gh : \operatorname{tg} e_4e_2$.

70. $\zeta\varkappa\sigma$; $\triangle ge_3e_1 : \cos e_3e_1$, $\cos e_1ge_3$, $\sin ge_3e_1$; $ge_3e_1 < 90^\circ = he_3e_2$; $\triangle g\bar{h}e_1$ giebt aus σ, $e_1\bar{h} = \varkappa$, $e_1g\bar{h} = e_1ge_3 : \sin e_1\bar{h}g$ und $\operatorname{tg} \frac{1}{2} g\bar{h}$ eindeutig, wenn ζ näher an 90° als σ ; auch ist $g\bar{h} = (\zeta+\eta)$ und $> \zeta$; $\triangle he_3e_2$ giebt aus $he_3 = g\bar{h} - \zeta$; $he_3e_2 : \operatorname{tg} e_3e_2$.

79. $\eta\lambda\tau$; $\triangle he_2e_3 : \cos e_3e_2$, $\cos e_2he_3 = \cos e_2\bar{h}e_3$, $\sin he_3e_2$; $he_3e_2 < 90^\circ = ge_3e_1$, $\triangle ge_2\bar{h}$ giebt aus $\tau, \lambda, e_2\bar{h}g = e_2\bar{h}e_3 : \sin e_2g\bar{h}$ und $\operatorname{tg} \frac{1}{2} g\bar{h}$ eindeutig, wenn λ näher an 90° als τ ist; auch ist $g\bar{h} = (\zeta+\eta)$ und $> \eta$; $\triangle ge_3e_1$ giebt aus $ge_3e_1, ge_3 = g\bar{h} - \eta : \operatorname{tg} e_3e_1$.

83. $(\zeta+\eta)\varkappa\tau$; $\triangle he_2e_1 : \cos e_2e_1$, $\sin he_1e_2$; $he_1e_2 < 90^\circ = he_1\bar{g} - 90^\circ$; $\triangle h\bar{g}e_1$ giebt aus $(\zeta+\eta)$, $\varkappa$, $he_1\bar{g} : \sin h\bar{g}e_1 = \sin e_3\bar{g}e_1$ und $\operatorname{tg} \frac{1}{2} e_1\bar{g}$ eindeutig, wenn $(\zeta+\eta)$ näher an 90° als $\varkappa$; auch ist $e_1\bar{g} < 90^\circ$; $\triangle \bar{g}e_3e_1 : \operatorname{tg} e_3e_1$.

84. $(\zeta+\eta)\lambda\sigma$; $\triangle ge_2e_1 : \cos e_2e_1$, $\sin ge_2e_1$; $ge_2e_1 < 90^\circ = he_2\bar{g} - 90^\circ$; $\triangle he_2\bar{g}$ giebt aus $(\zeta+\eta)$, λ, $he_2\bar{g} : \sin e_2h\bar{g}$ und $\operatorname{tg} \frac{1}{2} he_2$ eindeutig, wenn $(\zeta+\eta)$ näher an 90° als λ; auch wird $he_2 = \tau$, $< 90^\circ$; $\triangle he_3e_2 : \operatorname{tg} e_2e_3$.

c. unter Einführung des Sinus eines vierten Bogens, deren 4:

Die Deutung des letzteren ist limitirt, wenn der Umstand $\varepsilon < (\delta+\varepsilon)$ und $\cos\delta - \cos(\zeta+\eta) > 0$, letzteres nach (q) bis (t) unter Bezug-

Digitized by Google

nahme auf die Voraussetzung dass $(\varepsilon + \delta)$ und $(\zeta + \eta) < 180°$, den Ausschlag giebt.

1. $\delta\varepsilon\zeta$; nach (h) : $\sin\eta = \frac{\sin\zeta\sin\varepsilon}{\sin(\delta+\varepsilon)}$; sodann, wie I. b. 8. aus $\delta\zeta\eta$: tg e_2e_3, tg e_3e_1.

2. $\delta\varepsilon\eta$; nach (h) : $\sin\zeta = \frac{\sin(\delta+\varepsilon)\sin\eta}{\sin\varepsilon}$; sodann, wie I. b. 8. aus $\delta\zeta\eta$: tg e_2e_3, tg e_3e_1.

27. $\varepsilon\zeta\eta$; nach (h) : $\sin(\delta+\varepsilon) = \frac{\sin\zeta\sin\varepsilon}{\sin\eta}$; sodann, wie I. b. 8. aus $\delta\zeta\eta$: tg e_2e_3, tg e_3e_1.

46. $(\delta+\varepsilon)\zeta\eta$; nach (h) : $\sin\varepsilon = \frac{\sin(\delta+\varepsilon)\sin\eta}{\sin\zeta}$; sodann, wie I. b. 8. aus $\delta\zeta\eta$: tg e_2e_3, tg e_3e_1.

d. unter Einführung des Cosinus von σ oder τ mittelst einer quadratischen Gleichung, deren 4:

4. $\delta\varepsilon\varkappa$; nach (n) : $\cos\delta = \cos\varkappa\cos\sigma + \frac{\sin^2\sigma\sin\varepsilon}{\sin(\delta+\varepsilon)}$, daraus

$$\cos\sigma = \frac{\sin(\delta+\varepsilon)\cos\varkappa}{2\sin\varepsilon} \pm \sqrt{\frac{\sin^2(\delta+\varepsilon)\cos^2\varkappa}{4\sin^2\varepsilon} + 1 - \frac{\cos\delta\sin(\delta+\varepsilon)}{\sin\varepsilon}},$$

sodann, wie I. a. 6. aus $\delta\varepsilon\sigma$: cos e_4e_1, tg e_4e_2; eindeutig, wenn $\varkappa > 90°$ ist, insofern $\sigma < 90°$ werden soll.

5. $\delta\varepsilon\lambda$; nach (m) : $\cos\delta = \cos\lambda\cos\tau + \frac{\sin^2\tau\sin(\delta+\varepsilon)}{\sin\varepsilon}$; daraus

$$\cos\tau = \frac{\sin\varepsilon\cos\lambda}{2\sin(\delta+\varepsilon)} \pm \sqrt{\frac{\sin^2\varepsilon\cos^2\lambda}{4\sin^2(\delta+\varepsilon)} + 1 - \frac{\cos\delta\sin\varepsilon}{\sin(\delta+\varepsilon)}};$$

sodann wie I. a. 7. aus $\delta\varepsilon\tau$: cos e_4e_2, tg e_4e_1; eindeutig, wenn $\lambda > 90°$, insofern $\tau < 90°$ werden muss.

65. $\zeta\eta\varkappa$; nach (p) : $\cos(\zeta+\eta) = \cos\varkappa\cos\sigma - \frac{\sin^2\sigma\sin\eta}{\sin\zeta}$; daraus

$$\cos\sigma = -\frac{\sin\zeta\cos\varkappa}{2\sin\eta} \pm \sqrt{\frac{\sin^2\zeta\cos^2\varkappa}{4\sin^2\eta} + 1 + \frac{\cos(\zeta+\eta)\sin\zeta}{\sin\eta}};$$

sodann wie I. a. 67. aus $\zeta\eta\sigma$: cos e_3e_1, tg e_2e_3; eindeutig, wenn $\varkappa < 90°$, insofern $\sigma < 90°$ werden muss.

66. $\zeta\eta\lambda$; nach (o) : $\cos(\zeta+\eta) = \cos\lambda\cos\tau - \frac{\sin^2\tau\sin\zeta}{\sin\eta}$; daraus

$$\cos\tau = -\frac{\sin\eta\cos\lambda}{2\sin\zeta} \pm \sqrt{\frac{\sin^2\eta\cos^2\lambda}{4\sin^2\zeta} + 1 + \frac{\cos(\zeta+\eta)\sin\eta}{\sin\zeta}};$$

Digitized by Google

sodann wie I. a. 68. aus $\zeta\eta\tau$: cos e_2e_3 , tg e_3e_1 ; eindeutig, wenn $\lambda < 90°$, insofern $\tau < 90°$ werden muss.

Hiermit schliesst die Reihe der practisch verwerthbaren Combinationen; es soll nun noch der Nachweis geliefert werden, dass die noch verbleibenden 40 Combinationen überhaupt Elemente bestimmen, und zwar dadurch, dass der Weg angedeutet wird, aus den gewählten Fundamentalbögen einen vierten, wenn auch mehrdeutig, abzuleiten, der den Complex zur trigonometrischen Behandlung geeignet macht.

Zu diesem Behuf ist zu erwägen, dass unter Verwerthung der Relationen (a) und (b)

$$\cos\delta = \cos(\delta+\varepsilon)\cos\varepsilon + \sin(\delta+\varepsilon)\sin\varepsilon =$$

$$= \cos\varepsilon\sqrt{1 - \frac{\sin^2\varepsilon\sin^2\sigma}{\sin^2\tau}} + \frac{\sin^2\varepsilon\sin\sigma}{\sin\tau} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(u)}$$

$$= \cos(\delta+\varepsilon)\sqrt{1 - \frac{\sin^2(\delta+\varepsilon)\sin^2\tau}{\sin^2\sigma}} + \frac{\sin^2(\delta+\varepsilon)\sin\tau}{\sin\sigma} \quad \ldots \text{(v)}$$

$$\cos(\zeta+\eta) = \cos\zeta\cos\eta - \sin\zeta\sin\eta =$$

$$= \cos\eta\sqrt{1 - \frac{\sin^2\eta\sin^2\sigma}{\sin^2\tau}} - \frac{\sin^2\eta\sin\sigma}{\sin\tau} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(w)}$$

$$= \cos\zeta\sqrt{1 - \frac{\sin^2\zeta\sin^2\tau}{\sin^2\sigma}} - \frac{\sin^2\zeta\sin\tau}{\sin\sigma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(x)}$$

gesetzt werden kann und dass

$\operatorname{tg}\sigma = \sin e_4e_1 \operatorname{tg} ge_4e_1 = \sin e_3e_1 \operatorname{tg} ge_3e_1$

$\operatorname{tg}\tau = \sin e_4e_2 \operatorname{tg} he_4e_2 = \sin e_3e_2 \operatorname{tg} he_3e_2$ und, da

$$ge_4e_1 = he_4e_1\,,\ ge_3e_1 = he_3e_2\,,\ \text{auch}\ \frac{\sin e_4e_1}{\sin e_4e_2} = \frac{\sin e_3e_1}{\sin e_3e_2}\ \text{ist;}$$

schreibt man den letzten Ausdruck

$$\frac{\sin e_4e_1}{\sin(e_4e_1 - e_2e_1)} = \frac{\sin e_3e_1}{\sin(e_2e_1 - e_3e_1)}\,,\ \text{so ergiebt sich:}$$

$$\cot e_3e_1 + \cot e_4e_1 = 2\cot e_2e_1\,,^1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(y)}$$

schreibt man

$$\frac{\sin(e_4e_2 + e_2e_1)}{\sin e_4e_2} = \frac{\sin(e_2e_1 - e_3e_2)}{\sin e_3e_2}:$$

$$\cot e_2e_3 - \cot e_4e_2 = 2\cot e_2e_1\,. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(z)}$$

Folgende 12 Combinationen führen auf eine biquadratische Gleichung:

12. $\delta\zeta\tau$; man entwickelt aus (s) die biquadratische Wurzel von sin η und nach I. a. 68. aus $\zeta\eta\tau$: cos e_2e_3 , tg e_3e_1.

[1] Vergl.: A. a. O. S. 245.

Digitized by Google

15. $\delta\eta\sigma$; man entwickelt aus (t) die biquadratische Wurzel von $\sin\zeta$ und nach I. a. 67. aus $\zeta\eta\sigma : \cos e_3e_1$, $\operatorname{tg} e_2e_3$.

21. $\delta\varkappa\lambda$; $\sin\sigma$ aus (c), eingetragen in (d), giebt eine biquadratische Wurzel $= \cos\tau$, und folgt, wie I. b. 25., aus $\delta\lambda\tau : \operatorname{tg} e_4e_2$, $\operatorname{tg} e_2e_1$.

32. $\varepsilon\eta\varkappa$; man drückt (z) aus in der Form

$$\frac{\cos\eta}{\sqrt{\cos^2\tau - \cos^2\eta}} - \frac{\cos\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\tau - \cos^2\varepsilon}} = \frac{2\cos\varkappa}{\sqrt{\cos^2\tau - \cos^2\varkappa}},$$

worin die biquadratische Wurzel $= \cos^2\tau$; sodann, wie I. a. 35., aus $\varepsilon\eta\tau : \cos e_4e_2$, $\cos e_2e_3$.

38. $\varepsilon(\zeta+\eta)\sigma$; man entwickelt aus (r) die Wurzel $= \sin(\delta+\varepsilon)$ und, wie I. a. 6., aus $\delta\varepsilon\sigma : \cos e_4e_1$, $\operatorname{tg} e_4e_2$.

41. $\varepsilon\varkappa\sigma$; aus (n) folgt die Wurzel $= \sin(\delta+\varepsilon)$ und, wie I. a. 6., aus $\delta\varepsilon\sigma : \cos e_4e_1$, $\operatorname{tg} e_4e_2$.

48. $(\delta+\varepsilon)\zeta\lambda$; man drückt (y) aus in der Form

$$\frac{\cos(\delta+\varepsilon)}{\sqrt{\cos^2\sigma - \cos^2(\delta+\varepsilon)}} + \frac{\cos\zeta}{\sqrt{\cos^2\sigma - \cos^2\zeta}} = \frac{2\cos\lambda}{\sqrt{\cos^2\sigma - \cos^2\lambda}},$$

worin die biquadratische Wurzel $= \cos^2\sigma$, sodann, wie I. a. 72., aus $\zeta\lambda\sigma : \cos e_2e_1$, $\cos e_3e_1$.

58. $(\delta+\varepsilon)(\zeta+\eta)\tau$; man entwickelt aus (q) die Wurzel $= \sin\varepsilon$, sodann, wie I. a. 7., aus $\delta\varepsilon\tau : \cos e_4e_2$, $\operatorname{tg} e_4e_1$.

63. $(\delta+\varepsilon)\lambda\tau$; man entwickelt aus (m) die Wurzel $= \sin\varepsilon$, sodann, wie I. a. 7., aus $\delta\varepsilon\tau : \cos e_4e_2$, $\operatorname{tg} e_4e_1$.

73. $\zeta\lambda\tau$; man entwickelt aus (o) die Wurzel $= \sin\eta$, sodann, wie I. a. 68., aus $\zeta\eta\tau : \cos e_2e_3$, $\operatorname{tg} e_3e_1$.

76. $\eta\varkappa\sigma$; man entwickelt aus (p) die Wurzel $= \sin\zeta$, sodann, wie I. a. 67., aus $\zeta\eta\sigma : \cos e_3e_1$, $\operatorname{tg} e_2e_3$.

81. $(\zeta+\eta)\varkappa\lambda$; man eliminirt nach (c) $\sin\tau$ aus (g) und entwickelt die Wurzel $= \cos\sigma$, sodann, wie I. b. 82., aus $\cos(\zeta+\eta)\varkappa\sigma : \operatorname{tg} e_2e_1$, $\operatorname{tg} e_3e_1$.

Folgende 28 Combinationen führen auf überbiquadratische Gleichungen.

9. $\delta\zeta\varkappa$; in (t) wird $\sin\eta$ durch $(\zeta+\eta)$, ζ ausgedrückt um mit Hülfe von (k) $\sin^2\sigma$ eliminirt; die Wurzel $= \cos(\zeta+\eta)$ gäbe nach I. d. 17., aus $\delta(\zeta+\eta)\varkappa : \operatorname{tg} e_4e_1$, $\operatorname{tg} e_2e_1$.

10. $\delta\zeta\lambda$; in (s) wird $\sin\eta$ durch $(\zeta+\eta)$, ζ ausgedrückt und mit Hülfe von (i) $\sin^2\tau$ eliminirt; die Wurzel $= \cos(\zeta+\eta)$ gäbe, nach I. d. 18., aus $\delta(\zeta+\eta)\lambda : \operatorname{tg} e_4e_2$, $\operatorname{tg} e_2e_1$.

13. $\delta\eta\varkappa$; in (t) wird $\sin\zeta$ durch $(\zeta+\eta)$, η ausgedrückt und mit Hülfe von (k) $\sin^2\sigma$ eliminirt; die Wurzel $= \cos(\zeta+\eta)$ gäbe, nach I. d. 17., aus $\delta(\zeta+\eta)\varkappa : \operatorname{tg} e_4e_1$, $\operatorname{tg} e_2e_1$.

Digitized by Google

14. $\delta\eta\lambda$; in (s) wird $\sin\zeta$ durch $(\zeta+\eta)$, η ausgedrückt und mit Hülfe von (i) $\sin^2\tau$ eliminirt; die Wurzel $=\cos(\zeta+\eta)$ gäbe nach I. d. 18., aus $\delta(\zeta+\eta)\lambda : \operatorname{tg} e_4e_2$, $\operatorname{tg} e_2e_1$.

28. $\varepsilon\zeta\varkappa$; in (g) wird $\cos(\zeta+\eta)$ in der Form von (x) ausgedrückt, daraus die quadratische Wurzel $=\sin\tau$ entwickelt; in (e) wird $\operatorname{cocs}\delta$ in der Form von (u) ausgedrückt und $\sin\tau$, $\cos\tau$ eliminirt: die Wurzel $=\sin\sigma$ gäbe, nach II. b. 70., aus $\zeta\varkappa\sigma$ zweideutig: $\cos e_3e_1$, $\operatorname{tg} e_3e_2$.

29. $\varepsilon\zeta\lambda$; in (d) wird $\cos\delta$ in der Form von (u) ausgedrückt und die quadratische Wurzel $=\sin\sigma$ entwickelt; in (f) wird $\cos(\zeta+\eta)$ in der Form von (x) ausgedrückt und $\sin\sigma$, $\cos\sigma$ eliminirt; die Wurzel $=\sin\tau$ gäbe nach II. b. 44., aus $\varepsilon\lambda\tau$ zweideutig: $\cos e_4e_2$, $\operatorname{tg} e_4e_1$.

30. $\varepsilon\zeta\sigma$; in (t) wird $\cos(\zeta+\eta)$ durch ζ, η und $\cos\delta$ in der Form von (u) ausgedrückt; $\sin\tau$ mit Hülfe von (b) eliminirt; die Wurzel $=\sin\eta$ gäbe, nach I. a. 67., aus $\zeta\eta\sigma : \cos e_3e_1$, $\operatorname{tg} e_2e_3$.

31. $\varepsilon\zeta\tau$; in (s) wird $\cos(\zeta+\eta)$ durch ζ, η und $\cos\delta$ in der Form von (u) ausgedrückt, $\sin\sigma$ mit Hülfe von (b) eliminirt; die Wurzel $=\sin\eta$ gäbe, nach I. a. 68., aus $\zeta\eta\tau : \cos e_2e_3$, $\operatorname{tg} e_3e_1$.

33. $\varepsilon\eta\lambda$; in (f) wird $\cos(\zeta+\eta)$ in der Form von (w) ausgedrückt und die quadratische Wurzel $=\sin\sigma$ entwickelt; in (d) wird $\cos\delta$ in der Form von (u) ausgedrückt, $\sin\sigma$ eliminirt; die Wurzel $=\sin\tau$ gäbe, nach I. a. 35., aus $\varepsilon\eta\tau : \cos e_4e_2$, $\cos e_2e_3$.

34. $\varepsilon\eta\sigma$; in (r) wird $\cos\delta$ durch $(\delta+\varepsilon)$, ε, ferner $\cos(\zeta+\eta)$ durch ζ, η ausgedrückt, $\cos\zeta$, $\sin\zeta$ mit Hülfe von (h) eliminirt; die Wurzel $=\sin(\delta+\varepsilon)$ gäbe, nach I. a. 6., aus $\delta\varepsilon\sigma : \cos e_4e_1$, $\operatorname{tg} e_4e_2$.

36. $\varepsilon(\zeta+\eta)\varkappa$; in (g) eliminirt man $\sin\tau$ durch (a) und erhält $\sin(\delta+\varepsilon) = \dfrac{\sin^2\sigma\sin\varepsilon}{\cos\varkappa\cdot\cos\sigma-\cos(\zeta+\eta)}$; nachdem man in (k) $\cos\delta$ durch $(\delta+\varepsilon)$, ε ausgedrückt und $\cos(\delta+\varepsilon)$ und $\sin(\delta+\varepsilon)$ eliminirt hat, gäbe die Wurzel $=\cos\sigma$ nach I. b. 82., aus $(\zeta+\eta)\varkappa\sigma : \operatorname{tg} e_2e_1$, $\operatorname{tg} e_3e_1$.

37. $\varepsilon(\zeta+\eta)\lambda$; in (f) elimirt man $\sin\sigma$ durch (a) und erhält $\sin(\delta+\varepsilon) = \dfrac{\sin\varepsilon(\cos\lambda\cos\tau)-\cos(\zeta+\eta)}{\sin^2\tau}$; in (i) drückt man $\cos\delta$ durch $\cos(\delta+\varepsilon)$, ε aus, eliminirt $\cos(\delta+\varepsilon)$, $\sin(\delta+\varepsilon)$; die Wurzel $=\cos\tau$ gäbe, nach I. b. 85., aus $(\zeta+\eta),\lambda,\tau : \operatorname{tg} e_2e_1$, $\operatorname{tg} e_3e_1$.

40. $\varepsilon\varkappa\lambda$; nach (c) ist $\sin\sigma = \sqrt{1-\dfrac{\cos^2\lambda\cos^2\tau}{\cos^2\varkappa}}$ und daher auch nach (a) $\sin(\delta+\varepsilon) = \dfrac{\sin\varepsilon}{\sin\tau}\sqrt{1-\dfrac{\cos^2\lambda\cos^2\tau}{\cos^2\varkappa}}$; man drückt sodann

Digitized by Google

in (d) $\cos\delta$ durch $(\delta+\varepsilon)$, ε aus, eliminirt $\cos(\delta+\varepsilon)$, $\sin(\delta+\varepsilon)$, $\sin\sigma$; die Wurzel $=\cos\tau$ gäbe, nach I. a. 42, aus $\varepsilon\varkappa\tau : \cos e_4e_2, \cos e_2e_1$.

43. $\varepsilon\lambda\sigma$; man drückt in (d) $\cos\delta$ in der Form (u) aus; die Wurzel $=\sin\tau$ gäbe, nach I. b. 90, aus $\lambda\sigma\tau : \cos e_2e_1, \operatorname{tg} e_4e_2$.

47. $(\delta+\varepsilon)\zeta\varkappa$; in (p) wird $\cos(\zeta+\eta)$ durch ζ, η ausgedrückt und $\sin\eta, \cos\eta$ mit Hülfe von $\sin\eta = \dfrac{\sin\zeta\sin\varepsilon}{\sin(\delta+\varepsilon)}$ aus (h) eliminirt und die quadratische Wurzel $=\cos\sigma$ entwickelt; in (n) wird $\cos\delta$ durch $(\delta+\varepsilon), \varepsilon$ ausgedrückt, $\cos\sigma$ eliminirt; die Wurzel $=\sin\varepsilon$ gäbe; nach II. c. 1, aus $\delta\varepsilon\zeta : \operatorname{tg} e_2e_3, \operatorname{tg} e_3e_1$.

50. $(\delta+\varepsilon)\zeta\tau$; in (l) wird $\cos\delta$ in der Form (v) und $\cos(\zeta+\eta)$ in der Form (x) ausgedrückt; die Wurzel $=\sin\sigma$ gäbe nach II. a. 74. aus $\zeta\sigma\tau : \cos e_3e_1, \sin e_2e_3$.

51. $(\delta+\varepsilon)\eta\varkappa$; in (e) wird $\cos\delta$ in der Form (v) ausgedrückt und die quadratische Wurzel $=\sin\tau$ entwickelt; in (g) wird $\cos(\zeta+\eta)$ in der Form (w) ausgedrückt, $\sin\tau$ eliminirt; die Wurzel $=\sin\sigma$ gäbe, nach II. b. 60, aus $(\delta+\varepsilon)\varkappa\sigma : \cos e_1e_4, \operatorname{tg} e_4e_2$.

52. $(\delta+\varepsilon)\eta\lambda$; in (f) wird $\cos(\zeta+\eta)$ in der Form (w) ausgedrückt und die quadratische Wurzel $=\sin\sigma$ entwickelt; in (d) wird $\cos\delta$ in der Form (v) ausgedrückt, $\sin\sigma$ eliminirt; die Wurzel $=\cos\tau$ gäbe, nach II. b. 79, aus $\eta\lambda\tau : \cos e_3e_2, \operatorname{tg} e_3e_1$.

53. $(\delta+\varepsilon)\eta\sigma$; in (l) wird $\cos\delta$ in der Form (v) und $\cos(\zeta+\eta)$ in der Form (w) ausgedrückt; die Wurzel $=\sin\tau$ gäbe, nach II. a. 80, aus $\eta\sigma\tau : \cos e_2e_3, \sin e_3e_1$.

54. $(\delta+\varepsilon)\eta\tau$; entwickelt wie 53, gäbe die Wurzel $=\sin\sigma$, nach II. a. 80, aus $\eta\sigma\tau : \cos e_2e_3, \sin e_3e_1$.

55. $(\delta+\varepsilon)(\zeta+\eta)\varkappa$; man drückt in (e) $\cos\delta$ in Form von (v) aus und eliminirt $\sin\tau$ mit Hülfe von $\sin\tau = \dfrac{\cos\varkappa\cos\sigma - \cos(\zeta+\eta)}{\sin\sigma}$ aus (g); die Wurzel $=\sin\sigma$ gäbe, nach I. b. 82., aus $(\zeta+\eta)\varkappa\sigma : \operatorname{tg} e_2e_1, \operatorname{tg} e_3e_1$.

56. $(\delta+\varepsilon)(\zeta+\eta)\lambda$; man drückt in (d) $\cos\delta$ in der Form von (v) aus und eliminirt $\sin\sigma$ mit Hülfe von $\sin\sigma = \dfrac{\cos\lambda\cos\tau - \cos(\zeta+\eta)}{\sin\tau}$ aus (f); die Wurzel $=\sin\tau$ gäbe, nach I. b. 85., aus $(\zeta+\eta)\lambda\tau : \operatorname{tg} e_2e_1, \operatorname{tg} e_3e_1$.

59. $(\delta+\varepsilon)\varkappa\lambda$; man drückt in (d) $\cos\delta$ in der Form von (v) aus und eliminirt $\sin\sigma$ mit Hülfe von $\cos\sigma = \dfrac{\cos\lambda\cos\tau}{\cos\varkappa}$ nach (c); die Wurzel $=\sin\tau$ gäbe, nach I. c. 88., aus $\varkappa\lambda\tau : \cos e_2e_1, \operatorname{tg} e_2e_3$.

Digitized by Google

61. $(\delta+\varepsilon)\,\varkappa\tau$; man drückt in (e) $\cos\delta$ in Form von (v) aus; die Wurzel $=\sin\sigma$ gäbe, nach I. b. 89., aus $\varkappa\sigma\tau : \cos e_2e_1$, $\operatorname{tg} e_4e_1$.

69. $\zeta\varkappa\lambda$; man drückt in (g) $\cos(\zeta+\eta)$ in Form von (x) aus und eliminirt $\cos\sigma$, $\sin\sigma$ mit Hülfe von $\cos\sigma = \dfrac{\cos\lambda\,\cos\tau}{\cos\varkappa}$ nach (c); die Wurzel $=\cos\tau$ gäbe, nach I. c. 88., aus $\varkappa\lambda\tau : \cos e_2e_1$, $\operatorname{tg} e_2e_3$.

71. $\zeta\varkappa\tau$; man drückt in (g) $\cos(\zeta+\eta)$ in der Form von (x) aus, die Wurzel $=\sin\sigma$ gäbe, nach I. b. 89., aus $\varkappa\sigma\tau : \cos e_2e_1$, $\operatorname{tg} e_4e_2$.

75. $\eta\varkappa\lambda$; man drückt in (f) $\cos(\zeta+\eta)$ in der Form von (w) aus und eliminirt $\cos\sigma$, $\sin\sigma$ mit Hülfe von $\cos\sigma = \dfrac{\cos\lambda\,\cos\tau}{\cos\varkappa}$ nach (c); die Wurzel $=\sin\tau$ gäbe, nach I. a. 77., aus $\eta\varkappa\tau : \cos e_2e_3$, $\cos e_2e_1$.

78. $\eta\lambda\sigma$; man drückt in (f) $\cos(\zeta+\eta)$ in der Form von (w) aus, die Wurzel $=\sin\tau$ gäbe, nach I. b. 90., aus $\lambda\sigma\tau : \cos e_2e_1$, $\operatorname{tg} e_4e_2$.

Neben den hier besonders hervorgehobenen Eliminations-Wegen können in vielen Fällen auch noch andere unter anderweitiger Verwendung der gegebenen Relationen eingeschlagen werden.

Digitized by Google

14. Über die Ermittelung der Knotenlänge und Neigung bei Bestimmung der Rotationselemente der Sonne.

Von Prof. G. Spörer
in Potsdam.

(Vorgelegt von Hrn. Auwers am 17. April: — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XX]: ausgegeben am 24. April.)

Aus den Örtern solcher Flecke, die nur in einer Rotationsperiode sichtbar sind, kann man Knotenlänge und Neigung nicht bestimmen, weil die heliographische Breite der Flecke veränderlich ist.

Erscheint ein Fleck in zwei Perioden, so würde er in dem Falle zur Bestimmung von Ω und i vorzüglich geeignet sein, wenn die Örter der zweiten Periode (auf derselben uns zugewandten Seite der Sonne) dieselbe Curve liefern wie in der ersten Periode. Alsdann gehören gleiche heliocentrische (d. h. auf die Ekliptik bezogene) Breiten zu gleichen heliocentrischen Längen. Diese Bedingung ist viel zu selten hinreichend erfüllt. Man beobachtet vielmehr in der zweiten Periode auf derselben uns zugewandten Seite eine andere Curve wie in der ersten Periode. Es fragt sich, ob diese verschiedenen Curven zur Bestimmung von Ω und i benutzt werden können. Ohne Zweifel würde es möglich sein, wenn man aus der Verschiedenheit beider Curven eine Folgerung in Betreff der Änderung der heliographischen Breite mit Sicherheit entnehmen könnte, wenn auch nur in dem Grade, dass man Anhaltspunkte gewönne für die Form einer Function ϕ und für die Wahl eines Winkels ϑ derselben, so dass man eine solche allgemeine Form $\phi\vartheta$, welche als Ausdruck der eigenen Bewegung der Breite passend wäre, in die Bedingungsgleichungen für Ω und i aufnehmen könnte. Es lässt sich aber nachweisen, dass dies kaum möglich ist, und durch Rechnung kann man sich davon überzeugen, dass schon die Änderung einer solchen allgemeinen Form einen wesentlichen Einfluss auf das Resultat ausübt.

Aus den Beobachtungen kann man für jede der beiden Rotationsperioden im Anschluss an sämmtliche Beobachtungen eine Curve der heliocentrischen Breiten β berechnen, so dass für bestimmte heliocentrische Längen λ die zugehörigen β aus dieser Curve zu entnehmen sind. Wären die richtigen Elemente Ω und i bekannt, so würde

Digitized by Google

man für die Längen λ_1 λ_2 etc. bis λ_5, welche etwa in Intervallen von 40° gewählt werden, für beide Perioden die richtigen heliographischen Breiten b_1 bis b_5 und b_6 bis b_{10} berechnen können. Bezeichnet nun b die einem bestimmten Parallel zugehörende constante Breite und $\phi\vartheta$ die Function, welche die Änderung der heliographischen Breite in Bezug auf diesen Parallel ausdrückt, so hätte man:

für die erste Periode $b_1 = b + \phi\vartheta_1$; $b_2 = b + \phi\vartheta_2$; .... $b_5 = b + \phi\vartheta_5$
für die zweite Periode $b_6 = b + \phi\vartheta_6$; $b_7 = b + \phi\vartheta_7$; .... $b_{10} = b + \phi\vartheta_{10}$
bei den helioc. Längen λ_1 λ_2 .... λ_5

Die Unterschiede $b_6 - b_1 = a_1$; $b_7 - b_2 = a_2$; .... $b_{10} - b_5 = a_5$ lassen sich ohne Kenntniss der richtigen Elemente Ω und i aus den Beobachtungen bestimmen. Für genäherte Elemente Ω und i habe ich Tabellen berechnet, aus denen die Unterschiede $b - \beta$ bei verschiedenen λ und β entnommen werden können. Man ersieht aus den Tabellen, dass bei gleichen Längen und bei einer solchen Verschiedenheit der β, wie sie im betreffenden Falle vorkommt, die Unterschiede $b - \beta$ bis auf 0°01 dieselben bleiben. Selbst wenn es vorkäme, dass die heliographische Breite von einer Periode zur anderen um drei Grade sich änderte, würde der Fehler, den man begeht, indem man in beiden Perioden für $b - \beta$ bei gleicher Länge denselben Betrag annimmt, im ungünstigsten Falle nur 0°02 betragen, was immer noch vernachlässigt werden könnte, denn eine Genauigkeit von wenigen Hundertsteln eines Grades lässt sich bei den Beobachtungen kaum verbürgen.

Mit einer bis auf 0°01 gehenden Genauigkeit ist also $a_1 = \beta_6 - \beta_1$ u. s. w. mithin

$$a_1 = \phi\vartheta_6 - \phi\vartheta_1\,;\quad a_2 = \phi\vartheta_7 - \phi\vartheta_2\,;\quad \ldots\ldots\quad a_5 = \phi\vartheta_{10} - \phi\vartheta_5.$$

Wenn es möglich wäre, aus diesen Gleichungen $\phi\vartheta$ zu bestimmen, so würde man den richtigen Gang der heliographischen Breite angeben können, ohne Ω und i zu kennen. Man könnte dann die Örter beider Perioden zuverlässig auf einen bestimmten Parallel reduciren und hätte somit eine Curve, welche die richtigen Werthe für Ω und i ergeben müsste. Man ist zwar in der Wahl der Function ϕ und des Winkels ϑ nicht ganz unbeschränkt, indem man leicht erkennen kann, welche Formen u. s. w. bei jenen Gleichungen entschieden abzuweisen sind, aber es bleibt allemal noch eine grosse Verschiedenheit der Formen zur Wahl übrig. Für jede gewählte Form kann man nach der Methode der kleinsten Quadrate die Coefficienten bestimmen, und wenn man solche Formen auswählt, die jene Gleichungen genügend darstellen, so erhält man schliesslich doch verschiedene Reductionen auf einen bestimmten Parallel.

Digitized by Google

Wären die a sämmtlich $= 0$, so wäre die zuerst angegebene Bedingung erfüllt. Solche Fälle, wo es annähernd zutraf, habe ich in den Astron. Nachrichten No. 1347 und No. 1615 angeführt und daraus Elemente abgeleitet. Insbesondere war im zweiten Falle die Anzahl der Örter beträchtlich. Seitdem ist mir kein solcher Fall vorgekommen, bei welchem ich zugleich eine genügende Anzahl der Örter erlangen konnte.

Wären die a sämmtlich einander gleich, oder wenigstens so nahe einander gleich, dass die Abweichungen sich noch in den Grenzen der Beobachtungsfehler halten, so würde man eine der Zeit proportionale Änderung der Breite annehmen können. Mit ziemlicher Annäherung finden sich solche Fälle, namentlich in höheren Breiten. Ich wähle als Beispiel einen solchen Fall, bei welchem die Breitenänderung auffallend stark ist. Von diesem Fleck wurden sechs Örter von 1871 Oct. 15 bis Oct. 25 beobachtet, darauf in der folgenden Periode nur drei Örter von Nov. 13 bis Nov. 19.

Aus den sechs Örtern der ersten Periode folgt:

$$i = 7°20 \text{ und } \Omega = 72°78$$

ferner für die heliocentrische Breite β die Gleichung

$$\sin\beta + [9.10168] \cdot \cos\beta \cdot \cos(\lambda + 17°22) = +0.40912.$$

Für die helioc. Längen	$\lambda =$	352°71	6°12	71°84
aus der Formel berechnet	$\beta =$	+ 16.86	+ 17.35	+ 24.02
in Periode II beobachtet	$\beta =$	+ 18.83	+ 19.25	+ 26.14
Unterschiede		+ 1.97	+ 1.90	+ 2.12

Die Abweichungen vom Mittelwerthe + 2.00 können als Beobachtungsfehler gelten. Ich setze nun $\sin b$ der Zeit proportional, so folgt aus den beiden Perioden

(1871) $\quad i = 7°04 \pm 0°05\,;\ \Omega = 75°43 \pm 0°45$

und für die heliographische Breite:

$$\sin b = +0.4168 + 0.00122\,t,$$

wo t in Tagen von Oct. 29.1587 gezählt ist.

Dann ist

für Oct. 15 die heliographische Breite $= +23°58$
für Nov. 19 » » » $= +26.28$

Die speciellen Daten sind in der Tafel I angegeben.

Für die Wahl der Function $\phi\mathfrak{S}$ ergeben sich engere Grenzen, wenn eins der a gleich Null wird. Besonders wichtig ist aber der Fall, wenn ein Fleck in drei Perioden erschienen ist und einmal für

Digitized by Google

die erste und zweite Periode, darauf nochmals für die zweite und dritte Periode der Fall $a = 0$ eintritt d. h. zu gleichen helioc. Längen gleiche helioc. Breiten gehören. Der im Jahre 1867 beobachtete und in vier Rotationsperioden erschienene Fleck erfüllte die Bedingung. Ich untersuchte diesen Fleck in einem am 7. Mai 1868 der Königl. Akademie vorgelegten Aufsatz in Bezug auf Refraction der Sonnenatmosphäre oder Tiefenparallaxe. In jenem Aufsatze sind die Flecken-Örter angegeben; auch Zeichnungen der Flecke beigefügt, aber es fehlen die heliocentrischen λ und β, welche zu der jetzt ausgeführten Rechnung gebraucht werden (s. Tafel II).

Die erste Periode
für Sept. 10 bis Sept. 20 allein behandelt liefert $i = 6°81$ u. $\Omega = 71°10$
die zweite Periode
für Oct. 6 bis Oct. 18 allein behandelt liefert » $= 6.90$ u. » $= 76.06$
die dritte Periode
für Nov. 3 bis Nov. 14 allein behandelt liefert » $= 7.30$ u. » $= 76.71$

Das arithmetische Mittel der drei Bestimmungen ist $i = 7°0$ und $\Omega = 74°6$, was zufällig mit meiner angenommenen Bestimmung $i = 6°97$ und $\Omega = 74°607$ (für 1867) fast ganz übereinstimmt.

Die erste Periode ergiebt

I $\sin\beta + \cos\beta \cdot [9.07718] \cdot \cos(\lambda + 18°90) = + 0.16014;$

die zweite Periode ergiebt

II $\sin\beta + \cos\beta \cdot [9.08028] \cdot \cos(\lambda + 13°94) = + 0.15431;$

die dritte Periode ergiebt

III $\sin\beta + \cos\beta \cdot [9.10766] \cdot \cos(\lambda + 13°29) = + 0.14879.$

Werden nach diesen Formeln die β berechnet und mit den beobachteten verglichen, so folgt der mittlere Fehler bei β
für die erste Periode $= \pm 0°08$; für die zweite $= \pm 0°12$;
für die dritte $= \pm 0°09$.

Für die Bedingung, dass zu gleichen heliocentrischen Längen gleiche heliocentrische Breiten gehören, folgt

aus I und II:

A am Anfang der ersten Periode $\beta = + 3°68$ $\lambda = 304°6$
B » » » zweiten » » » » » $360° + 304.6$

aus II und III:

C nach dem Ende der zweiten Periode $\beta = + 14°55$ $\lambda = 720° + 132.4$
D » » » » dritten » » » » » $1080° + 132.4$

Aus der Berechnung mit den genäherten Elementen ist bekannt, dass zwischen A und B gegen Ende der ersten Periode ein Maximum

Digitized by Google

der heliographischen Breite liegt, ferner dass zwischen C und D gegen den Anfang der dritten Periode ein Minimum derselben liegt. Unter der Annahme eines genügend regelmässigen Ganges, welcher gestattet für die Function $\phi\vartheta$ einfach einen Sinus zu nehmen, müssen Maximum und Minimum in die Mitte von A B und C D verlegt werden, also

Maximum der heliographischen Breite bei $\lambda = 360^\circ + 124^\circ6 = 484^\circ6$

Minimum » » » » $\lambda = 720 + 312.4 = 1032.4$

demnach ist zu setzen $\vartheta = 180^\circ$ für $\lambda = 547.8$

und ϑ zu zählen von dem Punkte $\lambda = 758^\circ5$.

Alsdann ist $x \cdot \phi\vartheta = x \cdot \sin \frac{180}{547.8} (\lambda - 758^\circ5)$

Wird nun bei Vereinigung der drei Perioden dieser Ausdruck als Correction für $\sin b$ den Bedingungsgleichungen hinzugefügt, so ergiebt sich

$$i = 7^\circ026 \pm 0^\circ035 \; ; \; \Omega = 74^\circ00 \pm 0^\circ25. \qquad (1867)$$

Die Vergleichung der berechneten β mit den beobachteten liefert für die Vereinigung der drei Perioden den mittleren Fehler $= \pm 0^\circ113$, statt des Gesammtwerthes $\pm 0^\circ095$ bei der getrennten Behandlung der drei Perioden. Von besonderem Interesse ist, dass jener Ausdruck $x \cdot \phi\vartheta$ oder $-0.0134 \cos i \sin\vartheta$ für eigene Bewegung der Breite auch genügt, um anschliessend an die drei Perioden ebenfalls die Örter der vierten Periode hinreichend darzustellen.

Tafel I.

1871	λ	β	ber. β	R—B	*ber. β	R—B	$\sin b = +0.41681 + 0.0012206 \cdot t$	b
Oct. 15.454	314°09	+ 17°62	+ 17°57	— 0°05	+ 17°61	— 0°01		+ 23°58
16.492	327. 28	+ 17. 01	+ 17. 02	+ 0. 01	+ 16. 99	— 0. 02		+ 23. 66
18.553	354. 39	+ 16. 86	+ 16. 90	+ 0. 04	+ 16. 87	+ 0. 01		+ 23. 82
21.465	32. 85	+ 19. 42	+ 19. 41	— 0. 01	+ 19. 37	— 0. 05		+ 24. 04
24.481	73. 49	+ 24. 20	+ 24. 23	+ 0. 03	+ 24. 23	+ 0. 03		+ 24. 27
25.580	88. 62	+ 26. 11	+ 26. 10	— 0. 01	+ 26. 16	+ 0. 05		+ 24. 36
Nov. 13.439	352. 71	+ 18. 83	. . . . .		+ 18. 83	0. 00		+ 25. 82
14.482	6. 12	+ 19. 25	. . . . .		+ 19. 33	+ 0. 08		+ 25. 90
19.482	71. 84	+ 26. 14	. . . . .		+ 26. 05	— 0. 09		+ 26. 28

Für die erste Periode:

$$\sin\beta + [9.10168] \cdot \cos\beta \cdot \cos(\lambda + 17^\circ22) = + 0.40912$$

* Für beide Perioden:

$$\sin\beta + [9.09181] \cdot \cos\beta \cdot \cos(\lambda + 14^\circ57) = + 0.41998 + 0.0012298 \cdot t$$

Digitized by Google

Tafel II.

1867	λ	β		ber. β	R — B	ber. β	R — B
				Formel I		Formel IV	
Sept. 10.495	288°19	+ 5°04'		+ 5°07	+ 0°03	+ 5°19	+ 0°14'
11.603'	303.70	+ 3.81		+ 3.75	— 0.06	+ 3.83	+ 0.02
12.487	315.53	+ 3.01		+ 3.01	0.00	+ 3.05	+ 0.04
13.461	328.83	+ 2.48		+ 2.49	+ 0.01	+ 2.49	+ 0.01
14.625	344.70	+ 2.34		+ 2.35	+ 0.01	+ 2.30	— 0.04
15.476	355.76	+ 2.65		+ 2.56	— 0.09	+ 2.48	— 0.17
17.468	22.73	+ 4.02		+ 4.08	+ 0.06	+ 3.96	— 0.06
18.513	37.14	+ 5.32		+ 5.38	+ 0.06	+ 5.28	— 0.04
18.644	38.85	+ 5.44		+ 5.55	+ 0.11	+ 5.46	+ 0.02
19.492	50.36	+ 6.91		+ 6.78	— 0.13	+ 6.72	— 0.19
20.453	63.93'	+ 8.36'		+ 8.36	0.00	+ 8.34	— 0.02
				Formel II			
Oct. 6.489	293.99	+ 4.75		+ 4.63	— 0.12	+ 4.73	— 0.02
8.413	320.24	+ 2.55		+ 2.65	+ 0.10	+ 2.69	+ 0.14
9.454	334.71	+ 2.09		+ 2.09	0.00	+ 2.13	+ 0.04
10.488	348.99	+ 1.85		+ 1.96	+ 0.11	+ 2.00	+ 0.15
13.408'	29.22	+ 3.91		+ 3.83	— 0.08	+ 3.90	— 0.01
14.493	44.41	+ 5.16		+ 5.24	+ 0.08	+ 5.32	+ 0.16
15.549	58.83	+ 7.03		+ 6.83	— 0.20	+ 6.91	— 0.12
16.498'	72.53	+ 8.47		+ 8.45	— 0.02	+ 8.52	+ 0.05
17.493	86.31	+ 10.06		+ 10.11	+ 0.05	+ 10.14	+ 0.08
18.513	100.63	+ 11.64		+ 11.73	+ 0.09	+ 11.73	+ 0.09
				Formel III			
Nov. 3.432	330.21	+ 1.51		+ 1.49	— 0.02	+ 1.20	— 0.29
6.583	14.08	+ 1.92		+ 2.01	+ 0.09	+ 1.98	+ 0.06
8.475	40.52	+ 4.28		+ 4.21	— 0.07	+ 4.26	— 0.02
9.363	52.74	+ 5.56'		+ 5.56'	0.00	+ 5.62	+ 0.06
9.596	56.05	+ 6.08'		+ 5.96	— 0.12	+ 6.02	— 0.05
10.500	68.96	+ 7.47		+ 7.56	+ 0.09	+ 7.62	+ 0.15
12.383	95.50	+ 10.83		+ 10.91	+ 0.08	+ 10.90	+ 0.07
13.488	110.87	+ 12.68		+ 12.65	— 0.03	+ 12.58	— 0.10
14.565	126.41'	+ 14.12		+ 14.10	— 0.02	+ 13.96	— 0.16
Dec. 4.451	48.32	+ 6.14		. . . . .		+ 6.4	+ 0.3
8.476	106.01	+ 13.01		. . . . .		+ 13.3	+ 0.2
11.466	148.76	+ 16.50		. . . . .		+ 16.3	— 0.2

Formel IV für die drei Perioden zusammen:

$$\sin\beta + \cos\beta \cdot [9.09078] \cdot \cos(\lambda + 16°00) = + 0.1538 - 0.0134 \cdot \sin\Delta,$$

wo $+ 0.1538 = \frac{\sin b}{\cos i}$ für $\Delta = 0$.

Digitized by Google

15. Über paralytischen Blödsinn bei Hunden.

Von Dr. E. Mendel
in Berlin.

(Vorgelegt von Hrn. Munk am 17. April; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XX]; — ausgegeben am 24. April.)

Die Untersuchungen über die progressive Paralyse der Irren führten mich zu dem Schluss, dass zur Hervorbringung der Krankheit zweierlei nothwendig sei: einmal eine gewisse krankhafte Veränderung der Gefässwände, die den Durchtritt der weissen Blutkörperchen, wie des Blutplasma erleichtert, zweitens eine active Hyperämie in den Gefässen der Hirnrinde, welche jenen Durchtritt in die Hirnsubstanz veranlasst. Die in grösserer Menge ausgetretenen Blutbestandtheile bilden sodann den Ausgangspunkt für die weiteren in der Hirnrinde sich vollziehenden Veränderungen: Wucherung der Gliazellen, Bindegewebneubildung, schliesslich Atrophie der nervösen Elemente.

Wenn diese Auffassung eine richtige war, schien kein Grund vorzuliegen, warum man nicht auch bei Thieren nach Herstellung jener Bedingungen progressive Paralyse mit jenen pathologisch-anatomischen Veränderungen in der Hirnrinde sollte erzeugen können. Ja, es liess sich annehmen, dass auch ohne vorhergegangene Erkrankung der Gefässwände dasselbe Resultat erzielt werden würde, wenn nur eine stärkere treibende Kraft für die Hyperämie angewandt wurde, um den grösseren Widerstand normaler Gefässwände aufzuwiegen.

Diese Erwägungen bildeten den Ausgangspunkt von Versuchen, die in dem physiologischen Laboratorium der Königlichen Thierarzneischule an Hunden angestellt wurden. Zur Hervorrufung der activen Hyperämie wurde die Centrifugalkraft benutzt, in ähnlicher Weise, wie dies Salathé (Travaux du Laboratoire de M. Marey, Année 1877, p. 251) zu anderem Zweck gethan hat.

Hunde, die auf einer Tischplatte so befestigt waren, dass ihr Kopf an der Peripherie des Tisches sich befand, gingen, wenn die Tischplatte in genügend schnelle und lange genug fortgesetzte Rotation

Digitized by Google

versetzt wurde, während der Drehung zu Grunde (in 25—30 Minuten bei 120—130 Umdrehungen in der Minute. Die Section zeigte hochgradige Hyperämie der Schädelknochen, der Hirnhäute und der grauen Hirnrinde, Blutleere und Ödem der weissen Substanz. Ausserdem fanden sich in den Häuten, wie in der Hirnrinde zahlreiche punktförmige Blutungen, die besonders in der Gegend des *Sulcus cruciatus* ausgeprägt waren.

Wenn man aber die Hunde bei geringerer Geschwindigkeit (100 bis 110 mal in der Minute) nur wenige (4—6) Minuten drehte, so sah man bei Aufhören des Drehens nur die oft beobachteten und beschriebenen Schwindelerscheinungen. Wiederholte man diese Drehungen täglich, und zwar 3—4 mal mit kurzen Pausen; dann sah man gegen den 12.—14. Tag zuerst Verlust des Muskelgefühls einer hinteren Extremität, dem bald dann derselbe Zustand in der anderen folgte. Waren diese Erscheinungen deutlich ausgeprägt, so wurden die Drehungen nicht mehr wiederholt und die Thiere bei guter Fütterung sich selbst überlassen. Im Laufe der nächsten Wochen stellten sich nun ein: Zunahme der Erscheinungen an den hinteren Extremitäten, Auftreten derselben an den vorderen Extremitäten, erschwertes Gehen (Hahnentritt, Lahmsein), schliesslich vollständige Unfähigkeit, sich zu bewegen, Facialisparesen, Paresen der Rumpfmusculatur, der Nackenmusculatur, Veränderungen des Bellens, erschwertes Urinlassen. Gleichzeitig nahm die meist schon in der zweiten Woche deutliche Apathie stetig zu und wurde allmählich zum theilnahmlosen Blödsinn. Das Körpergewicht pflegte dabei sehr rasch zu sinken, während der Appetit ungestört erschien. Der Tod erfolgte unter den Erscheinungen allgemeiner Lähmung.

Vergleicht man das geschilderte Krankheitsbild, das bei Hunden sonst nicht beobachtet wird, mit den beim Menschen vorkommenden Krankheiten, so kann nur die progressive Paralyse der Irren in Frage kommen, mit der es sowohl in Bezug auf den progredienten Verlauf, wie in Bezug auf die Verbindung des Blödsinns mit den allgemein verbreiteten paralytischen Symptomen übereinstimmt.

Diese Übereinstimmung wird aber ausserdem gestützt durch die Sectionsresultate.

Dieselben ergaben bisher regelmässig: Verwachsung des Schädels mit der *Dura*, dieser mit der *Pia* und der Hirnrinde im Bereiche des *Sulcus cruciatus*, Trübung der *Pia*, besonders längs der Gefässfurchen, Eingesunkensein der den *Sulcus cruciatus* umgebenden Windungen, wie des *Lobus anterior*, *Hydrocephalus internus*. Mikroskopisch zeigten sich partielle Verwachsungen der Hirnrinde mit der *Pia*, Kernvermehrung, Wucherung der Gliazellen mit Neubildung von Gefässen,

Digitized by Google

stellenweise Veränderungen der Ganglienzellen. Die hochgradigsten Veränderungen fanden sich in den den *Sulcus cruciatus* und die *Fissura Sylvii* umgebenden Windungen, in ähnlicher Weise wie beim Menschen und entsprechend der Localisation der Symptome. Die übrigen Organe, auch das Rückenmark, boten nichts wesentlich Abnormes.

Dass in der That die active Hyperämie die wesentliche Bedingung für die Erzeugung der Krankheit ist, geht daraus hervor, dass ganz in derselben Weise angestellte Experimente, bei denen aber der Kopf des Hundes in der Mitte der Tischplatte fixirt war, wodurch Hirnanämie beim Drehen hervorgerufen wurde, ohne jedes Resultat blieben.

Digitized by Google

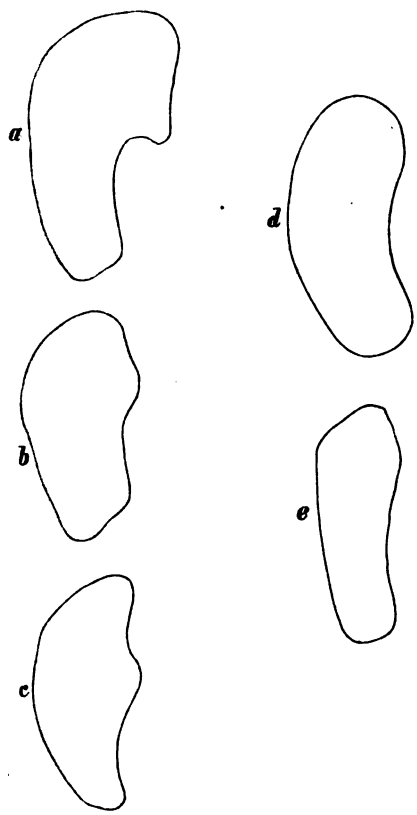
Digitized by Google

16. Ergebnisse der Vergleichungen an den elektrischen Organen der Torpedineen.

Von Prof. Gustav Fritsch
in Berlin.

(Vorgelegt von Hrn. du Bois-Reymond am 24. April; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXII]; — ausgegeben am 1. Mai.)

Nachdem die Zahl der auf die Organentwickelung untersuchten Torpedineen verschiedener Gattungen und Arten die Hundert erreicht hat, und damit ein vorläufiger Abschluss der Vergleichungen gewonnen wurde, sollen im Folgenden die Hauptergebnisse derselben dargelegt werden.



1. Die correlative Entwickelung der elektrischen Organe ist in den nach anderen Merkmalen abgegrenzten Gattungen der Torpedineen genügend verschieden, um die Aufnahme dieses Merkmals in die Diagnose wichtig erscheinen zu lassen.

Torpedo zeigt keulenförmige Organe, deren vorderer Theil etwa um die Hälfte breiter ist als der hintere (*a* in der Figur).

Narcine hat ohrenförmige Organe mit wenig abgesetztem vorderen Theil, der den hinteren etwa um ein Drittel an Breite übertrifft (*b*).

Hypnops ist mit halbmondförmigen Organen ausgestattet, d. h. sie sind nach vorn in eine stumpfe Spitze verlängert, die concave Begrenzung der Halbmondfigur ist etwas vor der Mitte durch einen mässigen Vorsprung unterbrochen (*c*).

Astrape allein hat die den Torpedineen gewöhnlich allgemein zugesprochenen nierenförmigen Organe; ihr vorderer Theil ist kaum breiter als der hintere, der Umriss ist gerundet mit der Concavität nach innen (*d*).

Digitized by Google

Temera zeigt die am dürftigsten entwickelten Organe, welche durch die ziemlich gestreckt verlaufenden seitlichen Begrenzungen fast bandförmig werden (*e*).

Wie ein Blick auf die umstehenden Skizzen lehrt, sind die gewählten Vergleichungen der Organgestalt mit ähnlich gestalteten Körpern *cum grano salis* zu verstehen, um die Hauptunterschiede, welche der Ausdruck »nierenförmig« allein nicht bieten kann, präcis zu bezeichnen. Die beschriebene Gestalt der Organe entspricht der Figuration an der Bauchseite des Thieres, welche als Regel auch die grösste Fläche des Organes darbietet; nur bei Astrape ist die Rückenfläche etwas grösser als die Bauchfläche. Die Figuration der Organe an der Rückenfläche ist bei den einzelnen Gattungen weniger unterschieden.

2. Wie die allgemeine Gestalt differirt auch die Zahl und Anordnung der elektrischen Säulen bei den einzelnen Gattungen und Arten der Torpedineen, so dass sich bestimmte Durchschnittswerthe dafür aufstellen lassen. Die Breite der individuellen Variation ist bei den meisten Arten sehr beträchtlich, wesshalb die Werthe erst bei einer längeren Reihe von Zählungen grössere Genauigkeit beanspruchen können. Wo daher ein reichlicheres Material zur Zeit nicht zur Verfügung steht, ist anzunehmen, dass die gefundenen Zahlen späteren Verbesserungen unterliegen; doch wird der Platz in der Reihe für die Arten dadurch wahrscheinlich nicht weiter verändert werden.

Die Variation der Säulenzahl übersteigt öfters ein Viertel der ganzen Durchschnittssumme.

3. Wie bereits in der letzten Mittheilung zur Embryologie von Torpedo[1] betont wurde, ergiebt die Zählung von Säulen bei Embryonen, kleinen und grossen Individuen derselben Art keinen Anhalt für eine Vermehrung der Säulen beim Wachsthum des Thieres, nachdem einmal die Organe beim Embryo in ihrer typischen Gestalt endgültig gebildet wurden.

Beim Zählen an Fötus werden natürlich leichter Säulen übersehen als an erwachsenen Fischen, doch hat das Hinzuziehen solcher Zählungen in meiner Tabelle die Durchschnittswerthe nirgends wesentlich beeinflusst. Es wurden bisher von mir Fötus folgender Arten untersucht: Torpedo marmorata, Torpedo ocellata, Narcine brasiliensis und Astrape dipterygia.

4. Exemplare von gewissen Torpedo-Arten, z. B. Torpedo marmorata, deren Grösse über das gewöhnliche Maass dieser Thiere hinausgeht, pflegen auch in der Säulenzahl häufig

[1] Diese Berichte, 1883. S. 205.

Digitized by Google

das Gewöhnliche zu übertreffen. Da aber auch kleine gelegentlich mit gleich hohen Zahlen getroffen werden, ist anzunehmen, dass ihre hohe Säulenzahl der aussergewöhnlichen Entwickelung ihrer ganzen Körperanlage und Muskelausbildung conform ist, und werden sie jedenfalls schon in der Jugend die gleiche Säulenzahl besessen haben. Dies ist mit Sicherheit zu behaupten, bis am heranwachsenden, extrauterinen Thiere Säulen *in statu nascenti* nachgewiesen wurden.

5. Die allgemeine Anordnung der Säulen im Organ zeigt überall ein Mosaik aus polygonalen, durch die zusammenstossenden, prismatischen Säulen gebildeten Feldern, welche bei keiner Art auf Regelmässigkeit Anspruch erheben können. Wenn auch eine sechsseitige Begrenzung Regel ist, so werden Fünfecke und verschobene Vierecke ebenfalls häufig beobachtet. Je geringer die Zahl der Säulenprismen ist, um so grösser pflegt die Unregelmässigkeit ihrer Seiten zu sein, so dass also Astrape sich dadurch besonders auszeichnet im Unterschied von T. hebetans, californica, occidentalis, wo sechsseitige Prismen viel häufiger auftreten. Auch T. ocellata zeigt vielfach bemerkenswerth regelmässige Anordnung des Säulenmosaiks.

Die Durchmesser der Säulen differiren nach ihrer Stellung im Organ, indem diejenigen des äusseren Umfanges die dünnsten und zugleich niedrigsten, die am inneren Rande und bei Torpedo zumal an der nach innen vorspringenden Ecke die dicksten und zugleich höchsten zu sein pflegen. Auffallend ist bei der Gattung Narcine, am stärksten bei N. brasiliensis, dass die äussere Reihe am hinteren Umfang des Organs Prismen zeigt, deren transversaler Durchmesser den sagittalen oft um das Doppelte überwiegt, so dass also die Prismen von vorn nach hinten zusammengepresst erscheinen.

Über die concentrische und radiäre Anordnung der Säulen wurde bereits in den Beiträgen zur Entwickelung von Torpedo das Nöthige angeführt.

6. Was die Durchschnittszahlen für die Organsäulen der Torpedineen anlangt, so sind hier gegenüber dem Misstrauen, welches von mancher Seite gegen dieselben auszustreuen versucht wurde, einige Worte zur Erläuterung der Methode des Zählens vorauszuschicken. Ich habe in letzter Zeit stets die Säulenmittelpunkte auf einer dünnen Glastafel, die dem Organ oder der davon abgetrennten Haut unter Ausschluss von Luftblasen dicht anlag, mit Dinte markirt und gleichzeitig gezählt; die so entstandene punktirte Figur des Organs wurde zur Controle mit Copirpapier abgedrückt. In schwierigen Fällen, bei dünnen Säulen, dient eine mittelstarke Stativlupe gleichzeitig zur Vergrösserung und als Diopter. Bei irgendwie durch parallaktische Verschiebung der Sehaxe entstandenen unrichtigen Auftragungen laufen

Digitized by Google

die Punktreihen auf der Glasplatte unvermeidlich in einander oder entfernen sich ungebührlich, den begangenen Fehler kennzeichnend. Die beliebig oft zu wiederholenden Controlzählungen ergeben eine Grösse des wahrscheinlichen Fehlers beim Zählen, der im Vergleich zur individuellen Variation der verschiedenen Exemplare gar nicht in Betracht kommt. Ich zählte beispielsweise bei Torpedo hebetans dasselbe Organ nach dieser Methode einmal zu 1024, das andere Mal zu 1025 Säulen; nicht selten ergab bei niedrigeren Zahlen die Controle genau die gleiche Summe. Die individuelle Variation ist so gross, dass wahrscheinlich alle Autoren, z. B. auch Hr. Weyl, genügend genau gezählt haben; wenigstens ergeben die veröffentlichten Zahlen keinen ausreichenden Anhalt, das Gegentheil anzunehmen. Nur die Verwerthung der gefundenen Zahlen lässt sich bemängeln.

Wenn Hunter seiner Zeit an der Riesentorpedo 1182 Säulen zählte, während sich der Durchschnitt der Säulenzahl bei Torpedo occidentalis auf nur 1069 stellt, so ist damit nicht gesagt, dass Hunter falsch gezählt hat; denn eine derartige Abweichung der Summe liegt im Bereich der Variation. Ganz sicher ist aber, dass er keine ungewöhnlich grosse Torpedo marmorata vor sich gehabt hat, da bei letzterer Art solche Zahlen eben nicht mehr vorkommen; mit gleicher Sicherheit lässt sich behaupten, dass bei Hunter's Torpedo die Ränder der Spritzlöcher glatt gewesen sein werden.

Seitdem die vergleichenden Torpedo-Tabellen von mir ausführlicher angelegt wurden (1882), habe ich die Säulenzahl des Organumfangs stets besonders gezählt, um dadurch zugleich die allgemeine Figur des Organs sicher zu umgrenzen. Es ergiebt sich gerade für dieses Verhältniss eine bemerkenswerthe Constanz, und zwar findet sich eigenthümlicher Weise bei Torpedo marmorata dafür so häufig genau oder annähernd genau die Zahl 100, dass man dieselbe als die normale bezeichnen darf. Wenn Hr. Babuchin[1] für solche Säulensumme einer von ihm nicht bezeichneten Torpedo-Art die Zahlen 84, 88, 84 vermerkt, so hat er diese Zählungen unzweifelhaft nicht an T. marmorata, sondern an T. ocellata vorgenommen, wo dies in der That häufige Zahlen sind.

Sonderbar ist es zu sehen, dass das dekadische System in dieser Frage eine so hervorragende Rolle spielt; denn während man ohne nennenswerthen Fehler die Säulenzahl eines Organs von T. occidentalis und hebetans auf 1000 setzen kann, von T. californica auf 900, von T. marmorata var. annulata auf 600, stellt sich bei der gewöhnlichen T. marmorata die Zahl auf 500 bei 100 Randsäulen, bei Astrape die Gesammtsumme auf 150, die der Randsäulen auf 50.

[1] Über die Praeformation der elektrischen Elemente im Organ der Zitterfische und den von Hrn. Weyl dawider gerichteten Angriff. Archiv für Physiologie. 1882. S. 419.

Digitized by Google

In der That sind die aus der beifolgenden Tabelle erhaltenen Durchschnittszahlen nicht so abgerundet, doch ist, abgesehen von der muthmasslichen Fehlergrösse des Zählens, die keinesfalls fünf Procent übersteigen dürfte, die Annäherung an die genannten Werthe doch recht auffällig.

Die folgende Zusammenstellung giebt eine Übersicht der bisher gewonnenen Durchschnittswerthe in absteigender Reihe geordnet, und bei jeder Rubrik wurde die Zahl der untersuchten Individuen durch eine römische, die Menge der Zählungen (ohne die Controlzählungen) durch eine arabische Ziffer bemerkt. Wenn man Bauch- und Rückenseite beiderseits zählt, so liefert dasselbe Individuum also vier Zählungen. Die Hundert Individuen wurden zu 160 Zählungen verwandt, deren Gesammtsumme an elektrischen Säulen 70365 ergab.[1] Die Durchschnittswerthe der Säulen in einem Organ stellten sich für die einzelnen Arten:

Torpedo	occidentalis	1069	(4. III.)
»	hebetans	1025	(1. I.)
»	californica	895	(2. II.)
»	fuscomaculata	593	(2. II.)
»	marmorata (mit den Variet.)	513	(70. XL.)
»	marm. var. annulata	610	(3. II.)
»	marm. var. limbata	523	(13. VII.)
»	marmorata (ohne die Variet.)	507	(54. XXXI.)
»	panthera	454	(12. IX.)
»	panthera + sinus persici	448	(15. XII.)
Hypnops	subnigrum	436	(2. I.)
Torpedo	ocellata	433	(27. XX.)
Narcine	brasiliensis	428	(6. III.)
Torpedo	sinus persici	421	(3. III.)
Narcine	tasmaniensis	278	(3. II.)
»	lingula	274	(2. I.)
»	Timlei	224	(2. II.)?
»	indica	146	(5. II.)?
»	Timlei + indica	168	(7. IV.)
Astrape	capensis	147	(3. II.)
»	dipterygia	146	(8. IV.)
Temera	Hardwicki	139	(1. I.)
		160.	XCVIII.

[1] Die Controlzählungen eingerechnet wurden gegen 100000 Säulen gezählt. Bei drei Nummern der Tabelle ist die Rubrik »Säulenzahl« nicht mehr ausfüllbar; eine Säulenzählung (ohne Nummer) wurde eingeschaltet.

Digitized by Google

7. Trotz der nicht unbeträchtlichen Mühe und dem Zeitaufwand für die Zählungen, und der ersichtlichen Annäherung an correcte Durchschnittszahlen für manche Arten, z. B. T. marmorata, ocellata und panthera, besteht an anderen Stellen dagegen noch eine erhebliche Unsicherheit der Werthe wegen zu kurzer Reihe bei grosser individueller Variation.

Bei einer Gattung erscheint mir die Beseitigung dieses Mangels dringend geboten: es sind nämlich die von Hrn. Henle als Narcine indica und Timlei getrennten Formen nach den angegebenen Merkmalen nicht wohl als Arten aus einander zu halten. Die leider nur an vier Individuen auszuführende Säulenzählung ergiebt entweder Werthe von mehr als 200 (bis 230) oder sehr constant 140—150. Hier zeigt sich somit die Möglichkeit, falls ausgedehntere Reihen ebenso bedeutende Abweichungen der Säulenzahl ergeben, durch dies Merkmal die Sonderung der schwierig zu trennenden Species zu unterstützen, oder andernfalls die Unmöglichkeit ihrer Trennung überzeugend darzuthun.

Auffallend ist auch die hohe Säulenzahl, welche Narcine brasiliensis aufweist, nämlich 428, während die übrigen hierher gehörigen Arten nur etwa 214 derselben führen. N. brasiliensis verhält sich also zu den übrigen (N. tasmaniensis, lingula, indica, Timlei) wie Torpedo occidentalis mit ihren Verwandten (T. hebetans, californica) zu Torpedo marmorata, fuscomaculata, ocellata, panthera, sinus persici. So markiren sich weitere Eintheilungen der bezeichneten Gattungen, welche ein strenger Systematiker gewiss berechtigt ist als Subgenera zu trennen. Einfache oder doppelte Säulenzahl ist anatomisch wohl ebenso wichtig, als die einfache oder doppelte Rückenflosse, welche ganz allgemein als Gattungscharakter gilt.

8. In der That stimmen die genannten Formenkreise unter sich auch sonst in manchen Charakteren mehr oder weniger überein, bei Torpedo besonders durch die Hautzipfel an den Spritzlöchern, die Gestalt der Scheibe des Körpers, die geringere oder stärkere Verbreiterung der vorderen Organhälfte u. s. w.; bei Narcine ebenfalls durch die Figur der Scheibe, die weniger deutlich entwickelte circuläre Mundfalte, den flachen mittleren Ausschnitt der Nasenklappe, die starken Höcker am Rande der Spritzlöcher der N. brasiliensis, was die anderen Narcinen nicht in gleicher Weise zeigen.

Die Hautzipfel der Spritzlöcher haben in der Systematik ein wechselvolles Schicksal erlebt; denn während v. Olfers[1] noch positiv

[1] Die Gattung Torpedo in ihren naturhistorischen und antiquarischen Beziehungen. Berlin 1831. 4. S. 8—9.

Digitized by Google

erklärte, alle Torpedineen hätten gefranzte Spritzlöcher, und es hinge nur von zufälligen Contractionszuständen ab, wenn die Ränder glatt erschienen, wird von späteren Autoren meist ein grosses Gewicht für die Unterscheidung der Arten auf die Bildung der Spritzlöcher gelegt.

Es unterliegt in der That keinem Zweifel, dass die Anhänge bei den einzelnen Individuen in ihrer Entwickelung sehr variabel sind und bald lang, bald kurz, hier regelmässig, dort unregelmässig erscheinen. Nirgends unter den Hunderten von Torpedineen, die ich unter den Händen gehabt habe, kam indessen ein wirklich glatter Rand der Spritzlöcher zur Beobachtung, wo sonst Hautzipfel auftreten. So behält auch die Torpedo ocellata im erwachsenen Zustande die Reste der jugendlichen Individuen zukommenden Filamente in Gestalt niedriger, kegelförmiger Erhebungen des Randes; ich kann mich daher Hrn. Günther, der das Fehlen der Filamente hier in die Diagnose der Art aufnimmt, in diesem Punkte nicht anschliessen. Dass Torpedo ocellata im jüngeren Alter eine Anzahl spitzer Zacken um die Spritzlöcher erkennen lässt, wurde bereits durch v. Olfers und J. Müller-Henle richtig angegeben; dagegen wurden die letztgenannten Autoren bereits zweifelhaft, ob es berechtigt sei, das Erscheinen solcher Anhänge an den Spritzlöchern in die Diagnose der Gattung Torpedo aufzunehmen, und versahen diese Angabe mit einem Fragezeichen.

Dies Fragezeichen, welches sich in gleicher Beziehung noch etwas später bei Torpedo nobiliana wieder eingefügt findet, war nur zu sehr begründet. Denn während also der augenfleckige Zitterrochen seinen nächsten Verwandten auch durch die Ausbildung der Filamente an den Spritzlöchern treu bleibt, zeigt die andere Gruppe von Arten mit den hohen Säulenzahlen wirklich glatte Ränder, und man erkennt dadurch, dass dies Merkmal thatsächlich für eine natürliche Eintheilung der Formen von entscheidendem Werth ist.

Ich möchte danach die letzterwähnte Gruppe (T. occidentalis, hebetans, californica) als Untergattung Gymnotorpedo denjenigen mit gefranzten Spritzlöchern (T. marmorata, ocellata, panthera u. s. w.) als Fimbriotorpedo gegenüberstellen.

Hat die mythische *Torpedo nobiliana* Bon. wirklich ebenfalls, wie angegeben, glatte Ränder der Spritzlöcher so gehört sie in die Nähe oder direct zu T. hebetans; sind sie auch nur andeutungsweise gefranzt, so rangirt sie mit den Varietäten von T. marmorata. Ich bin fest überzeugt, dass im ersteren Falle ihre Säulenmenge um die Zahl 1000 schwanken, im letzteren 500 bis 600 betragen wird. Die Fortsetzung meiner Untersuchungen, besonders die Vergleichung mit

Digitized by Google

T. californica bestimmt mich immer mehr, das Erstere für das Wahrscheinlichere zu halten und der auch von Hrn. Günther getheilten Ansicht zuzuneigen, dass die seltene T. hebetans des atlantischen Oceans bei ihrem vereinzelten Vorkommen im mittelländischen Meere als T. nobiliana von Bonaparte beschrieben wurde.

9. Dieselben Betrachtungen ergeben gleichzeitig, dass es richtig war, die Torpedineen, welche neben gefranzten Spritzlöchern auffallend hohe Säulenzahlen zeigten, beim Mangel anderweitiger trennender Merkmale lediglich als Varietäten der Torpedo marmorata und nicht als besondere Arten dem System einzuordnen. Dem Charakter solcher Varietäten entsprechend sind Übergänge und Mischformen unter einander, sowie mit der typischen Form zahlreich vorhanden.

Sowohl v. Olfers als später J. Müller-Henle haben bereits eine Anzahl Varietäten der Torpedo marmorata unterschieden, wobei die Färbung und Zeichnung allein maassgebend war, und sind solche Varietäten gelegentlich von den Autoren als besondere Arten beschrieben worden. Gerade dies Thier giebt ein glänzendes Beispiel dafür ab, dass Färbung und Zeichnung zur Artbestimmung ausserordentlich schlecht zu brauchen ist; denn es handelt sich bei allen, von den genannten Autoren abgegrenzten Varietäten um dasselbe chromatische Princip, nämlich stärkere oder schwächere Ausbildung eines bräunlichen Pigmentes, welches die Neigung hat, sich stellenweise anzuhäufen, während andere Stellen davon freier bleiben. An dem einen Ende der Reihe steht daher eine Varietät mit hell- oder dunkelbrauner, einfarbiger Scheibe (T. immaculata Raf.; T. Galvanii Risso; Var. 4. J. Müll.-H.), an welche sich diejenige anreiht, wo das Auftreten von feinen, braunen Pünktchen auf der helleren Scheibe die beginnende ungleichmässige Pigmentablagerung kennzeichnet (Var. 3. J. Müll.-H.); die Pünktchen werden grösser und erscheinen als dunklere Tupfen (Var. 2. J. Müll.-H.) oder die pigmentfreier werdenden Stellen erscheinen als weissliche Flecke auf einfarbigem Grunde, eine seltenere von mir in Smyrna ebenfalls beobachtete Varietät, auf welche schon der Prinz von Musignano[1] aufmerksam machte. Endlich mischen sich dunkelbraune, stark pigmentirte Stellen mit schwächer pigmentirten weisslichen auf dem mittelfarbigen Grunde, die häufigste Form der typischen Torpedo marmorata darstellend (Var. 1. J. Müll.-H.).

Wie gewöhnlich ist das Vorkommen der verschiedenen Varietäten localen Einflüssen unterworfen. So erhielt ich in Alexandrien etwa ein Dutzend Exemplare, welche sämmtlich der Varietät 3 und 4 (T. immaculata Raf.) angehörten. Sie zeichnen sich auch durch einen

[1] Fauna italica. Fasc. 14. Fig. 4.

Digitized by Google

hellen Saum um sämmtliche Flossen und um die lang gefranzten Spritzlöcher aus, wesshalb sie in der beifolgenden Tabelle als Var. limbata vermerkt wurden. Die Säulenzahlen waren hier sämmtlich über dem Durchschnitt.

Das eigenthümliche Zusammentreffen auffallender Säulenzahlen mit äusseren Merkmalen tritt noch mehr bei einer anderen Varietät der Torpedo marmorata hervor, welche ich als Var. annulata bezeichnet habe. Dieselbe lässt sich keiner der von den Autoren bereits beschriebenen unterordnen, da ihre charakteristische, in einzelnen auf Scheibe und Schwanz vertheilten, dunkelbraunen Ringflecken bestehende Zeichnung sich mit dem oben erläuterten einfachen chromatischen Princip absolut nicht vereinigen lässt. Hier kommt also ein neues Unterscheidungsmerkmal hinzu, dessen Abstammung erst noch festzustellen ist und interessante Einblicke in die Lehre von der Variation überhaupt bieten dürfte. Dass es sich hierbei nicht lediglich um Äusserlichkeiten handelt, ergiebt die überraschend hohe Säulenzahl der Varietät (über 600), wie ich bereits früher Gelegenheit hatte anzugeben.

Diese frühere Notiz hat wohl die erfreuliche Folge gehabt, dass mir aus Marburg durch Vermittelung von Prof. Peters eine kleine, unscheinbare Torpedinee von Setubal (Portugal) zuging, welche sehr interessant ist. Auf der stark abgeriebenen Scheibe mit gefranzten Spritzlöchern sind allerdings nur noch Spuren von Ringflecken zu sehen, aber die auffallend breite, vorn quer abgestumpfte Gestalt der einfarbigen Scheibe und die Säulenzahl von 614 giebt Veranlassung, das Exemplar ebenfalls bei der Var. annulata unterzubringen. Ich benutze diese Gelegenheit, um dem unbekannten Einsender (Hrn. Prof. Greeff?) hierdurch für seine Güte meinen besten Dank auszusprechen und die Bitte anzuschliessen, dass dem bezeichneten wichtigen Material doch auch von anderer Seite nachgeforscht werde.

Hr. Babuchin hat meine Angabe bestätigt, dass die Varietät von T. marmorata mit dunklen Fleckenreihen auf dem axialen und Schwanztheil, die er aber nicht als Ringflecken beschreibt, die grössten Säulenzahlen ergiebt.[1]

10. Torpedo ocellata variirt bekanntlich auch sehr stark, zumal hinsichtlich der Zahl und Stellung ihrer Augenflecken, die von 7—0 vorkommen, aber abgesehen von vereinzelten Monstrositäten (vergl. von Olfers) stets symmetrische Anordnung zeigen, so dass ein einzeln übrig bleibender Augenfleck eine centrale Stellung erhält. Ähnlich wie bei T. marmorata schwindet gelegentlich das sonst gleich-

[1] A. a. O. S. 244.

Digitized by Google

mässig vertheilte bräunliche Pigment an einzelnen Stellen, besonders auf dem Axen- und Schwanztheil weissliche, verwaschene Flecke erzeugend. Eine Beziehung der verschiedenen Varietäten zu besonderen Säulenzahlen wurde bisher nicht festgestellt.

11. Die Trennung der Torpedo panthera von der T. marmorata, welche v. Olfers noch zweifelhaft erschien und erst von J. Müller und Henle in das rechte Licht gestellt wurde, ist durch die abweichende Bezahnung der Kiefer gegeben. Form und Verhältnisse des Körpers, die von den genannten Autoren als der T. marmorata ganz gleich gefunden wurden, erscheinen mir unter Vergleichung einer grösseren Anzahl von Exemplaren doch abweichend durch den verhältnissmässig kürzeren Schwanz und die regelmässig gerundete Scheibe, an welcher die vordere Abstumpfung der T. marmorata schwach angedeutet ist.

Die prächtige Zeichnung typischer Exemplare mit den marmorirten weissen Figuren, die in unregelmässigen Kreisen auf gelbem Grunde gruppirt sind, geht auch hier zuweilen in eine einfachere Färbung über, wo auf der matt caffeebraunen Scheibe verwaschene, weisse Flecke von der Grösse eines Centimeters und darüber vertheilt sind.

12. So präsentirt sich die als T. sinus persici Rüpp. abgetrennte Form, wie es scheint, der Regel nach; auch hier bleibt ein einziges Merkmal, um die Selbständigkeit der Art zu behaupten, die Zahnbildung, übrig, welche sich hinsichtlich der Grösse und der in beiden Kiefern gleich langen Binde der Zähne näher an diejenige der T. marmorata anschliessen soll, während bei T. panthera die kleineren Zähne im Unterkiefer eine etwas verkürzte Binde darstellen.

Bei den mir zur Verfügung stehenden Exemplaren erschien dies letztere Merkmal nicht so deutlich ausgeprägt, als ich nach den Angaben der Autoren erwartete; es kommt hinzu, dass die durchschnittliche Säulenzahl derjenigen von T. panthera ganz nahe steht, Besatz der Spritzlöcher, Färbung und Zeichnung keine brauchbaren Unterscheidungen liefert. Ich möchte mich daher nicht anheischig machen, die beiden Formen mit Sicherheit zu unterscheiden und habe daher in der obigen Tabelle auch eine Durchschnittszahl für beide vereinigte Formen eingefügt, wie es ebenso für Narcine Timlei und N. indica geschehen ist.

13. In der ausführlichen Torpedo-Tabelle finden sich auch Angaben über die Dicke der elektrischen Organe, da wo die Säulen am höchsten und da, wo sie am niedrigsten sind, gemessen. So wichtig diese Zahlen in Bezug auf die Constatirung der Wachsthumsgesetze bei Torpedo auch scheinen mochten, so ergab sich doch

Digitized by Google

das Messen der Dicke an den weichen, lappigen Organen so schwierig, dass eine hinreichende Genauigkeit dieser verhältnissmässig geringen Maasse kaum zu erhoffen war. Da Hrn. Babuchin's[1] bisher noch nicht durch veröffentlichte Beobachtungen unterstützte Behauptung, die Organe der Torpedineen wüchsen beträchtlicher in die Fläche als in die Dicke, neuerdings die Aufmerksamkeit auf diesen Punkt lenkte, so habe ich die Tabelle nach Möglichkeit durch Messungen an conservirtem Material vervollständigt und die gefundenen Werthe der grössten Dicke der Organe als Procente der Länge des Körpers (Längen-Dicken Index) berechnet. Es ergiebt sich aus dieser ebenfalls beifolgenden Zusammenstellung wie vorauszusehen eine grosse Unsicherheit der gefundenen Zahlen, offenbar unter dem Einfluss erheblicher Messungsfehler; anderseits ist das wiederholte Auftreten annähernd gleicher Zahlen (bei T. ocellata durchschnittlich 6.601, bei T. marmorata 6.866) das sichere Anzeichen, dass dies die normalen Verhältnisse sind. Die genannten normalen Werthe vertheilen sich ziemlich gleichmässig in der Reihe nach der Grösse geordneter Exemplare; ausserdem aber lässt sich erkennen, dass die über dem Durchschnitt liegenden Zahlen sich mehr gegen das obere Ende der Reihe (die kleinsten Exemplare) gruppiren, die unter dem Durchschnitt gegen das untere Ende (die grössten Exemplare). Zumal bei Torpedo ocellata tritt dies in gewisser Regelmässigkeit hervor, und es können daher in diesem Punkte meine Messungen als Bestätigungen der Behauptung von Hrn. Babuchin dienen, dass die Organdicke an den jugendlichen Individuen relativ beträchtlicher sei als an den erwachsenen; freilich wird es wünschenswerth sein, dies Wachsthumsgesetz durch weitere, unter besonderen Cautelen vorgenommene Messungen noch sicherer zu begründen.

14. Schliesslich möchte ich nochmals darauf hinweisen, dass die normal gebaute Torpedo vier elektrische Nerven zeigt, und dass die Entwickelung der Organe, wie ich sie früher in diesen Berichten beschrieb, den Anhalt giebt, wie ein gelegentlich etwa zur Beobachtung gelangendes fünftes Stämmchen (ich selbst habe es nie angetroffen) seiner Entstehung nach zu erklären sei.

Ich sehe mich zu diesem Hinweis genöthigt, da Hr. Weyl[2] neuerdings wieder, wenn auch nur als Ausnahme, einen fünften elektrischen Nerven beschreibt, dessen Verlauf er ausdrücklich »zwischen den fünften und sechsten Kiemensack« verlegt. In Anbetracht dessen,

[1] Zur Begründung des Satzes von der Praeformation der elektrischen Elemente u. s. w. Archiv für Physiologie. 1883. S. 253.

[2] Physiologische und chemische Studien an Torpedo. Ebenda. Festschrift als Supplementband. S. 106.

Digitized by Google

dass die bisher den Autoren bekannt gewordenen Torpedineen überhaupt nur fünf Kiemensäcke haben, lagen Hrn. Weyl offenbar ganz neue, bisher unbeschriebene Thiere vor, und es ist wohl möglich, dass solche wissenschaftlich erst noch zu benennende Genera ausser dem sechsten Kiemensack auch noch einen fünften elektrischen Nerven zeigen.

Zum Wachsthumsgesetz der Torpedineen.

Torpedo ocellata.

No.	Länge	Organ-Dicke	Längen-, Dicken-Index
98	67	5.2	7.76
99	72	4.6	6.40
100	80	6.5	8.12
96	88	6.0	6.82
97	92	8.0	8.70
25	110	7.3	6.63
29	111	7.5	6.76
16	112	6.5	5.89
24	113	7.2	6.37
21	114	8.5	7.46
20	121	10.0	8.26
28	161	10.0	6.21
27	196	10.0	5.10
26	218	12.0	5.50
19	232	16.0	6.89
18	330	20.0	6.06
17	335	17.8	5.31
15	373	23.0	6.18
30	405	20.3	5.00
		Durchschnitt	6.601

Torpedo marmorata.

No.	Länge	Organ-Dicke	Längen-, Dicken-Index	
93	97	9.0	9.28	
92	98	(5.0)	(5.10)	schlecht conservirt
94	100	8.0	8.00	
95	101	—	—	schlecht conservirt
36	137	13.5	9.85	
22	141	9.0	6.31	
7	170	14.0	8.24	
34	193	13.0	6.73	
31	206	13.0	6.31	
10	209	16.0	7.65	
12	229	14.0	6.11	
2	230	12.5	5.43	
3	249	15.0	6.43	
8	249	16.2	6.50	
11	249	15.0	6.43	
9	252	16.5	6.55	
5	265	19.0	7.17	
1	272	16.0	5.85	
35	290	18.0	6.21	
4	296	21.0	7.09	
13	341	27.0	7.92	
14	357	24.0	6.72	
6	389	28.0	7.19	
32	414	23.5	5.67	
33	472	25.0	5.29	
		Durchschnitt	6.866	

Die Maasse sind in Millimetern angegeben.

Digitized by Google

17. Neueres über Cryptonisciden.

Von Prof. R. Kossmann
in Heidelberg.

(Vorgelegt von Hrn. du Bois-Reymond am 28. Februar; — gedruckt im Bericht vom 24. April [St. XXII]; — ausgegeben am 1. Mai.)

Zur Vervollständigung meiner Studien über die auf Krebsthieren lebenden Schmarotzerasseln, die Epicaridien, gewährte mir die Königliche Akademie der Wissenschaften im letzten Herbste eine ansehnliche Reise-Unterstützung. Die Vollendung meiner mehrjährigen Arbeit ist durch diese Freigebigkeit, für die ich auch hier meine Dankbarkeit mit Freuden bezeuge, in die nächste Zukunft gerückt, doch wird ihre Publication immerhin noch so viel Zeit in Anspruch nehmen, dass eine vorläufige Mittheilung der wichtigeren Ergebnisse dieser letzten Studienreise gerechtfertigt erscheint.

Diese Reise galt der Untersuchung der Cryptonisciden, also derjenigen Unterabtheilung der Epicaridien, welche am wenigsten studirt ist, und wegen ihrer weitgehenden Rückbildung dem Studium die grössten Schwierigkeiten bietet.

Im Jahre 1843 beschrieb Rathke[1] in seinen »Beiträgen zur Fauna Norwegens« unter dem Namen Liriope pigmaea ein winziges Thierchen, welches er in der Mantelhöhle des eben damals von ihm entdeckten Peltogaster, eines auf Einsiedlerkrebsen schmarotzenden Cirripeden gefunden hatte; er hielt dasselbe für einen Amphipoden, den jener Peltogaster verschlungen haben sollte.

In eben demselben Jahre publicirte Goodsir in einem Artikel über die Geschlechtsverhältnisse der Cirripeden[2] den Fund eines ähnlichen Thieres, das sich in Balanus balanoïdes vorfand, und das der Autor für das Männchen dieses Rankenfüsslers hielt, dessen hermaphroditische Natur damals noch nicht über jeden Zweifel erhaben war.

Gelegentlich einer Erörterung über Peltogaster kam Steenstrup[3] auch auf Liriope zu sprechen und deutet in ziemlich verclausulirter

[1] Rathke, »Beiträge zur Fauna Norwegens«, Nova Acta Academ. Leop.-Carol., tom. XX, p. 60, tab. I, fig. 8—12.

[2] Goodsir, On the sexes, organs of reproduction and mode of development of the Cirripeds, Edinburgh new philosophical Journal, vol. 35, p. 88, pl. III & IV.

[3] Steenstrup, Bemärkninger om slaegterne Pachybdella og Peltogaster, Oversigt Danske Vidensk. selsk. forhandl. 1854.

Digitized by Google

Weise auf die Möglichkeit hin, dass es ein auf Peltogaster hausender Bopyride sei.

Im gleichen Jahre stellte DARWIN[1] die Angabe GOODSIR's richtig, indem er dessen angebliches Balanidenmännchen als Schmarotzer, und zwar als zu den »Joniens«, also den Bopyriden, gehörig erkannte.

Ungefähr gleichzeitig (Text 1852, Abbildung 1855) beschrieb DANA[2] unter dem Namen Cryptothir minutus als Männchen einen ähnlichen Schmarotzer aus Creusia, den er sammt Liriope unter die Tanaïden einreihte.

Auf diese Liriope kam dann 1861 LILLJEBORG[3] zurück, und wies ebenfalls nach, dass Liriope ein Isopode, und zwar ein Bopyride sei. Speciell gelang es ihm, ausser dem larvenartigen, überaus winzigen Wesen, das RATHKE und DANA gefunden hatten, auch die reife, weibliche Form der Liriope zu entdecken, und er kam zu dem Schlusse, dass jene die jugendlichen Männchen gewesen seien.

Zu einem abweichenden Schlusse gelangte in gewisser Hinsicht BUCHHOLZ,[4] welcher 1866, ohne GOODSIR's und DARWIN's Angaben zu kennen, das von Jenen beobachtete Thier auch anatomisch genauer beschreibt. Er hält die von ihm selbst gefundenen Formen, soweit sie Liriope ähnlich sehen, für ältere Larven, und das Männchen für bisher unbekannt. Immerhin gab er uns von dem erwachsenen Schmarotzer überhaupt erst eine Idee, da GOODSIR nur den Kopf und die ersten vier Mittelleibssegmente abgebildet, den ganzen übrigen, deformirten, Theil des Thieres aber vernachlässigt hatte.

Eine fernere Erweiterung unserer Kenntnisse über diese Gruppe brachte dann im Jahre 1871 eine Arbeit FRITZ MÜLLER's,[5] welcher unter dem Namen Cryptoniscus planarioïdes einen Schmarotzer beschrieb, der der Liriope ähnlich ist, jedoch sein Wohnthier, einen Peltogaster, von dem Einsiedlerkrebse verdrängt; nur die Wurzeln des Peltogaster bleiben erhalten und sollen angeblich von dem Cryptoniscus für seine Nahrungsaufnahme dienstbar gemacht werden.

Bald nach Erscheinen von MÜLLER's Aufsatz und ohne mit demselben bekannt zu sein, publicirte ich selbst[6] Notizen über einige hier-

[1] DARWIN, A Monograph on the subclass Cirripedia, vol. II, p. 271.

[2] DANA, Crustacea, vol. II, p. 801, Atlas tab. 53, fig. 6 in: U. S. Exploring Expedition, comm. WILKES.

[3] LILLJEBORG, Liriope et Peltogaster, Nova Acta soc. scient. Upsal. ser. III, vol. III, p. 1 et suppl. p. 73.

[4] BUCHHOLZ, Über Hemioniscus balani, Zeitschr. für wissenschaftliche Zoologie, Bd. XVI, S. 303.

[5] F. MÜLLER, Bruchstücke zur Naturgesch. der Bopyriden, Jenaische Zeitschrift für Medicin und Naturwissenschaft. Bd. VI, S. 61, Taf. 4, Fig. 12—19.

[6] KOSSMANN, Beiträge zur Anatomie der schmarotzenden Rankenfüssler, Anhang, Arbeiten aus dem zoologisch-zootomischen Institut der Universität Würzburg, Bd. I.

Digitized by Google

her gehörige Formen aus SEMPER's philippinischen Sammlungen; es waren ein Binnenschmarotzer aus Sacculina pisiformis, den ich Eumetor liriopides nannte; ein Aussenschmarotzer am Hinterleib einer Porcellana (Zeuxo porcellanae); ein ebensolcher am Kopfe eines Alpheus (Zeuxo alphei); endlich ein Parasit aus der Bruthöhle eines Bopyrus, Cabira lernaeodiscoïdes. Genauere anatomische Untersuchung jener Formen, die mir in einzelnen Spiritusexemplaren vorlagen, war unmöglich.

Indem ich die unwissenschaftlichen und unbrauchbaren Arbeiten HESSE's in den *Annales des Sciences naturelles* übergehe, komme ich zu dem neuesten und wichtigsten Werke über diesen Gegenstand; es ist FRAISSE's Arbeit: »Die Gattung Cryptoniscus FR. MÜLLER«.[1] Auf ihren Inhalt werde ich mehrfach zurückzugehen haben.

Schon lange, wie man sieht, war die Überzeugung von einer nahen Verwandtschaft der Bopyriden und der Cryptonisciden allgemein. Als ich daher den Plan fasste, eine monographische Darstellung der Bopyriden zu unternehmen, konnte ich an eine Übergehung der Cryptonisciden nicht denken. Auch ergaben sich zwischen den Angaben BUCHHOLZ', FRAISSE's und eigenen gelegentlichen Studien Differenzpunkte, welche eine gründliche Nachprüfung der Untersuchungen der beiden verdienstlichen Forscher unumgänglich erscheinen liessen.

Ich habe demnach zweimal, 1882 und 1883 in Christiansand selbst Hemioniscus balani, im Herbst 1883, eben mit der oben dankbar erwähnten Unterstützung der Königlichen Akademie, in Mahon auf Minorca den Cryptoniscus paguri eingehend studirt; bei anderen Gelegenheiten aber auch in vereinzelteren Exemplaren fast alle übrigen hierher gehörigen Formen untersucht. Auf diese Untersuchungen gründen sich die nachfolgenden kurzen Auseinandersetzungen.

Bevor ich jedoch auf den eigentlichen Gegenstand eingehe, drängt sich mir eine formale Nothwendigkeit auf. Da ich mich in meiner Monographie natürlich einer kritisch gesichteten und richtig gestellten Nomenclatur bedienen muss, und doch auch dem dereinstigen Vergleich zwischen der vorläufigen und der ausführlichen Arbeit nicht zu grosse Schwierigkeiten in den Weg legen darf, glaube ich schon hier eine bezügliche kleine Tabelle geben zu sollen.

I. Schmarotzer auf Cirripedien:

a. auf nicht schmarotzenden *(Balanus balanoïdes* und *Creusia)*:

1. *Cryptothir* DANA 1852 (U. S. Exploring Expedition, *Crustacea*, p. 801,

Synonym: *Hemioniscus*, BUCHHOLZ, 1866,

Cryptothiria (p. parte), SP. BATE and WESTWOOD 1868,

[1] FRAISSE, die Gattung Cryptoniscus. FR. MÜLLER, Arbeiten aus dem zoologisch-zootomischen Institut der Universität Würzburg, Bd. IV.

Digitized by Google

b. auf schmarotzenden Cirripedien,

α. in der Mantelhöhle frei:

2. *Eumetor* Kossmann 1872 (Beitr. z. Anatomie der schmar. Rankenfüssler, Anhang),

β. von innen den Mantel perforirend:

3. *Liriopsis,* Max Schultze 1859 (Anm. zu einem Aufsatz von Fritz Müller, Wiegmann's Archiv, Bd. XXV, S. 310),
Synonym: *Liriope,* Rathke, 1843, nom. praeoccup. (Lesson 1837, Trachymeduse),
(Diese Form wird von F. Müller und von Fraisse zu *Cryptoniscus,* von Sp. Bate zu *Cryptothiria* gezogen.)

γ. den Stiel von aussen angreifend und den Cirripeden bis auf die Wurzeln verdrängend:

αα. auf *Peltogaster,* mit kurzem Cephalon:

4. *Cryptoniscus,* Fritz Müller, 1870, (Jen. Zeitschr. f. Medicin, Bd. VI, S. 61),

ββ. auf *Sacculina,* mit langem, tief in den Brachyuren eindringenden Cephalon:

5. *Zeuxo,* Kossmann 1872 (Beitr. z. Anatomie d. schmar. Rankenfüssler) nom. praeoccup. von Templeton, aber von Dana zu Gunsten von *Tanaïs* wieder eingezogen.

II. Schmarotzer auf Ostracoden:

6. *Cypronisсus,* Kossmann, gen. nov. Von Sars (Oversigt af Norges Crustaceer, Christiania Vidensk. selsk. forhandl. 1882, No. 18; p. 73) zu *Cryptothiria* gezogen.

III. Schmarotzer auf Isopoden:

7. *Cabirops,* Kossmann, gen. nov.
Synonym: *Cabira,* Kossmann, (Beitr. z. Anat. d. schmar. Rankenfüssler, Anhang) nom. praeocc. (Treitschke 1825 *Cabera,* Jodoffsky 1837 *Cabira,* Lepidoptere).
Von Sars (Oversigt etc., p. 74) zu *Cryptothiria* gezogen.

Was von Anfang an die grösste Schwierigkeit verursacht hat, war die Beurtheilung der Geschlechtsverhältnisse. Die von Rathke zuerst dargestellte Form mit Augen und Schwimmfüssen wurde bald als Männchen, bald als Larve gedeutet. Rathke selbst hat sein Thier offenbar für erwachsen gehalten, ohne über das Geschlecht etwas zu entscheiden. Dana hält die entsprechende Form, die er in *Creusia* fand, für ein Männchen, ohne über das Altersstadium etwas zu bemerken. Der Fund Lilljeborg's bewies, dass die von Rathke und Dana beschriebenen Thierchen Jugendformen seien; und zwar schien es Lilljeborg nicht möglich, sie für weibliche Jugendformen zu halten, weil sie, obwohl bereits auf dem Wohnthier ansässig, noch keine

Digitized by Google

beginnende Umwandlung in die festsitzende weibliche Form erkennen liessen. Er verglich sie überdies den von KRÖYER gefundenen jüngsten Bopyridenmännchen, und kam zu dem Schlusse, es seien noch unausgebildete Männchen. BUCHHOLZ hielt eben diese Form (aus Balanus balanoïdes) für eine ältere Larve ohne erkennbares Geschlecht; fand keine Männchen, erklärte aber zugleich, dass die von ihm gefundenen geschlechtsreifen Thiere (Cryptothir balani) entschieden nicht hermaphroditisch seien. SPENCE BATE, der das jugendliche Thier schon früher[1] gesehen und benannt hatte, meint 1868,[2] es könne doch wohl ein Männchen sein, und fügt hinter dem Worte »immature« ein Fragezeichen in Klammer ein. Er zweifelt also an der Unreife des Thieres, ohne jedoch irgend zu beweisen, dass es ein Männchen, geschweige denn ein reifes sei.

FRAISSE[3] schliesslich behauptet mit fast völliger Sicherheit, dass die Begattung »in dem der Anheftung vorhergehenden Stadium« vor sich gehen müsse, und beschreibt demnach sowohl männliche als weibliche Thiere dieses (RATHKE's Liriope entsprechenden) Stadiums, von denen er gleichwohl nur die ersteren für geschlechtsreif hält. Aber seine Beweisführung dürfte den meisten Lesern nicht genügen. Was nämlich das Männchen anbetrifft, so sind die Hoden in FRAISSE's Zeichnung kaum angedeutet; Form, Mündung oder gar Structur hat er gar nicht beschrieben; das Sperma, das durch Quetschung des Thieres hervorgepresst wurde, ist wegen der Methode der Gewinnung und wegen der Angaben über die Form seiner Elemente nicht über jeden Zweifel erhaben; es wird geradezu verdächtig dadurch, dass FRAISSE dasselbe auch in der Leibeshöhle der Weibchen an die Ovarien angeheftet gesehen haben will, wo sein Vorhandensein, man darf wohl sagen, unmöglich ist. Diese angeblichen Männchen fand FRAISSE freischwimmend; ganz ähnliche Thierchen dagegen beobachtete er neben oder auf der Sacculina herumkriechend oder schwimmend, und diese hält er für weiblich. Genitalöffnungen oder Genitalorgane überhaupt hat er an ihnen nicht gesehen, aber er hat ihre Umwandlung in das festsitzende Thier wahrgenommen, das ja zweifellos weiblich ist. Da bei diesem jedoch die Ovarien in einem bereits stark metamorphosirten Stadium noch ganz unreif sind, so kann die weibliche Larve vollends, nach FRAISSE's eigener Ansicht, nur unreif sein. Dennoch, und obwohl er die Begattung selbst zu beobachten »nicht Gelegenheit« hatte, auch nicht etwa »dem Weibchen angeklebte Spermato-

[1] SPENCE BATE, Report of the British association 1860, p. 225.

[2] SPENCE BATE and WESTWOOD, History of the British sessile-eyed Crustacea II, p. 267.

[3] FRAISSE, die Gattung Cryptoniscus (a. a. O.) S. 23 ff. Tab. XV. Fig. 30 und 32.

Digitized by Google

phoren« gesehen hat, ist er der Meinung, jenes unreife, larvenförmige Weibchen müsse bereits befruchtet werden. »So setzt sich demnach«, schreibt er, »das befruchtete Weibchen fest, während das Männchen seine Form behält und wahrscheinlich nach dem Acte der Begattung zu Grunde geht.«

Offenbar spricht Alles, was er gesehen resp. nicht gesehen hat, gegen Fraisse's eigene Meinung und dafür, dass zwar das Männchen schon in jenem larvenförmigen Stadium geschlechtsreif ist und die Begattung ausübt, dass aber das Weibchen, in einem viel ältern Stadium geschlechtsreif geworden, auch erst in diesem sesshaften Zustande vom Männchen aufgesucht und begattet wird.

Dass nun in der That das Männchen larvenförmig ist, kann ich auf Grund genauer Untersuchung solcher Stadien nunmehr mit Bestimmtheit behaupten. Man erkennt sehr deutlich die Genitalöffnungen bei der Basis des letzten Pereiopodenpaares, man findet die reifen Hoden in dem Querschnitte und man sieht die lebhafte Bewegung der Spermatozoen. Bei den Cryptonisciden ist also das reife Männchen larvenförmig, noch mit Schwimmfüssen am Pleon ausgestattet.

Dass das Weibchen vor seiner Geschlechtsreife begattet werde, dafür spricht keine Beobachtung und nichts befürwortet eine solche Annahme. Dass es dagegen bei Eintritt der Geschlechtsreife von dem Männchen aufgesucht und begattet wird, dafür spricht Buchholz' Wahrnehmung, welcher (bezüglich Cryptothir [Hemioniscus]) schreibt: »indem beinahe in jedem Balanus, der eins der sackförmigen Thiere enthielt, ein oder mehrere kleine, langgestreckte, bräunliche Thierchen sich vorfanden«, (folgt Beschreibung der Rathke'schen Liriopeform); dafür spricht Fraisse's eigene Abbildung, Taf. XII, Fig. 1, wo solch eine Larve sich an das metamorphosirte Weibchen anklammert; dafür spricht endlich die Thatsache, dass ich schon 1872 bei dem philippinischen Eumetor liriopides ein solches, wie ich schon damals annahm, männliches Thier, und 1883 an einer neapolitanischen Art derselben Gattung ihrer drei, und zwar am Weibchen festgeklammert fand. Die Schwimmfähigkeit dieser Männchen macht es sehr begreiflich, dass man sie nicht immer beim Weibchen antrifft, wie bei den Bopyriden; sie verlassen dasselbe vermuthlich oft spontan und gehen gewiss noch öfter dem Untersucher selbst erst verloren. — Kurz, ich nehme als erwiesen an, dass das Weibchen erst im metamorphosirten Zustande begattet wird.

Wir haben also freischwimmende larvenförmige Männchen und festsitzende stark rückgebildete Weibchen, welche miteinander die Begattung ausführen. Aber nicht genug damit. Meine Untersuchungen

Digitized by Google

liefern die überzeugendsten Indicien dafür, dass beide Formen nur verschiedene Entwickelungsstadien desselben Individuums sind; mit andern Worten, dass wir es bei den Cryptonisciden mit einem protandrischen Hermaphroditismus zu thun haben. Nach den Untersuchungen BULLAR's und PAUL MAYER's ist ein solcher bei Isopoden nicht unerhört, vielmehr bei Cymothoïden zweifellos erkannt; aber immerhin tritt dort die männliche Geschlechtsreife weit später ein, nachdem die zweiästigen Schwimmfüsse am Pleon, das Charakteristicum der Larve, bereits in Kiemenfüsse umgewandelt sind. Protandrie mit larvaler Geschlechtsreife war bisher wohl überhaupt unbekannt.

Begreiflicherweise ist es mir unmöglich gewesen, ein und dasselbe Individuum auf seinem ganzen Entwicklungsgange zu verfolgen; zu beobachten, wie es als Männchen den Obliegenheiten seines Geschlechts nachkam, und wie es nach erfolgter Metamorphose als Weibchen begattet wurde und Eier producirte. Ich kann also nur, wie schon gesagt, Indicien für meine Behauptungen in's Feld führen.

Zunächst ein negatives: ich habe nie eine freischwimmende Cryptoniscidenlarve des letzten Stadiums gefunden, die nicht männliche entwickelte Geschlechtsdrüsen gehabt hätte. Von Cryptothir balani habe ich eine beträchtliche Zahl, von Eumetor drei gefunden und untersucht: alles Männchen. FRAISSE beschreibt zwar weibliche Larven, aber diese waren bereits fixirt, auch nicht eigentlich weiblich, sondern unreif, neutral: die freischwimmenden Exemplare, deren er einige fand, waren männlich. Es liegt auf der Hand, dass die Protandrie erwiesen ist, wenn es nicht gelingt, endlich auch Weibchen oder Neutra im gleichen Entwickelungsstadium mit den bisher ausschliesslich gefundenen Männchen zu entdecken.

Ein zweites negatives Indicium ist folgendes: während bei allen Bopyriden s. str. und den Entonisciden das Männchen sedentär wird und beim Weibchen bleibt, ist es bei allen Cryptonisciden freischwimmend, höchst agil, und ist oft bei dem bereits befruchteten Weibchen nicht mehr anzutreffen. Wie würde dieser Unterschied bei zwei so nahe verwandten Gruppen erklärlich sein, wenn das Männchen nicht nach Befruchtung des Weibchens noch eine andere Aufgabe anderwärts zu erfüllen hätte? Und welche andere kann es sein, als diejenige, an einem anderen Wohnthiere selbst zum Weibchen auszuwachsen?

Endlich aber ein positives Indicium ist das Vorhandensein einer Drüse beim reifen Weibchen, welche mit fast absoluter Sicherheit als rückgebildeter Hoden in Anspruch zu nehmen ist. Diese Drüse wurde von BUCHHOLZ[1] an Cryptothir balani entdeckt, fehlt aber keinem der

[1] BUCHHOLZ, a. a. O. S. 316 ff., Taf. XVI., Fig. 2 und 3, G.

Digitized by Google

von mir untersuchten Cryptonisciden, während kein weiblicher Bopyride oder Entoniscide auch nur die geringste Spur davon besitzt. Buchholz glaubte diese Drüse für ein Nebenorgan der Geschlechtstheile ansehen zu dürfen: er hat zwar trotz vielfachen Bemühungen keinen Ausführungsgang entdeckt, wohl aber fand er den granulirten Inhalt demjenigen des Endabschnitts der weiblichen Genitalleitung gleich. Seine Zeichnung und Beschreibung stellt das Organ als einen dünnen, an drei Stellen aufgeblähten hohlen Strang, jederseits oberhalb und ausserhalb der Ovarien gelagert, dar, welcher mit einer feinkörnigen Substanz erfüllt ist. Die aufgeblähten Stellen bilden zellige Divertikel.

Nun erstreckt sich dieses Organ durch die drei letzten Segmente des Pereion's, also dieselben, in welchen beim Männchen der Hoden liegt. Diese drei Segmente der Larve werden unmittelbar vor der letzten Häutung weit auseinander gezerrt und nachher durch colossale Nahrungsaufnahme in's Ungeheure vergrössert. Dabei bleibt jedoch die Dreitheilung durch quere Einschnürungen erkennbar. Wenn also ein nicht mehr fungirender Hoden vorhanden ist, was ist natürlicher, als dass dieser in den drei Segmenten seine ursprüngliche Dicke behält, dazwischen aber zu einem dünnen Strange ausgereckt wird, kurz, die von Buchholz geschilderte Form annimmt? Und spricht nicht auch das von mir bestätigte Fehlen des Ausführungsganges dafür, dass wir es mit einem nicht mehr functionirenden Organ zu thun haben? Was nun endlich den Inhalt anbetrifft, so erweist sich derselbe auf meinen Querschnitten als ein feinkörniger, stark lichtbrechender und äusserst stark sich färbender Detritus, der in diesen drei Eigenschaften dem Inhalt der Hoden bei Bopyridenmännchen (soweit kein Sperma darin ist) absolut ähnlich ist.

Nach alledem kann man es als fast zur Evidenz erwiesen ansehen, dass in der That die Cryptonisciden protandrische Hermaphroditen sind, bei denen der Hoden schon im letzten Larvenstadium seine Reife erreicht, um als rudimentäres Organ ohne Ausführungsgang noch beim reifen Weibchen sichtbar zu sein.

Es drängt sich die Frage auf, welche Umstände auf die Entstehung dieser Art von Hermaphroditismus hingewirkt haben, da doch die so nahe verwandten Bopyriden überhaupt nicht zwittrig sind?

Wir finden den Hermaphroditismus überhaupt vorzugsweise bei langsam beweglichen oder festsitzenden Thieren; ihnen gewährt er im Kampfe um's Dasein einen wesentlichen Vortheil. Zunächst ermöglicht er, wo eine Begegnung zweier Individuen schwerlich oder gar nicht stattfinden kann, die Selbstbefruchtung. Nun ist allerdings die Selbstbefruchtung in anderer Hinsicht nachtheilig: sie wirkt nämlich

Digitized by Google

als potenzirte Incestzucht ungemein corrumpirend auf die Organisation der Race. Wohl aus diesem Grunde hat bei einigen hermaphroditischen Thiergruppen die Gewohnheit der wechselseitigen Befruchtung entstehen können. Bei ihr fällt ja der obenerwähnte Vortheil allerdings weg: die Begegnung zweier Individuen ist nach wie vor nöthig. Dagegen entsteht dadurch ein anderer Vortheil: wenn nämlich die, verhältnissmässig erschwerte, Chance der Begegnung eintrifft, so sind nun doch wenigstens zwei Individuen befruchtet, und somit ist doppelt so viel Wahrscheinlichkeit für die Erhaltung der Art vorhanden, als wenn die Thiere nicht hermaphroditisch wären.

Kann nun solchergestalt der Hermaphroditismus mit wechselseitiger Befruchtung bei gewissen Arten denjenigen mit Selbstbefruchtung mit günstigem Erfolge ersetzen, so gilt dies doch nur für schwer bewegliche, nicht für sedentäre Arten. Bei diesen ist die Begegnung, und damit die wechselseitige Befruchtung unmöglich. Hier müsste es also bei der Selbstbefruchtung sein Bewenden haben, wenn das Thier wirklich während seiner ganzen Lebenszeit sedentär wäre. Dies ist ja nun bei keinem aus einem Ei hervorgehenden Thiere der Fall — und aus einem Ei gehen ja alle Thiere, wenn nicht in jeder Generation, so doch in regelmässig nach gewisser Zeit wiederkehrenden Generationen hervor.

Daraus folgt denn, dass selbst bei Thieren, die sesshaft werden, eine Begegnung stattfinden kann, vorausgesetzt, dass wenigstens eines der beiden Individuen noch nicht sesshaft ist. Sie würden sich bei dieser Begegnung wechselseitig befruchten können, wenn bei Beiden schon beiderlei Geschlechtsorgane ausgebildet wären. Dies aber ist aus öconomischen Gründen meist unmöglich: den Parasiten mindestens pflegt erst die Sesshaftigkeit jenes Nahrungsquantum zu sichern, das für die Eiproduction erforderlich ist, und andererseits bedürfen die Parasiten im Allgemeinen, zur Erhaltung ihrer Art, einer so colossalen Fruchtbarkeit, dass schon die Eibildung an sich den Körper deformirt und zur Sesshaftigkeit zwingt. Es ist also — mit speciellen Ausnahmen — nicht wohl möglich, dass schon das frei bewegliche Individuum Eierstöcke besitzt; folglich ist weder eine wechselseitige Begattung, noch auch die von FRAISSE vorausgesetzte einseitige zwischen zwei freischwimmenden Thieren anzunehmen. Dagegen kann zur Production des immerhin nicht massenhaft erforderlichen Sperma's das Thier wohl schon vor Eintritt der Sesshaftigkeit im Stande sein, und damit wäre die oben geschilderte Protandrie gegeben. Ein Vortheil gegenüber dem einfachen Dimorphismus der Geschlechter bleibt immerhin noch gewahrt. Wenn ich — ganz willkürlich — annehme, dass das Individuum vom Ausschlüpfen bis zur männlichen Reife eine

Digitized by Google

Woche, vom Ausschlüpfen bis zur weiblichen Reife drei Wochen braucht, so müssen zur Erzielung von 10 (oder n) Bruten im Falle des Dimorphisums 10 (oder n) Individuen je eine Woche und 10 (oder n) Individuen je drei Wochen lang sich allen sie bedrohenden Gefahren entziehen (40 oder $4n$ Wochen), während im Falle der Protandrie nur 10 (oder n) Individuen je drei Wochen und noch eines eine Woche zu existiren brauchen (31 oder $3n + 1$ Wochen). Und der Vortheil ist sogar noch grösser, als diese Zahlen lehren; gerade die erste Woche nämlich ist diejenige, in welcher das Thier (in unserem Falle) frei umherschwimmt und demnach Gefahren weit mehr ausgesetzt ist, als während der nächsten zwei Wochen, wo es schon sesshaft ist. Jene 9 (oder $n - 1$) in unserem Beispiel durch die Protandrie ersparten Wochen sind aber, wie man sich leicht überzeugen kann, lauter erste Lebenswochen. Es ist die erste Woche, die des freischwimmenden Stadiums, neun weiblicher Individuen, die erspart wird.

Höchst mangelhaft waren bisher die Vorstellungen über die Natur des Brutraumes, in welchem die Eier bis zum Ausschlüpfen bei den Cryptonisciden untergebracht werden. Buchholz[1] fand, dass die abgelegten Eier bei *Cryptothir balani* »anscheinend frei in der Leibeshöhle ....hin und her flottiren«, in Wirklichkeit jedoch »in einer besonderen, äusserst zartwandigen und vollkommen durchsichtigen Blase eingeschlossen« sind. Seine weiteren Auseinandersetzungen über den Gegenstand sind mir unklar geblieben. Er findet diese Blase an der äussern Körperwand, an derjenigen Stelle befestigt, »an welcher sich die vier Genitalöffnungen befinden«. »Trennt man nun den Stiel der Blase von dieser Stelle, so erhält man dieselbe im Zusammenhange mit den vier Oviducten, welche unversehrt an derselben befindlich bleiben und deren äussere Enden in die Wandung der Blase unmittelbar überzugehen scheinen«. Während also Buchholz ursprünglich die Oviducte nach aussen hat münden sehen, sieht er sie später in die Blase münden; beides Beobachtungen, die ich als richtig bestätigen kann. Trotzdem sollen die ursprünglichen vier Genitalöffnungen an der äusseren Oberfläche persistiren. »Indessen,« sagt er, »ist das gleichzeitige Vorhandensein äusserer Geschlechtsöffnungen an dieser Stelle neben dem gleichzeitigen Einmünden der Oviducte in das Eierreservoir schwierig zu verstehen.« Meiner Meinung nach ist es gar nicht zu verstehen; auch sein Erklärungsversuch, den ich hier nicht abdrucken will, ist mir gänzlich unverständlich. Das wahre Verhalten bei Cryptothir, wie ich es mit Sicherheit beobachtet habe, ist die Einsenkung der Region der Genitalöffnungen, zunächst in Form einer queren

[1] Buchholz a. a. O. S. 315.

Digitized by Google

Furche. So bildet sich ein Brutraum mit querer Eingangsspalte durch Einstülpung, und da seine Innenfläche die frühere Oberfläche des Thieres in der Umgebung der Oviductmündungen ist, so münden natürlich die Oviducte nicht mehr nach aussen, sondern in diesen neugebildeten Brutraum.

Etwas complicirter, aber vielleicht ursprünglicher, ist das Verhalten bei den übrigen Cryptonisciden, wenigstens bei *Cryptoniscus* und *Liriopsis*. FRAISSE[1] verfällt in einen Irrthum, dem sein Vorgänger doch immerhin entgangen war; er sagt: »diese Bruthöhle nun war schon früher vorhanden, denn es ist eben einfach die Leibeshöhle«.... »Wie die Eier .... in dieselbe gelangen, kann ich nicht sagen«, fügt er hinzu; und in der That wäre es auch kaum möglich, eine denkbare Hypothese in dieser Hinsicht aufzustellen; Ablage der Eier in die Leibeshöhle würde bei Krebsthieren etwas Unerhörtes sein. In diese Brut- oder, nach FRAISSE, Leibeshöhle führen nun zwei schon von ihm sehr ausführlich beschriebene »Athmungs«-Öffnungen, die eine in der Nähe des Mundes, die andere weiter hinten, beide mit einander verbunden durch eine Längsfurche (auf der ventralen Fläche). Von dieser Furche sagt FRAISSE (S. 13): »Sind die Larven nämlich reif zum Freileben, so platzt eine Spalte auf, welche sich zwischen den beiden Athemlöchern während des dritten Stadiums gebildet hat, und bis dahin von einer dünnen Cuticularschicht bedeckt und verschlossen war.« Durch sie gelangen die Larven in's Freie.

Das wirkliche Verhalten, wie ich es durch Studium zahlreicher quergeschnittener Exemplare festgestellt habe, ist nun Folgendes. Auch hier münden zunächst die beiden Oviducte (FRAISSE, vergl. S. 9, hat sie nicht nachweisen können) an der ventralen äusseren Körperoberfläche. Ihre ursprünglich kreisförmige Mündung wird elliptisch und zieht sich bald nach vorn und hinten in eine seichte Furche aus, so dass man zwei solche parallele seichte Längsfurchen an dem noch nicht völlig reifen Weibchen leicht erkennt. Nun beginnt der zwischen beiden Furchen verlaufende Wall sich einzusenken, und so erhält man statt der zwei seichten Furchen eine längliche Vertiefung, deren beide Seitenwände vorn und hinten bogenförmig in einander übergehen. Diese Seitenränder wachsen nun aber einander entgegen, bis sie sich fast in der ganzen Länge berühren; es bleibt also nur ein haarscharfer Schlitz übrig, der an seinem vordern und hintern Ende in ein rundliches Loch übergeht, und diese beiden Löcher führen in eine Höhlung, die eben durch die Einsenkung des zwischen den zwei Genitalfurchen liegenden Walles entstanden ist. Diese Höhlung, in welche

[1] FRAISSE, a. a. O., S. 12.

Digitized by Google

dann natürlich die Oviducte münden, ist die Bruthöhle, hat aber absolut nichts mit der Leibeshöhle zu thun. Sie füllt sich mit den abgelegten Eiern und vergrössert sich dabei in dem Maasse, als die Ovarien (und zugleich auch das Verdauungsorgan) an Umfang abnehmen.

Dass die Eier dabei den zum Athmen nöthigen Wasserwechsel erhalten, wird durch lebhafte Pumpbewegungen vermittelt, welche, wie Fraisse richtig beschreibt, in diesem spätern Stadium durch die Musculatur an den beiden Brutraumlöchern oder Athemlöchern ausgeführt werden; und dass dabei der Wasserstrom nicht die Eier herausschwemmt, wird, wie ebenfalls schon Fraisse gezeigt hat, durch ein System von zipfelförmigen Klappen verhindert, welche die Athemlöcher reusenartig verschliessen. Diese ganze Anlage bildet sich übrigens vor der letzten Häutung des Thieres aus, daher erscheint in einem gewissen Stadium die Brutraumspalte noch, wie Fraisse sagt, »von einer dünnen Cuticularschicht bedeckt und verschlossen«. Später aber hält die Spalte nur noch zusammen, weil die beiden Ränder gewissermaassen in einander gefalzt sind: mit einiger Anstrengung kann man sie recht wohl aus einander zwängen, ohne irgend etwas zu zerreissen. Spontan aber platzt diese Spalte allerdings erst auf, wenn die Bruthöhle überfüllt ist, und das Mutterthier die lebhaftesten Contractionen ausführt; wie Fraisse richtig schildert, dauern diese oft noch fort, wenn schon alle Eier ausgestossen sind, und da um diese Zeit auch Ovar und Verdauungsapparat, die beiden einzigen gefärbten Organe des Thiers, total rückgebildet sind, gewährt das nur mehr einem zerrissenen ganz durchsichtigen Cuticularfetzen ähnliche und doch so lebhaft sich contrahirende Thier einen sehr merkwürdigen Anblick.

Indem ich mancherlei Details von geringerem allgemeinen Interesse hier übergehe, kann ich mir nicht versagen, noch Einiges über die Art der Nahrungsaufnahme und über die Verdauungsorgane mitzutheilen.

Bei Cryptothir *(Hemioniscus)* bleibt, wie schon Buchholz gezeigt hat, das Cephalon und das Pereion bis zum drittletzten Segmente zeitlebens larvenförmig; dem entsprechend dient der kleine Bohr- und Saugapparat, bestehend aus Ober- und Unterlippe, zwischen welchen zwei stiletförmige Mandibeln liegen, zeitlebens als Organ der Nahrungsaufnahme. Dieser vordere Körperabschnitt wird dagegen bei den übrigen Gattungen ebenfalls deformirt. Die Gattung *Zeuxo*, die ich 1872 entdeckte, haust auf schmarotzenden Rankenfüsslern, speciell auf Sacculina, einem Schmarotzer der Brachyuren. Sie bohrt dieses Thier, dessen Stiel wurzelartig in dem Körper eines Taschenkrebses verzweigt ist, und aus ihm, einer Pflanze gleich, Nahrung sucht, ebenda

Digitized by Google

an, wo der Stiel in den Körper des Taschenkrebses eintritt, unterschlägt der Sacculina somit die Nahrung, und bringt dieselbe oftmals, mit Ausnahme eben der Wurzeln, zum Absterben. Diese Wurzeln bleiben merkwürdiger Weise leben, und werden von der Zeuxo ausgenutzt. Der Kopf der letzteren, der schliesslich tief in dem Leibe des Taschenkrebses, freilich zunächst immer noch in einer grossen Lacune des wurzelartig verzweigten Stiels der Sacculina steckt, lässt ausser der Mundöffnung nur vier cylindrische Fortsätze erkennen, von denen gewöhnlich das eine Paar länger ist. Durch ihre Form und Lage erregen sie die Vermuthung, dass es die Fühlhörner der Larve sind, die ihre Gliederung verloren haben. Sie vermitteln offenbar die Fixation des Thieres. Bei einigen Arten ist der Vorderleib von der Stelle, wo er in den Leib des Wohnthieres tritt, bis zu dem Munde in einen sehr langen Stiel ausgezogen, bei anderen ist er ziemlich kurz.

Auf einem anderen schmarotzenden Rankenfüssler, Peltogaster, haust unter ganz ähnlichen Lebensbedingungen die Gattung *Cryptoniscus* FR. MÜLLER; deren Kopf bildet gar keinen Stiel, sondern wir finden jenseits der Öffnung, in die er sich gebohrt hat, vier polsterartige, den Mund umgebende Anschwellungen, welche wir nach der Analogie wohl auch für die umgewandelten Antennen halten können. Dass diese Gattung fast ganz regelmässig den Peltogaster selbst, bis auf seine Wurzeln, zum Abfallen bringt, hat schon FRITZ MÜLLER gezeigt und FRAISSE bestätigt; hin und wieder findet man wohl ein Exemplar, das nicht auf dem Einsiedlerkrebs selbst zu sitzen scheint, sondern den Peltogaster irgendwo am Mantel angebohrt hat, aber wenn solche verirrten Exemplare einerseits den Peltogaster nicht ganz zum Absterben bringen, so scheinen sie selbst es andererseits nicht bis zur weiblichen Geschlechtsreife zu bringen. Anders verhält es sich mit der Gattung *Liriopsis*, MAX SCHULTZE (*Liriope*, RATHKE), die auch auf einem Peltogaster lebt. Dieses Thier (dessen Vorder- und Hinterende man bisher mit einander verwechselt hat) bohrt nicht den Stiel des Peltogaster an, sondern schlüpft in dessen Mantelhöhle und bohrt von innen den Mantel an. So steckt nun die vordere Körperhälfte in den Blutlacunen des Mantels, die hintere Körperhälfte liegt frei in der Mantelhöhle, und die Bohröffnung, die der Schmarotzer gearbeitet hat, bedingt eine mittlere Einschnürung des Thieres. Aber hier ist es nicht nur der Kopf, sondern wohl mindestens noch fünf Segmente des Mittelleibes, welche in dem Wohnthier stecken; da auch die Öffnung, aus welcher die Brut der Liriope ausschwärmt, sich an diesen Segmenten bildet, so muss der Schmarotzer, wenn die Brut reif ist, oder noch etwas früher, auch noch die äussere Mantelwand durchbrechen. Dies gelingt ihm wohl weniger durch Bohren, als weil sein

Digitized by Google

eigenes Wachsthum einen solchen Druck auf die vorliegenden Gewebe ausübt, dass dieselben atrophisch werden und endlich platzen. Der Parasit steckt dann mit dem Hinterleibe in der Mantelhöhle, mit dem Vorderleibe draussen im Freien. Antennen oder Mundorgane habe ich im Stadium der weiblichen Reife nicht mehr wahrnehmen können, und auch bei einigen anderen Gattungen ging es mir ähnlich. Dazu gehören die ebenfalls schon 1872 von mir gefundenen, jetzt genauer studirten Gattungen Eumetor, welche ganz einfach in der Mantelhöhle von Sacculina frei liegt, und Cabirops, welche die Bruthöhle der Bopyriden, also ihrer nächsten Verwandten bewohnt. Alle diese drei Gattungen liegen eben im erwachsenen Zustande mit dem Kopfe frei, und bedürfen daher dort keiner Fixations- oder Bohrapparate. Freilich können sie dann auch keine Nahrung mehr aufnehmen. Aber dies haben sie auch nicht nöthig: auch Cryptoniscus und Zeuxo nehmen um diese Zeit nicht mehr Nahrung auf, obwohl ihr Kopf noch im Blut des Wohnthieres steckt. Dies geht mit Sicherheit hervor aus der bei Cryptoniscus bereits von Fraisse nachgewiesenen Rückbildung des Verdauungsapparates.

Die Erkenntniss der Natur dieses Verdauungsapparates ist auf mancherlei Zickzackwegen vorgeschritten; an ihren bisherigen Gang will ich hier nur kurz erinnern. Rathke[1] hatte den Bopyriden eine aus sieben Paaren getrennt in den Darm mündender Follikel bestehende Leber zugeschrieben; Cornalia und Panceri[2] stellen, allerdings bei einer andern Gattung, statt dieser vierzehn Follikel zwei parallel mit dem Darm laufende Schläuche dar, deren Einmündung in den Darm sie nicht gesehen haben. Buchholz[3] fand nun bei *Cryptothir balani*, zwischen Oesophagus und Enddarm eingeschaltet, ein relativ ungeheuer grosses, blasenförmiges, nach hinten in zwei Blindsäcke ausgezogenes Reservoir, das seiner Ansicht nach »wirklich als Darmcanal anzusehen ist«, und ein ähnliches Verhalten bei Entoniscus beschrieb zuerst F. Müller[4], dann Fraisse[5], von denen jener das Organ als Leber, dieser als Enddarm bezeichnet. Diese letztere Deutung, als Abschnitt des Darms, hält Fraisse nun auch für ein entsprechendes Organ der Cryptonisciden fest, das freilich durch sein ganz gewaltiges Wachsthum bald jede Spur einer Theilung in zwei parallele Schläuche verliert. Ich habe mich schon an anderem Orte hinsichtlich der

[1] Rathke, De Bopyro et Nereide, 1837, p. 9, tab. I, fig. 7b.

[2] Cornalia e Panceri, Osservazioni sopra un nuovo genere di crostacei isopodi sedentarii, Gyge branchialis, 1858, p. 16, tab. II, fig. 6e.

[3] Buchholz, Hemioniscus balani a. a. O. S. 310 ff.

[4] F. Müller, Entoniscus Porcellanae, Archiv f. Naturgesch., Bd. XXVIII, S. 11.

[5] Fraisse, Entoniscus Cavolinii, 1878, S. 17.

Digitized by Google

Bopyriden und Entonisciden der Meinung derjenigen angeschlossen, welche dieses Organ für ein Homologon der sogenannten Leber der Crustaceen erklärt haben. Ich thue dies auch unbedingt hinsichtlich des Verdauungsorganes der Cryptonisciden: sowohl die Entwickelung des Organs aus einem Paar in den Vorderdarm mündender cylindrischer Blindschläuche, als auch die histologische Beschaffenheit, beweisen die Homologie mit der sogenannten Leber. Wie ich aber früher schon bezüglich der Bopyriden ausgesprochen habe, dass diese sogenannte Leber nicht lediglich als solche fungirt, sondern offenbar »eine Function als Darmabschnitt« übernimmt, so muss ich für die Cryptonisciden nunmehr entschieden behaupten, dass das Lumen dieser sogenannten Leber die Nahrung des Schmarotzers, die ja mit dem Blute des Wohnthiers identisch ist, in colossalen Mengen aufnimmt; dass an diesem Orte diese Nahrung verdaut und resorbirt wird, wobei das Organ allmählich wieder zusammenschrumpft; und dass demnach der Name Leber physiologisch in keiner Weise mehr für das Organ zutrifft. Inzwischen ist ja nun aber auch zur Genüge erwiesen worden, dass die bisher sogenannte Crustaceenleber überhaupt keine Leber ist. Der Name beruht auf einem Irrthum, der durch den bedeutungslosesten Schein, durch die Färbung des Organs, hervorgerufen worden ist. Schon Hoppe-Seyler[1] und Krukenberg[2] haben in dem Secret der sogenannten Leber der höheren Crustaceen ein diastatisches, ein peptisches, ein tryptisches und ein fettzersetzendes Enzym nachgewiesen. Max Weber[3] glaubte denn auch in dem Epithel der Leber neben den eigentlichen Leberzellen eine zweite Art von Zellen zu finden, welche die obige, mehr pankreatische Function ausüben sollten: er nannte das Organ Hepatopankreas. Nun hat aber schon Hoppe-Seyler am Flusskrebs und neuerdings Frenzel[4] an zahlreichen Seekrebsen nachgewiesen, dass in dem Secret überhaupt keine Gallenbestandtheile vorhanden sind. Es fehlen Gallensäuren, gallensaure Natron- und Kalisalze, es fehlt Bilifuscin und die verwandten Pigmente; auch auf Bilirubin wurde vergeblich untersucht. Dazu kommt, dass Frenzel auch Weber's Behauptung zweier verschiedener Epithelzellarten als Irrthum nachgewiesen hat. Bei meinen Epicaridien hätte ein solcher überhaupt nicht entstehen können. Kurz, dieses Organ ist überhaupt,

[1] Hoppe-Seyler, Physiologische Chemie, S. 276.

[2] Krukenberg, Vergleich. physiol. Beitr. zur Kenntniss der Verdauungsvorgänge; und: Zur Verdauung bei den Krebsen; Untersuchungen a. d. physiol. Institut in Heidelberg, Bd. II.

[3] M. Weber, Über den Bau und die Thätigkeit der sog. Leber der Crustaceen. Archiv f. microskop. Anatomie, Bd. XVII, S. 385 ff.

[4] J. Frenzel, Über die Mitteldarmdrüse der Crustaceen, Mittheil. a. d. zool. Station zu Neapel, Bd. V, S. 50 ff.

Digitized by Google

wo es die Form einer Drüse hat, schlechtweg die verdauende Drüse der Krebsthiere, eine *Glandula intestinalis*. Bei den Epicaridien aber, und ganz besonders bei den Cryptonisciden, reicht das Darmlumen zur Aufnahme der Speise nicht aus, und jenes Organ betheiligt sich daran in ganz hervorragender Weise. Es wird so aus einer *Glandula intestinalis* ein *Intestinum glandulare*, ein als Darm fungirendes Reservoir mit einem secernirenden und zugleich resorbirenden Epithel.

Der für die Bopyriden und Entonisciden so charakteristische Saugmagen, mit den in sein Lumen vorspringenden gewaltigen Papillen, fehlt nicht nur bei Cryptothir, wo der larvenförmige Vorderkörper ohnehin keinen Raum dafür gewähren würde, sondern auch bei den übrigen Cryptonisciden; offenbar übernimmt bei ihnen das *Intestinum glandulare*, dessen Wandungen lebhafte Bewegungen ausführen, seine Function.

Was nun endlich den Enddarm anbetrifft, so ist sein Zusammenhang mit dem Vorderdarm bei stärker deformirten Thieren unterbrochen; nur bei Larven und jüngeren Weibchen findet man ihn noch. Wie Buchholz, F. Müller und Fraisse bereits gezeigt haben, ist er unweit vor dem After birnartig aufgebläht. (Einen After finde ich, Fraisse's Angaben zuwider, auch noch bei ältern Thieren.) Von den stäbchenartigen Elementen des Inhaltes, die Buchholz beschreibt, habe ich so wenig wie Fraisse etwas gesehen; auf meinen Schnitten ist das Lumen dieses Theiles überhaupt leer, da die grossen Zellen der Wandung papillenartig in dasselbe hineinragen, und nur einen geringen, sternförmigen Raum auf jedem Querschnitte freilassen. Dass den Enddarm Pigmentzellen umlagern, wie Buchholz und Fraisse angeben, kann ich nicht bestätigen; das in der Umgebung des Darms abgelagerte braune Pigment ist extracellulär, und muss wohl als Harnconcrement angesehen werden. Ob es sich dabei, wie Blanc[1] vermuthet, um ein Abscheidungsproduct des Fettkörpers handelt, kann in diesem Falle als zweifelhaft angesehen werden, da sich überhaupt deutliche Fettkörperelemente selbst in den jüngsten von mir untersuchten Stadien nicht nachweisen liessen. Dies ist jedoch kein absolutes Hinderniss. Bei den Bopyriden und Entonisciden wird der Anfangs sehr mächtige Fettkörper in dem Maasse reducirt, als sich der Eierstock durch reifende Eier vergrössert; es ist begreiflich, dass bei den Cryptonisciden, wo schon so sehr früh Geschlechtsproducte, nämlich männliche, ausgebildet werden, der Fettkörper schon sehr früh reducirt wird; in gewissem Sinne wird er ja hernach auch entbehrlich durch

[1] Blanc, Observations faites sur la Tanaïs Oerstedii, Zoologischer Anzeiger, 1883, S. 637.

Digitized by Google

das *Intestinum glandulare*, das zwar nicht der Aufspeicherung bereits assimilirter Nahrungsstoffe, wie der Fettkörper, dient, wohl aber unassimilirte Nahrung in colossaler Menge anhäuft, die in dem Maasse, wie sie assimilirt wird, den Eiern direct zu Gute kommt. Es kann nun immerhin gedacht werden, dass die Harnmassen von einem Fettkörper, der während der jüngeren Larvenzeit existirte, abgeschieden seien; wirklich sind sie während der männlichen Geschlechtsreife am massenhaftesten vorhanden, und nehmen später nicht nur relativ, sondern auch absolut an Menge ab. Doch will ich nur die Möglichkeit angedeutet haben; näher liegt doch wohl die Vermuthung, dass diese Harnconcremente im Blute entstehen und sich in den wandungslosen Bluträumen ablagern, von denen die wichtigsten eben am Darm entlang verlaufen. Die Abnahme dieser Pigmentabsonderungen fällt mit dem Beginn der sedentären Lebensweise, also auch der völligen Änderung der Ernährung, zusammen, kann also wohl auch dadurch, statt durch den Schwund des Fettkörpers verursacht werden.

Dass die Enddarmsblase eine starkriechende Substanz producire, wie FRAISSE behauptet, mag richtig sein, doch kann ich es nicht bestätigen, da ich unglücklicherweise — oder soll ich als Zoologe sagen: glücklicherweise? — mit einem sehr schwachen Geruchssinn ausgestattet bin.

Die übrigen innern Organe der Cryptonisciden zeigen keine erheblichen Abweichungen von denen der Bopyriden: was über sie und über die Details der äussern Organisation zu sagen ist, verspare ich mir für meine monographische Publication.

Digitized by Google

Digitized by Google

18. Das Gesetz der Transformation der inneren Architektur der Knochen bei pathologischen Veränderungen der äusseren Knochenform.

Von Dr. Julius Wolff
in Berlin.

(Vorgelegt von Hrn. du Bois-Reymond am 13. März; — gedruckt im Bericht vom 24. April [St. XXII]; — ausgegeben am 1. Mai.)

Hierzu Taf. I.

In den Jahren 1870 bis 1872 habe ich den Nachweis zu liefern gesucht, dass im Gefolge sämmtlicher aus beliebigem äusserem oder innerem Anlass entstehenden pathologischen Veränderungen der äusseren Form resp. der Belastung der Knochen gewisse Umwandlungen der inneren Architektur dieser Knochen vor sich gehen, und dass in gleichartigen Fällen jedesmal dieselbe Form der Umwandlung wiederkehrt. Ich suchte zugleich zu zeigen, dass diese Umwandlung in directer Beziehung zur Wiederherstellung der Function des pathologisch veränderten Knochens steht, dass sie demgemäss jedesmal im Sinne derjenigen Linien geschieht, welche die graphische Statik zur Darstellung der Vertheilung der Kräfte in belasteten Balken construirt, und dass mithin die innere Architektur pathologisch veränderter und trotzdem wieder functionirender Knochen ganz ebenso, wie diejenige normal gestalteter Knochen, unter dem Zwange mathematischer Regeln steht.

Der Kürze halber nenne ich das Gesetz der nach mathematischen Regeln erfolgenden Transformation der Knochenarchitektur bei pathologischen Veränderungen der äusseren Form und der Belastung der Knochen das »Transformationsgesetz« der Knochen.

Gewisse Verhältnisse der normalen inneren Architektur der Knochen hatten sich mathematisch vorausbestimmen lassen, ehe sie an den Knochen selber gefunden worden waren.

So hatte ich die überall rechtwinklige Kreuzung sämmtlicher Bälkchen und Plättchen, welche auf frontalen, durch das menschliche

Digitized by Google

coxale Femurende geführten Längsschnitten von der lateralen und medialen Seite aus gegen das Hüftgelenk zu verlaufen, schon nach mathematischen Erwägungen feststellen können.

Ebenso hatte sich mir die neutrale Anordnung der Bälkchen, d. i. der Verlauf derselben senkrecht und parallel zur Knochenaxe, auf dem die »neutrale Faserschicht« darstellenden sagittalen und zugleich genau durch die Femuraxe geführten Längsschnitt, zunächst schon aus mathematischen Betrachtungen als nothwendig ergeben.

Die Möglichkeit solcher Vorausbestimmungen hatte denjenigen Autoren, welche anfänglich noch Zweifel an der Lehre von der statischen Bedeutung der inneren Architektur der Knochen gehegt hatten, als ein vor allem Anderen überzeugendes Argument für jene Bedeutung entgegengehalten werden können.

Ganz ebenso nun habe ich aber auch für Knochen mit pathologischen Formveränderungen die Richtigkeit des Transformationsgesetzes annehmen zu dürfen geglaubt, ehe ich noch Gelegenheit gehabt hatte, pathologische Präparate zu untersuchen.

Die mit Bezug auf Hermann von Meyer's erste Mittheilungen über die »Architektur der Spongiosa« und auf Culmann's graphische Darstellung der Vertheilung der Kräfte in einem oberschenkelähnlichen Krahn vorgenommenen Studien hatten ergeben, dass die Natur durch den inneren Bau des Knochens die zweckmässigste Form und die grösste Leistungsfähigkeit mit einem Minimum von Materialaufwand erreicht.

Die beispielsweise am coxalen Femurende von der medialen Seite her aufsteigenden Knochenbälkchen durften als »Druckbälkchen« bezeichnet werden, weil in den Richtungen derselben die Knochenpartikelchen durch die auf dem Femurkopf aufruhende Körperlast am stärksten aneinander gedrückt werden, und weil durch den Umstand, dass gerade in diesen Richtungen massive Bälkchen vorhanden sind, der Knochen im Stande ist, dem durch die Belastung hervorgerufenen maximalen Druck Widerstand zu leisten.

In demselben Sinne hatten mit Bezug auf die durch die Belastung bewirkte maximale Zerrung der Knochenpartikelchen die von der lateralen Seite aufsteigenden Bälkchen als »Zugbälkchen« bezeichnet werden dürfen.

Es hatte sich weiterhin gezeigt, dass die Druck- und Zugbälkchen zugleich in denjenigen Richtungen verlaufen, in welchen allein die Körperlast keine schiebenden oder scheerenden Wirkungen, d. i. kein Bestreben der einzelnen Partikelchen je zweier unmittelbar benachbarter Längs- oder Querschnitte, sich gegeneinander zu verschieben, auszuüben vermag.

Digitized by Google

Ferner war es bereits durch Hermann von Meyer festgestellt worden, dass die sogenannte compacte Substanz der Knochen aus den directen Fortsetzungen der Bälkchen der sogenannten spongiösen Substanz besteht, dass also die compacte Region der Knochen nur als eine Zusammendrängung der in der spongiösen Region auseinandergefalteten Knochenbälkchen aufzufassen ist.

Endlich hatte sich die Markhöhle der Röhrenknochen als diejenige Stelle ausweisen lassen, an welcher die Knochensubstanz überflüssig, an welcher sie, wenn sie daselbst vorhanden wäre, statisch werthlos sein würde. Denn bei einer Construction der Vertheilung der Kräfte für einen Querschnitt aus der Mitte des oberschenkelähnlichen Krahns fielen, selbst wenn dieser Querschnitt voll angenommen wurde, und nicht, wie es ja der wirkliche Diaphysenquerschnitt ist, von vorn herein hohl, alle Zug- und Drucklinien an die Peripherie des Querschnitts, während die Mitte des Querschnitts, d. i. die der Markhöhle entsprechende Stelle, frei von jenen Linien blieb.

Nun lehrte aber weiterhin die graphische Statik, dass jede Veränderung der äusseren Form eines belasteten Balkens eine Abänderung der Richtungen des maximalen Zugs und Drucks, und damit eine veränderte Inanspruchnahme sämmtlicher einzelner Balkenpartikelchen auf Druck-, Zug- und Scheerfestigkeit bedingt.

Auf den Knochen übertragen, bedeutete dies offenbar so viel, dass, wenn ein in seiner Form veränderter Knochen wieder functioniren soll, ihm dabei seine ursprünglichen, der früheren normalen Form angepasst gewesenen Bälkchen nicht mehr viel nützen können. Denn vermöge dieser Bälkchen ist der Knochen nicht mehr, wie früher, im Stande, dem maximalen Zug und Druck der Belastung Widerstand zu leisten. Überdies machen sich nach der Formveränderung in den Richtungen jener Bälkchen überall die früher beseitigt gewesenen scheerenden Wirkungen der Belastung geltend. Dagegen fallen die der veränderten Form entsprechenden Richtungen des maximalen Zugs und Drucks vielfach in die Lücken zwischen den ursprünglichen Bälkchen und in die ursprüngliche Markhöhle, woselbst ja früher das Vorhandensein von Knochensubstanz überflüssig gewesen war. Der Knochen genügt mithin in keiner Weise mehr den an ihn gestellten mechanischen Anforderungen. Schon bei verhältnissmässig geringfügigen äusseren Anlässen wird er eine Continuitätstrennung durch Zerdrücken, Zerreissen oder Abscheeren erfahren, wird er zusammenbrechen müssen.

Es konnte somit nach diesen mathematischen Betrachtungen schon von vorn herein mit Bestimmtheit angenommen werden, dass ein in seiner Form veränderter Knochen erst dann wieder zu functioniren

Digitized by Google

vermag, wenn seine durch die Formveränderung statisch werthlos gewordenen Bälkchen untergegangen, und durch neu entstandene, für die veränderte Form und Inanspruchnahme statisch brauchbare Bälkchen ersetzt worden sind.[1]

Nachdem ich gleich an den ersten von mir untersuchten Fracturen- und Rachitispräparaten die in der That geschehene Umwandlung der ursprünglichen Bälkchenanordnung in ein neues, den veränderten Verhältnissen angepasstes Trajectoriensystem zu demonstriren vermocht hatte, wurde derselbe Befund, zugleich an Ankylosepräparaten, von Martini und Köster bestätigt.

Indess sind doch die in der Litteratur bisher vorliegenden objectiven Beweise des Transformationsgesetzes noch keineswegs genügende gewesen. Ich bin erst jetzt in der Lage, eine ausreichende objective Begründung des Transformationsgesetzes liefern zu können, und zwar auf Grund einer reichhaltigen Sammlung von Präparaten, die mir von vielen Vorstehern pathologischer Institute und chirurgischer Kliniken, in erster Reihe von Hrn. Geheimenrath Virchow, gütigst zur Verfügung gestellt worden sind, und die, nachdem ich dünne Fournierblätter aus denselben hergestellt habe, an Schönheit und auf den ersten Blick überzeugender Beweiskraft für die Richtigkeit und Allgemeingültigkeit des Transformationsgesetzes die wenigen in meinen ersten Mittheilungen über diesen Gegenstand von mir beschriebenen Präparate weit überragen.

Es stellt sich mir damit zugleich die Aufgabe, eine Reihe von Schlussfolgerungen zu erörtern, die aus dem Transformationsgesetz für die Physiologie und Pathologie des Knochengewebes und anderer Gewebe hergeleitet werden müssen.

---

[1] Es kann keinem Zweifel unterliegen, dass für diejenigen weichen Gebilde, denen eine functionelle Structur eigen ist, ein analoges Transformationsgesetz geltend sein muss, wie für die Knochen. — Dagegen scheint in den Pflanzen bei unnatürlichen oder künstlichen Abänderungen ihrer statischen Verhältnisse keine entsprechende Umwandlung der inneren Structur vor sich gehen zu können. Denn schon bei den durch das normale Dickenwachsthum der Pflanzen bedingten natürlichen Abänderungen der statischen Verhältnisse bleibt die zweckentsprechende Umwandlung aus. Schwendener hat im Jahre 1874 durch seine Untersuchungen über das mechanische Princip im anatomischen Bau der Monocotylen gezeigt, dass bei den nicht in die Dicke wachsenden Monocotylen das Skelet der allseitig biegungsfesten Organe (z. B. der Stämme der Bambusen, Lilien, Palmen u. s. w.) die Form eines hohlen Cylinders annimmt, und dass demnach ein solches Organ einem rationell construirten Mastbaum des Technikers entspricht. Dagegen kommt nach Schwendener's Nachweis bei den in die Dicke wachsenden Pflanzen aus der Abtheilung der Dicotylen und Coniferen (z. B. bei den Stämmen unserer Laub- und Nadelbäume), in Folge des Dickenwachsthums, eine fast compacte, also irrationell gebaute Säule zu Stande.

Digitized by Google

Ich werde zunächst die Bedeutung der Transformationen für die Lehre von der Heilung der Knochenbrüche, von der Rachitis und vom Genu valgum zu erörtern haben, dann die Bedeutung derselben für die Lehre vom Knochenwachsthum, von der Regeneration der Gewebe und vom Kampf der Theile im Organismus.

I. Die Heilung der Knochenbrüche.

Die Invalidität gebrochener Knochen und die Beseitigung der Invalidität.

Alle Autoren, welche bisher den Heilungsvorgang bei Knochenbrüchen untersucht haben, meinten, dass die Functionsunfähigkeit eines gebrochenen Knochens eben nur durch die Continuitätstrennung selber bedingt sei, dass mithin die Bruchstelle der alleinige Sitz der Invalidität eines gebrochenen Knochens sei, und dass die der Bruchstelle nicht unmittelbar benachbarten Theile des Knochens, die bei dem Trauma keinen directen Schaden erlitten haben, auch nicht mit invalide geworden seien. Man glaubte demgemäss, dass zur Aufhebung der Invalidität des gebrochenen Knochens die Natur nichts weiter zu thun nöthig habe, als eine recht feste Zusammennietung der Fragmente herzustellen. Wie Galen die Fracturenheilung mit der Verklebung zweier Holzstücke durch Tischlerleim verglichen hat, so fassen auch noch die heutigen Autoren die Fracturenheilung als eine blosse »Siegellackverklebung« der Fragmente mit Organisation des Siegellacks zu wahrer Knochensubstanz auf.

Aus einem einfachen und nahe liegenden Beispiel dürfte leicht das Irrthümliche dieser Anschauung ersichtlich werden. Eine mitten hindurch gebrochene Säule muss, wenn sie wieder, wie früher, als Trägerin ihres Daches benutzt werden soll, nicht blos an der Bruchstelle sorgfältig vernietet werden; man muss vielmehr die beiden Bruchstücke offenbar auch noch wieder in ganz genau senkrechter Richtung aneinander gefügt haben. Bei der geringsten Abweichung eines der beiden Bruchstücke vom Senkblei ist die Säule, und wenn auch die allerfestesten eisernen Ringe um die Bruchstelle gelegt worden sind, nicht mehr tragfähig, und die Baufälligkeit des durch die schiefe Säule gestützten Daches würde erst dann als aufgehoben betrachtet werden können, wenn wir zuvor der schiefen Säule selbst etwa noch durch seitlich angebrachte Stützen ihre Tragfähigkeit wiedergegeben hätten.

Digitized by Google

Nun hat man ja aber jederzeit gewusst, dass die Fracturen meistens mit recht erheblichen, oft sogar mit ganz enormen Dislocationen der Fragmente heilen. Ja es war längst durch M. J. Weber darauf hingewiesen worden, dass die Möglichkeit einer Heilung ohne alle Dislocation nicht wohl denkbar sei.

Wenn man somit bei einem gebrochenen und schiefgewordenen Knochen die reparatorische Thätigkeit der Natur mit der Vernietung der Bruchstelle für erledigt gehalten hat, so liess man damit für den lebendigen Knochen, der nachher wieder den mannichfaltigsten subtilen Anforderungen an seine mechanische Leistungsfähigkeit genügen soll, etwas gelten, was man für die leblose Säule gewiss nicht würde gelten gelassen haben.

Der Grund für eine solche Anschauung über den Knochen lag darin, dass man thatsächlich an dem schiefgewordenen und doch wieder gut functionirenden Knochen Nichts oder doch nur äusserst wenig von den seitlichen Stützen fand, die man für eine schiefe Säule verlangt haben würde. Man übersah dabei, dass die Natur die seitlichen Stützen in der Regel nicht aussen aufbaut, sondern bei Weitem vorwiegend im Inneren des gebrochenen Knochens.

Jetzt, nachdem es uns durch die Kenntniss der statischen Bedeutung der inneren Architektur der Knochen klar geworden ist, dass jede mit noch so geringer Dislocation geheilte Fractur sämmtlichen Bälkchen des ganzen Knochens ihre Druck-, Zug- und Scheerfestigkeit raubt, oder dieselbe doch wenigstens sehr herabsetzt, liegt es auf der Hand, dass die Zusammennietung der Fragmente nur der kleinere Theil der Arbeit sein kann, welche der Natur obliegt, während sie den viel grösseren Theil zu vollziehen hat an allen den unendlich zahlreichen Partikelchen der von der Verletzung gar nicht direct betroffenen Theile des Knochens.

Mag also der verklebende Lack an der Bruchstelle noch so voluminös sein, und mag er die Festigkeit des Eisens haben, so hat doch durch diesen Lack allein die Natur noch so gut wie Nichts gethan für die Wiederherstellung der Function, für das Gefühl der Sicherheit, welches der Kranke beim Wiedergebrauch des Gliedes gewinnen muss, und welches er nur gewinnen kann nach Restitution der verlorenen statischen Festigkeit sämmtlicher Partikelchen des gebrochenen Knochens.

Die Transformation gebrochener Knochen.

Jedes einzige meiner Präparate von geheilten Fracturen zeigt in der That zweckentsprechende Umwandlungen an Stellen, die bei dem Bruch vollkommen unverletzt geblieben sind.

Digitized by Google

In jedem Präparate finden wir beim Vergleich mit normalen Präparaten die Bälkchen in den Richtungen ganz neuer Trajectoriensysteme angeordnet. Wir sehen also eine Reihe von Bälkchen, von denen wir den bestimmten Nachweis liefern können, dass sie im Moment der Fractur noch nicht vorhanden gewesen sind, dass sie also in ihrem ganzen, sich weit über die Bruchstelle hinaus erstreckenden Verlauf sich neu gebildet haben, und dass ihre Bildung ausschliesslich durch die Nothwendigkeit des Vorhandenseins von Knochensubstanz in der Richtung dieser Bälkchen bedingt gewesen ist. Dahingegen finden wir, dass ebenso fern von der Bruchstelle andere Bälkchen untergegangen sind, von denen wir ebenso bestimmt wissen, dass sie früher vorhanden gewesen, und erst durch die Formveränderung des Knochens statisch überflüssig geworden sind (vergl. Fig. 1).

Ferner zeigt der Vergleich mit der äusseren Form normaler Präparate, dass die an der Bruchstelle und fern von derselben vor sich gehende Apposition neuer und Resorption früher vorhanden gewesener Knochenpartikelchen sich nicht nur auf die Umänderung der Richtungen einzelner Bälkchen beschränkt, dass es sich dabei vielmehr zugleich um die Neubildung und den Schwund ganzer grösserer Knochenpartien handelt. So schwindet zuweilen bei gewissen Schenkelhalsbrüchen der im Moment der Fractur das herabgesunkene *Caput femoris* weit überragende *Trochanter major*, und es bildet sich ein neuer *Trochanter* aus der tiefer gelegenen *Spongiosa*. Die breite dreieckige Lücke, von der man bei manchen anderen Schenkelhalsbrüchen, — und zwar bei der hier gewöhnlich stattfindenden Einkeilung der medialen Seite des oberen in die *Spongiosa* des unteren Fragments, — nachweisen kann, dass sie an der lateralen Seite des Knochens im Moment der Fractur bestanden haben muss, füllt sich mit einer ganz und gar neuen *Spongiosa* aus, deren Architektur genau in das Gesammtbild der übrigen neuentstandenen Architektur hineinpasst. — Nach unten vom Adams'schen Bogen entsteht ferner bei Schenkelhalsbrüchen fast constant eine gänzlich neue, mächtige Knochenneubildung (s. Fig. 1), die man bisher meistens irrthümlicherweise als »fehlerhaft beschaffenen Callus« angesehen hat, die sich aber als durchaus physiologische mit zweckentsprechender innerer Architektur versehene Bildung erweist, und die mithin vielmehr als eine seitliche Stütze oder Schutzwehr für die gefährdetste Stelle des Knochens zu betrachten ist.

Dagegen entsteht fast ganz constant mitten in der *Spongiosa*, und zwar im *Collum femoris* oberhalb der Bruchstelle eine neue Markhöhle. (Fig. 1.)

Bei dem, was man als Callusbrücken zwischen zwei weit von einander abstehenden Fragmenten beschrieben hat, handelt es sich

Digitized by Google

keineswegs um wirkliche Callusbrücken, sondern vielmehr um statische Brücken; sie entstehen nicht als etwas Zufälliges oder als ein Residuum des Callus; sie bilden sich vielmehr nur an solchen oft ziemlich weit von der Bruchstelle entlegenen Knochenpunkten, an welchen die statischen Gesetze das Vorhandensein eines in Form einer Brücke erscheinenden stützenden Pfeilers verlangen.

Bei Diaphysenbrüchen ferner entsteht nicht nur an der Bruchstelle eine völlig neue *Spongiosa*; es verändern sich vielmehr auch die weit von der Bruchstelle entlegenen Epiphysen, insofern einmal die Markhöhle an der Epiphysengrenze eine excentrische Lage erhält, und insofern zweitens auch hier wieder mitten in der alten *Spongiosa* neue, unter analogen Verhältnissen regelmässig wiederkehrende Markhöhlen entstehen.

Ja es zeigen sich endlich sogar mächtige Umwandlungen an den ganz gesunden Nachbarknochen, sobald aus irgend welchen Gründen der gebrochene Knochen selber nicht wieder functionsfähig wird. Tritt beispielsweise an der gebrochenen *Tibia* eine Pseudarthrose ein, so kann, wie dies zuerst Wilhelm Roux nachgewiesen hat, die *Fibula* die Function der *Tibia* übernehmen, und sich zu diesem Zwecke bis zum Drei- oder Vierfachen ihrer natürlichen Circumferenz verdicken.

Beurtheilung der Vorgänge an der Bruchstelle.

Die Bruchstelle, welche ja unmittelbar nach der Verletzung die Stätte der entzündlichen Callusbildung ist, wird, wie wir gesehen haben, später die Stätte derselben Architekturneubildung, welche den ganzen Knochen, also auch die weit von der Bruchstelle entlegenen Regionen desselben betrifft.

Trotz des Zusammentreffens an einer und derselben Stelle walten indess gar keine Beziehungen zwischen der früheren entzündlichen Bildung und der späteren statischen Bildung ob. Das Product der statischen Vorgänge entsteht nicht etwa aus dem der entzündlichen Vorgänge; beide sind vielmehr gänzlich heterogen, und es setzt sich eben nur, während das Entzündungsproduct vollkommen untergeht, das Product der statischen Vorgänge an dessen Stelle.

Es ist also ein Irrthum, wenn dasjenige, was man als bleibendes Gebilde lange Zeit nach der Heilung des Bruchs an der Bruchstelle vorfindet, bisher ganz allgemein als Endumwandlungsproduct des Callus betrachtet worden ist. Das, was Dupuytren »definitiven Callus«, andere Autoren den »zweiten« oder »späteren Callus« genannt haben, ist vielmehr in Wirklichkeit gar kein Callus, und hat mit dem Callus gar nichts gemein.

Digitized by Google

Betrachten wir ein bei der Architekturtransformation neuentstandenes Knochenbälkchen, so sehen wir, dass dasselbe, indem seine Richtung eine regelmässige und continuirliche Spannungstrajectorie repräsentirt, aus dem unteren Fragment über die Bruchstelle hinweg, und selbst über ursprüngliche durch Diastase bedingte grössere Lücken der Bruchstelle hinweg in das obere Fragment hineinverläuft. Wenn es nun selbstverständlich ganz unmöglich ist, die sehr fern von der Bruchstelle gelegenen Anfangs- und Endstücke jener Spannungsbälkchen in Beziehung zum Callus zu bringen, so würde es offenbar auch unrichtig sein, dasjenige Stück aus der Mitte jenes Spannungsbälkchens, welches zufällig an der Bruchstelle zu liegen kommt, als Callus resp. definitiven Callus zu betrachten.

Hat es sich ja doch gezeigt, dass die statischen Vorgänge bei Diaphysenbrüchen ihren Sitz zugleich an den weit entlegenen Epiphysen haben, ja, dass ganz gesunde Nachbarknochen die Erscheinungen einer mächtigen compensatorischen Hypertrophie darbieten können, dass also die statischen Vorgänge auch an solchen Örtlichkeiten stattfinden, an welchen ohne Weiteres jede Beziehung zur Callusbildung an der Bruchstelle ausgeschlossen ist.

Ja, es kann schon aus dem sehr einfachen Grunde dasjenige, was wir als Theilerscheinung der allgemeinen Architekturtransformation an der Bruchstelle vorfinden, mit dem früher an der Bruchstelle vorhanden gewesenen Callus nichts gemein haben, weil es überhaupt gar keine directen Beziehungen zu der Fractur hat. Es würde auch entstanden sein, wenn der Knochen gar nicht gebrochen, wenn er vielmehr durch irgend eine andere, ohne Continuitätstrennung und also auch ohne Callusbildung einhergehende Affection, beispielsweise durch Rachitis oder Ankylose, unter ähnliche von der Norm abweichende Verhältnisse der Form und Belastung, wie sie bei Fracturen eintreten, versetzt worden wäre, und wenn der Knochen unter diesen veränderten Verhältnissen hätte weiter functioniren sollen.

Fig. 2 zeigt eines meiner zahlreichen Ankylose-Präparate. Es handelt sich um eine in ungefähr rechtem Winkel stehende rechtsseitige Hüftgelenkankylose. Man sieht, dass Femur und Becken auch der inneren Architektur nach nur einen einzigen Knochen darstellen. Ein ganz neues Trajectoriensystem ist entstanden, dargestellt durch büschelförmige Bälkchen, welche von dem Sattel zwischen der Stelle des früheren *Collum femoris* und der des *Corpus ossis pubis* nach allen Richtungen divergirend gegen den *Trochanter major*, gegen die Mitte der *Incisura ischiadica major* und gegen *Pecten ossis pubis* hin verlaufen, und aus Kreissegmenten, welche orthogonal zu sämmtlichen Zweigen des Büschels stehen. Die äusserst zierliche Architektur des

Digitized by Google

Präparates, für die es unter normalen Verhältnissen an keiner Körperstelle etwas Ähnliches giebt, kehrt bei sämmtlichen Präparaten von Hüftgelenksankylose mit analoger Winkelstellung jedesmal wieder.

Es geht aus allen diesen Umständen hervor, dass die statische Bildung nirgends, also auch nicht an der Bruchstelle gebrochener Knochen, der entzündlichen Callusbildung als einer Vorstufe oder Matrix bedarf, und dass die Entstehungsursache beider Bildungen eine völlig verschiedene ist. Die Callusbildung verdankt ihren Ursprung dem Entzündungsreiz, die statische Bildung dagegen dem weiter unten noch eingehender zu erörternden »trophischen Reiz der Function«.

Was das mikroskopische Verhalten der Vorgänge an der Bruchstelle anbelangt, so hat man bisher gemeint, dass der Callus, der sich durch überschüssige Apposition als eine heterologe, aus poröser Knochensubstanz mit primären Markräumen bestehende Masse bilde, ein zwiefaches späteres Schicksal habe.

Ein Theil des Callus, so viel als eben überschüssig sei, sollte resorbirt werden, während der übrige Theil sich durch allerhand Appositions- und Resorptionsvorgänge allmählich und unter sehr verschiedenen Übergangsformen in vollkommen ausgebildete homologe Knochensubstanz umwandeln sollte.

Diesen zwiefachen Vorgang der Resorption einerseits und der allmählichen Umformung andererseits hat man als »Rückbildung des Callus« beschrieben.

Nun zeigen ja aber unsere Präparate, dass an den fern von der Bruchstelle gelegenen Knochenregionen das Product der statischen Vorgänge in keiner Weise und zu keiner Zeit von dem normalen Knochengewebe unterscheidbar ist, dass also diesem Product schon vom ersten Moment seines Entstehens ab das histiologische Gefüge normaler Knochensubstanz zukommt.

Es muss also auch an der Bruchstelle das Product der statischen Vorgänge von vorn herein normales Gefüge haben, und es kann keine Übergänge zwischen der entzündlichen porösen Bildung und der persistenten Bildung geben. Der Callus selbst bietet allerdings bei seinem Entstehen ein anderes Aussehen dar, als wenn er dem Untergange nahe ist; aber sein späteres Schicksal ist doch kein zwiefaches. Es wandelt sich keineswegs ein Theil des Callus in statisch brauchbares Knochengewebe um; vielmehr verfällt der ganze Callus der Resorption. Damit ist es natürlich nicht ausgeschlossen, dass die aus dem Zerfall des Callus hervorgehenden Molecüle zur Bildung des statisch brauchbaren Knochengewebes mit verwendet werden können; indess entzieht sich die Art und Ausdehnung dieser Verwendung bis jetzt unserer Controle.

Digitized by Google

Die Frage von der Wiederherstellung möglichst normaler Formen des gebrochenen Knochens.

Bekanntlich stellt sich bei Fracturen der Diaphysen der langen Röhrenknochen mit sehr geringer Dislocation die an der Bruchstelle ursprünglich durch den »Markcallus« ausgefüllte Markhöhle später, wenn auch niemals ganz vollkommen, so doch ziemlich gut wieder her.

Aus diesem Umstande und aus der Beobachtung, dass natürlich bei der Resorption des anfänglich sehr difformen Callus eine Abglättung der an der Oberfläche der Bruchstelle vorhanden gewesenen Kanten, Zacken und Vorsprünge stattfindet, hat man bisher immer den Schluss gezogen, dass die Natur das Streben habe, so viel als möglich zur ursprünglichen normalen Form des Knochens zurückzukehren. Namentlich sollte unter allen Umständen, auch bei den stärksten Dislocationen, die Markhöhle an der Bruchstelle sich wieder herstellen.

Schon im Jahre 1872 habe ich nachweisen können, dass bei Fracturen, die mit starker Dislocation heilen, die Markhöhle an der Bruchstelle im Gegentheil in der Regel das ganze spätere Leben hindurch von einer »wohlmotivirten« und unentbehrlichen *Spongiosa* ausgefüllt bleibt.

Die Markhöhle stellt sich also keineswegs unter allen Umständen wieder her. Ob sie sich wiederherstellt oder nicht, das hängt von den statischen Verhältnissen ab, die in Folge der Veränderung der Knochenform eingetreten sind.

Während ja unter normalen Verhältnissen die für die Diaphyse construirten Spannungstrajectorien der graphischen Statik in die Rinde des Knochens fallen, und die Markhöhle frei lassen, fallen sie bei Krümmungen der Diaphyse in die Mitte des Knochens zwischen der peripherischen Rinde, also mitten in die Markhöhle hinein. Es ergiebt sich hieraus, dass jede Dislocation bei einer Fractur vielmehr das Streben der Natur bedingen muss, die Markhöhle an der Bruchstelle mit einer neuen *Spongiosa* ganz oder theilweise auszufüllen, also zu Verhältnissen zu gelangen, die, weil sie nicht mehr der ursprünglichen Statik entsprechen, auch von der ursprünglichen Form durchaus abweichen müssen.

Werden wir ja doch weiter unten bei Betrachtung der rachitischen Präparate sehen, dass auch hier die Stelle der stärksten Krümmung das ganze Leben hindurch von einer neuen, durch die veränderten statischen Verhältnisse erforderlich gewordenen *Spongiosa* ausgefüllt bleibt. Die persistente Ausfüllung mit »wohlmotivirter« *Spongiosa* zeigt sich also nicht bloss an Markhöhlenstellen, die früher

Digitized by Google

durch *Callus* ausgefüllt waren, sondern sie findet sich auch, wenn es die statischen Gesetze verlangen, an ursprünglich vollkommen leeren Markhöhlenstellen.

Noch aus vielen anderen grösstentheils bereits oben angeführten Umständen lässt es sich beweisen, dass die Natur nicht zu den ursprünglichen Knochenformen zurückzukehren strebt.

Wir zeigten, dass mitten in der früheren *Spongiosa* sehr häufig neue Markhöhlen entstehen, sobald die veränderten statischen Verhältnisse das Vorhandensein von Knochensubstanz an der betreffenden Stelle überflüssig gemacht haben.

Wir sahen ferner, dass die Markhöhle an der Epiphysengrenze häufig eine excentrische Lage erhält.

Endlich konnten wir nachweisen, dass sich häufig aussen am Knochen unter grösster Abweichung von der normalen Form neue Stützpfeiler und statische Brücken entwickeln.

Es stellt sich also in der That nicht die ursprüngliche Form, sondern nur die Function wieder her und eine ausschliesslich durch die Function bestimmte Form, mag diese neue Form von der ursprünglichen normalen so verschieden sein, wie sie wolle.

II. Die Rachitis.

An rachitischen Knochen machen sich die durch die veränderte Form und Belastung hervorgerufenen Transformationen durch zwei sehr auffällige Erscheinungen bemerklich, einmal durch die Verengung oder Verschliessung der Markhöhle an Krümmungsstellen des Mittelstücks der Diaphysen, und zweitens durch die Bildung alternirend compacter und spongiöser Lagen der *Corticalis* an Krümmungsstellen der Knochenenden.

Die Verengung der Markhöhle an Krümmungsstellen des Mittelstücks der Diaphysen.

Du Verney war der erste, welcher beobachtete, dass die Markhöhle rachitischer Knochen an der Krümmungsstelle mehr oder weniger vollkommen sich mit Knochensubstanz ausfüllt, und Rufz zeigte zuerst, dass die Markhöhle in denjenigen Fällen, in welchen sie nicht vollständig ausgefüllt ist, auf ein geringes, zuweilen fast

Digitized by Google

fadenförmiges Lumen reducirt wird, welches stets an der convexen Seite der Krümmung gelegen ist.

Virchow, der diesen Fund bestätigte, wies Guérin's Erklärungsversuch für die Verengung der Markhöhle, nach welchem durch Auseinanderdrängen der Lamellen der compacten Substanz die letzteren in den Markcanal hineingedrängt werden sollten, zurück. Auch liess er die Erklärung du Verney's, welcher die Analogie mit einer Federpose herbeizog, deren innere Wand sich der äusseren nähert, wenn man sie biegt, nur zum Theil gelten. Virchow selbst wies bekanntlich nach, dass in vielen Fällen von Rachitis der Röhrenknochen eine Infraction der an der concaven Seite gelegenen Knochenwand bei unverletztem Periost eintrete, und dass in solchen Fällen, wenn sie frisch zur Untersuchung gelangen, die Ausfüllung der Markhöhle an der concaven Seite durch Callus bedingt sei.

Es blieb indess nach Virchow's Darstellung bis jetzt noch zweifelhaft, ob die Verengung und Verschliessung der Markhöhle eine vorübergehende sei, oder ob sie auch noch nach Ablauf des rachitischen Processes resp. der Callusproduction an der Krümmungsstelle das ganze spätere Leben hindurch bestehen bleibe.

Meine Untersuchungen haben nun ergeben, dass die Ausfüllung der Markhöhle an der Krümmungsstelle rachitischer Knochen nur dann eine vorübergehende Bildung ist, wenn die rachitischen Knochen sich wieder gerade strecken, dass dagegen, wenn die Krümmung das ganze spätere Leben hindurch bestehen bleibt, auch die Ausfüllungsmasse eine permanente ist.

Die Ausfüllung ist gar nicht direct durch die Rachitis oder durch die vorhanden gewesenen Infractionen oder Fracturen bedingt, sondern nur indirect durch die in Folge der Rachitis resp. der rachitischen Infractionen eingetretene Veränderung der Form des Knochens resp. seiner Belastung. Es handelt sich also bei der Ausfüllungsmasse um ganz dieselbe statische Bildung, welche wir oben bei den gewöhnlichen Fracturen und bei Ankylosen kennen gelernt haben, und welche wir ebenso bei allen angeborenen und erworbenen Deformitäten wiederfinden.

Demgemäss zeigt denn auch die Ausfüllungsmasse eine ganz bestimmte, in jedem Falle wiederkehrende Architektur.

Auf Schnitten, die von der concaven Seite gegen die convexe hin durch den Knochen geführt werden, findet sich gewöhnlich, unmittelbar an der Innenwand der concaven Seite beginnend, und mehr oder weniger vollkommen bis zur convexen Seite hinüberreichend, eine Reihe von Längsbalken, die in ihrer Mitte, also im Centrum der Krümmungsstelle, parallel mit einander und mit den Knochen-

Digitized by Google

wänden verlaufen. An ihren Endpunkten, also gegen die Stelle hin, wo die Markhöhle wieder frei wird, convergiren die Längsbälkchen, und zwar immer gegen die concave Wand hin. Die Markhöhle erhält auf diese Weise, sowohl nach oben, als nach unten von der Ausfüllungsmasse, eine dreieckige Begrenzung.

Senkrecht zu den Längsbälkchen stehen querverlaufende Bälkchen und stärkere Stützpfeiler, welche von der concaven Wand mitten durch die Markhöhle zur convexen hinüberlaufen, und welche die convexe Wand bei gleichmässigem Krümmungsbogen rechtwinklig, bei ungleichmässigem aber an einigen Stellen, je nach der Lage des ideellen Centrums des Bogens, mehr oder weniger spitzwinklig treffen.

Während die Markhöhle durch diese Bälkchen eingeengt erscheint, ist der Knochen selber an der Krümmungsstelle, entsprechend der hier besonders starken Inanspruchnahme und grossen Gefährdung der Knochensubstanz meist erheblich dicker, als an den darüber und darunter gelegenen mit freier Markhöhle versehenen Diaphysenstellen. Du Verney's Vergleich mit der Federpose erweist sich also auch aus diesem Grunde als nicht zutreffend. Wenn der Vergleich richtig wäre, so müsste der Knochen in der Richtung von der concaven zur convexen Seite an der Krümmungsstelle einen kleineren Durchmesser haben, als an den höher und tiefer gelegenen Stellen.

Noch viel wichtiger und noch sicherer die statische Bedeutung der Ausfüllungsmasse beweisend ist der Befund der Architektur der letzteren auf Schnitten, die senkrecht zu den soeben beschriebenen stehen, die also mitten hindurch zwischen der convexen Zugwand und der concaven Druckwand gelegt worden sind, und die somit die »neutrale Faserschicht« der Krümmungsstelle der rachitischen Knochen darstellen. Genau so, wie auf den durch die neutrale Faserschicht des normalen coxalen Femurendes geführten Schnitten, zeigt sich, wie von vorn herein zu erwarten war, auch hier wieder ein neutraler Bälkchenverlauf, nämlich der Verlauf parallel und senkrecht zur gekrümmten Axe.

Die alternirenden Schichten der *Corticalis* an Krümmungsstellen der Knochenenden.

An der Diaphyse von Knochen mit florider Rachitis besteht die *Corticalis* gewöhnlich aus einer Reihe eng an einander liegender, in einander geschachtelter Knochenlagen, an welchen es sich viel besser als an normalen Knochen demonstriren lässt, dass die *Corticalis* nichts als eine zusammengedrängte *Spongiosa* ist. Es handelt sich hier um

Digitized by Google

diejenige Schichtung der *Corticalis*, welche Guérin und Kassowitz als Folge rachitischen Schwundes ansehen, während Virchow sie durch mangelhafte Ossification der vom Periost her apponirten Balkennetze erklärt hat.

Ausser dieser Ineinanderschachtelung der Knochenlagen der Diaphyse beobachtet man nun aber unter Umständen auch noch an der Rinde rachitischer Knochen weit aus einander gefaltete compacte Lagen, welche mit entsprechend dicken Lagen von theils feinen spongiösen Balkennetzen, theils Guérin'schem spongioidem Gewebe alterniren. Auch dieser Befund ist sehr treffend bereits von Virchow beschrieben worden.

Meine Präparate zeigen nun, dass es sich bei diesen weit aus einander gefalteten compacten Lagen der Knochenrinde ebenfalls lediglich um statische Bildungen handelt. Ich fand die weite Auseinanderfaltung immer nur an einer ganz bestimmten Stelle, und zwar an der concaven Seite der Krümmungsstelle solcher rachitischer Knochen, deren Hauptkrümmung nicht in der Mitte, sondern am Ende der Diaphyse, nahe der unteren Epiphysenlinie gelegen ist. Hier durchziehen die alternirenden compacten Lagen immer in genau derselben Weise die *Spongiosa* und die spongioiden Massen des Diaphysenendes.

Sie erscheinen in ihrer Gesammtheit als eine im Wesentlichen directe senkrechte Fortsetzung des Mittelstücks der *Corticalis* der concaven Seite nach unten, und ersetzen so das durch die Verkrümmung aus der senkrechten Richtung herausgekommene und dadurch für die Function unbrauchbar gewordene Endstück der *Corticalis* der concaven Seite. Zwischen den alternirenden Lagen compacter Substanz befinden sich die ebenfalls bereits von Virchow beschriebenen senkrecht zu ihnen stehenden Radien, und in dem dadurch erzeugten Maschenwerk liegen nahe der Epiphysenlinie durchweg spongioide Massen, weiter nach der Mitte hin dagegen meistens feinere spongiöse Bälkchen oder Mark, und nur seltener spongioides Gewebe.

Nachdem es durch die Untersuchungen der inneren Architektur rachitischer Knochen festgestellt worden ist, dass bei der Rachitis neben den bekannten pathologischen Veränderungen des Knochengewebes stets gleichzeitig rein physiologische statische Bildungen von Knochengewebe einhergehen, wird es eine wichtige und interessante Aufgabe der weiteren histiologischen Forschung sein, genauer festzustellen, in welcher Art und Weise die pathologische und physiologische Bildung sich in jedem Moment mit einander combiniren, und wie viel von dem, was man bisher als das Wesentliche der histiologischen Vor-

Digitized by Google

gänge bei der Rachitis dargestellt hat, zu den physiologischen, wie viel dagegen wirklich zu den pathologischen Bildungen gehört.

Es handelt sich hierbei für die Rachitis offenbar um viel complicirtere Verhältnisse, als für die Fracturen. Während bei den Fracturen die krankhafte Bildung bald wieder schwindet, und zwar in demselben Maasse, in welchem die statische Bildung und die Wiederherstellung der Function sich geltend machen, müssen bei der Rachitis mit ihrem sehr chronischen Verlauf pathologische und physiologische Bildung oft Jahre lang unmittelbar neben oder durch einander einherschreiten. Denn der rachitische Knochen functionirt, wenn auch in unvollkommener Weise, bereits wieder zu einer Zeit, in welcher der Krankheitsprocess noch lange nicht ganz abgelaufen ist. Zu dieser Zeit findet man in rachitischen Knochen gleichzeitig die oben beschriebenen festen statischen Knochenbälkchen, das Guérin'sche *Spongioid* und die bekannten weichen, ebenfalls schwammähnlichen periostalen Auflagerungen auf den Diaphysen.

III. Das Genu valgum.

Dass beim *Genu valgum* resp. *varum* sich Transformationen der inneren Architektur vollziehen müssen, die der Formveränderung namentlich der in der Regel vorzugsweise betroffenen *Tibia* entsprechen, kann nach den vorangegangenen Erörterungen von vorn herein nicht dem geringsten Zweifel unterliegen.

In der That ist die Annahme von Mikulicz, dass in keinem Falle von *Genu valgum* hochgradige und auffallende Veränderungen der inneren Architektur wahrzunehmen seien, irrthümlich, und sein Versuch einer Erklärung jenes vermeintlichen Umstandes war mithin unnöthig.

Entsprechend dem Grade der Krümmung des Knochens zeigt sich vielmehr eine mehr oder weniger hochgradige Transformation des gesammten Trajectoriensystems, dessen sämmtliche Bälkchen eine von derjenigen des normalen Trajectoriensystems verschiedene und in die deforme Gestalt des Knochens genau hineinpassende Richtung annehmen.

Dazu gesellt sich gewöhnlich eine Verdickung der spongiösen und compacten Substanz an der mehr belasteten lateralen Seite gegenüber einer Verdünnung derselben an der weniger belasteten medialen Seite.

Digitized by Google

Endlich findet sich die schon von Martini auch für das *Genu valgum* beschriebene, von Mikulicz dagegen irrthümlicher Weise bestrittene excentrische Lage der Markhöhle. An der lateralen Seite des oberen Tibiaendes reichen bei *Genu valgum* die spongiösen Balkennetze viel weiter herab, als an der medialen, und dadurch verschiebt sich die Markhöhle an der Spongiosagrenze erheblich nach der medialen Seite hin.

Ferner ist Mikulicz's Annahme, dass in der Regel eine rachitische oder der rachitischen ähnliche Erweichung am Diaphysenende des *Femur* oder der *Tibia* das *Genu valgum* veranlasse, und dass es sich dann um eine blosse schiefe Ansetzung der Diaphyse an die Epiphyse handle, keineswegs für die Mehrzahl der Fälle zutreffend. Meistens ist vielmehr weder das Diaphysenende der *Tibia*, noch sonst irgend ein Theil des *Femur* oder der *Tibia* erkrankt. Die Verbiegung betrifft dann gleichmässig die ganze *Tibia*, und es folgt daraus, dass die bekannten Veränderungen der statischen Verhältnisse, wie sie z. B. bei Bäckerlehrlingen obwalten, für sich allein im Stande sind, den an sich gesunden Knochen nach Ablauf eines längeren Zeitraums vollständig zu verbiegen. Haben wir ja doch bei den Fracturen gesehen, dass Veränderungen der statischen Verhältnisse selbst noch bei erwachsenen Personen den Knochen so umzuwandeln vermögen, als wäre er von Wachs!

Dagegen bestätigt das Verhalten der Architektur meiner Präparate von *Genu valgum* die volle Richtigkeit der Darstellung, welche Mikulicz in Bezug auf die für die Lehre vom *Genu valgum*, und zugleich auch für die Behandlung desselben allerwichtigste Frage gegeben hat. Es zeigt sich, dass in der That, der Mikulicz'schen Auffassung entsprechend, das Kniegelenk, zumal die Gelenkflächen und die Epiphysen, nicht wesentlich bei der Entstehung des *Genu valgum* betheiligt sind. Es handelt sich somit beim *Genu valgum* keineswegs um eine ungleiche Entwickelung der lateralen und medialen Condylen, und auch nicht um die Hueter'sche Vertiefung der Hemmungsfacette am *Condylus externus tibiae* resp. um die dadurch veranlasste Höhendifferenz der äusseren und inneren Gelenkfläche.

Man muss deshalb auch Mikulicz vollkommen beistimmen, wenn er gegen die Ogston'sche Operation des *Genu valgum* den Vorwurf erhebt, dass sie, abgesehen von der durch sie bedingten nicht unbedenklichen Störung der Mechanik des Kniegelenks, auch durchaus nicht den anatomischen Verhältnissen des *Genu valgum* entspricht.

Digitized by Google

IV. Das Knochenwachsthum.

Seit dem Jahre 1869 habe ich mich unablässig bemüht, den Nachweis zu liefern, dass die Verhältnisse der inneren Architektur der wachsenden Knochen in keiner Weise mit den Lehren der Flourens-schen Theorie in Einklang gebracht werden können. Als sich mir diese Überzeugung zuerst aufdrängte, da war es doch gerade einer der am allertiefsten in unseren damaligen Vorstellungen eingewurzelten Lehrsätze der Flourens'schen Theorie, nämlich die Lehre von der Passivität der festgewordenen *Tela ossea*, die ich nicht gänzlich aufzugeben wagte, und die mich zu der — inzwischen längst, und zwar schon 1877 von mir wieder verlassenen — irrthümlichen Annahme des ausschliesslich expansiven Wachsthums der Knochen veranlasste.

Damals galt die Meinung, dass »irgend welche beträchtlicheren gröberen oder auch nur moloculären Verschiebungen und Dislocationen an der festgewordenen *Tela ossea* unmöglich seien«. Das Knochengewebe wurde als »ein durch Verkreidung zu Grunde gegangenes Knorpelgewebe« bezeichnet, das an sich »nicht erkranken«, auf welches nur von aussen her krankhafte Vorgänge eindringen können.

Ich hatte nun geglaubt, dass einer solchen Vorstellung wohl allenfalls diejenige der allmählichen Expansion des Knochengewebes entgegengesetzt werden könne, hatte es aber nicht für denkbar gehalten, dass derselben vielmehr ihr directes Gegentheil an die Stelle gesetzt werden müsse, nämlich das Gesetz der beständigen Architekturumwälzungen der fertigen *Tela ossea* als nothwendiger Folge der durch gewisse Appositionen hervorgerufenen beständigen Formveränderungen der wachsenden Knochen.

Gegenwärtig ist die grosse Mehrzahl der Autoren in den entgegengesetzten Irrthum verfallen, wieder vollständig zur Flourens'schen Theorie zurückzukehren.

Die Flourens'sche Theorie ist indess in ihren meisten Punkten gänzlich oder theilweise unrichtig.

In grösserem Maassstabe neuerdings von mir vorgenommene Wiederholungen der Markirversuche, deren Resultate ich binnen Kurzem publiciren werde, haben den früher schon von mir und anderen Autoren gelieferten Nachweis der Existenz des expansiven Wachsthums an vielen Knochen weiter gefestigt. Auch für das Dickenwachsthum der Röhrenknochen lässt sich die Expansion entweder direct durch mechanische Versuche mittelst Stiften und Ringen, und durch die histiologische Untersuchung, oder indirect durch den Nachweis der Aplasie am Periost und der fehlenden Resorption an der Innenwand der Diaphyse beweisen.

Digitized by Google

Mehr aber, als durch irgend etwas anderes, wird die Flourens'sche Theorie widerlegt durch den Nachweis, dass die Annahme der Passivität der festgewordenen *Tela ossea* eine irrthümliche ist. Dieser Nachweis wird in erster Reihe geliefert durch das Transformationsgesetz.

Das Transformationsgesetz zeigt uns, dass nicht bloss bei wachsenden, sondern selbst noch bei ausgewachsenen Individuen jedes kleinste Knochentheilchen der *Spongiosa* und der in statischer Beziehung mit ihr völlig identischen *Corticalis* den statischen Verhältnissen unterthan ist. Dies Abhängigkeitsverhältniss ist ein so vollkommenes, dass man die Lage der kleinsten Theilchen und die Richtung jedes kleinsten Bälkchens der *Spongiosa* und *Corticalis* gleichsam als ein empfindliches Reagens auf die statischen Verhältnisse betrachten kann. Daraus aber geht hervor, dass die fertige *Tela ossea* nicht passiv ist, dass sie vielmehr keinem der übrigen Gewebe des Organismus an Activität nachsteht.

V. Die Regeneration der Gewebe.

Alle bisher von den verschiedenen Autoren geltend gemachten Anschauungen über die Regeneration der Gewebe höher organisirter Wesen gehen von derjenigen Auffassung aus, welche die betreffenden Autoren von dem Wesen der Fracturenheilung, als des vornehmsten Beispiels eines regenerativen Processes, gehabt haben.

Es spiegelt sich deshalb in allen bisherigen Vorstellungen über die Regeneration der Gewebe der Umstand wieder ab, dass man bei der Heilung der Knochenbrüche die Producte der entzündlichen von denen der statischen Vorgänge ihrem Wesen und ihrer Entstehungsursache nach nicht scharf von einander zu unterscheiden vermochte.

So hat denn in der That ein Theil der Autoren den gesammten Regenerationsprocess, mit Einschluss des bei demselben entstehenden persistenten statischen Products, als einen entzündlichen Vorgang, ein anderer Theil dagegen ebenfalls den gesammten Process, mit Einschluss des bei demselben entstehenden Entzündungsproducts, als eine Wiederholung der normalen Bildung betrachtet.

Die Vertreter der ersteren Anschauung schlossen sich an John Hunter an, der, der Fracturenheilung und der mit ihr in dieselbe Reihe gestellten Vernarbung der Weichtheilwunden *per primam intentionem* zu Liebe, eine »gesunde« Form der Entzündung gegenüber der »ungesunden« angenommen hatte, welche erstere »keine

Digitized by Google

Krankheit«, sondern »eine die Wiederherstellung bezweckende Action«, mithin »ein Heilmittel« sein sollte.

Sie stellten also eine »regenerirende Entzündung« auf, deren Producte nicht dem Untergange verfallen sein, sondern als bleibende, werthvolle Glieder in die Verbindung der übrigen Körperelemente eintreten sollten.

Die Vertreter der letzteren Anschauung dagegen betrachteten, im Anschluss an DU HAMEL, HALLER, LEBERT, FLOURENS u. A. die sogenannte Callusbildung als eine durch äussere Veranlassung gegebene modificirte Wiederholung der normalen Osteogenese, und glaubten demgemäss, dass der der Regeneration vorausgehende Defect eines Gewebes in irgend einer Weise die schlummernde histiogenetische Energie der Gewebe zur Entfaltung bringe. Dabei nahm ein Theil dieser Autoren an, dass der Defect irgend einen »mystischen Wachsthumsreiz« bedinge. Ein anderer Theil liess die klare Lehre VIRCHOW's, dass es »ohne Reiz keine organische Arbeit, keine Aufnahme von neuen Bildungsstoffen, keine Entwickelung« gebe, unbeachtet, und meinte, dass der Defect die Wachsthumswiderstände, welche unter physiologischen Verhältnissen ein Gewebstheil dem anderen setze, aufhebe oder vermindere, und dass dadurch die formative Zellthätigkeit von einer intact erhaltenen Matrix aus auf's Neue angefacht werde.

Diesen Anschauungen gegenüber lehrt das Transformationsgesetz, dass die Regeneration allerdings eine Wiederholung des normalen Vorganges ist, dass aber ihre Bedingungen mit denen der Entzündung selbst dann nichts gemein haben, wenn die Producte beider zufällig an einer und derselben Örtlichkeit zusammentreffen.

Das Transformationsgesetz lehrt ferner, dass unter physiologischen, wie unter pathologischen Verhältnissen nicht die histiogenetische Energie der Gewebe an sich formbildend ist. Wie vielmehr unter normalen Verhältnissen das Streben der Natur, die Function zu erhalten, den Fortbestand oder das neue Entstehen diensttauglicher Formen bedingt, so ist unter pathologischen Verhältnissen das Streben der Natur, die Function wiederherzustellen, das einzig Formbildende. Das zugleich bedingende und formgestaltende Princip aller Regenerationen ist also, wie ich bereits 1872 zu zeigen mich bemühte, ausschliesslich der von ROUX sogenannte »trophische Reiz der Function«, und die Regeneration ist nichts anderes, als die »functionelle Anpassung« an neue, durch gewisse pathologische Störungen bedingte Verhältnisse.

Digitized by Google

VI. Der Kampf der Theile im Organismus.

Die Darwin'sche Theorie hatte gezeigt, wie das Zweckmässige durch Auslese aus freien Variationen entsteht; sie hatte aber keine Erklärung für die functionelle Anpassung, d. i. für die directe Selbstgestaltung des Zweckmässigen innerhalb des Organismus unter normalen und selbst unter ganz neuen Verhältnissen gegeben.

Nachdem du Bois-Reymond darauf hingewiesen hatte, dass »die Fähigkeit der Organismen, durch Übung sich zu vervollkommnen, mit Rücksicht auf die natürliche Zuchtwahl noch nicht hinreichende Beachtung gefunden habe«, hat sich Wilhelm Roux die Aufgabe gestellt, eine Ausfüllung jener Lücke der Darwin'schen Theorie zu versuchen.

Roux's Deductionen schliessen sich zunächst an das von Lamarck aufgestellte Princip der Wirkung des Gebrauchs und Nichtgebrauchs an, alsdann an die Lehre Virchow's, dass jede Lebensthätigkeit einen Reiz voraussetzt, und dass unter diesen Reizen »Thätigsein und Willensimpulse die grössten Resultate ergeben«, ferner an du Bois-Reymond's Nachweis, dass »vermöge der Übung höhere Lebewesen Selbstvervollkommnungsmaschinen darstellen, ebenso wie wir die Gesammtheit der Lebewesen als eine Selbstvervollkommnungsmaschine erkannt haben«, endlich an das Gesetz der Transformation der inneren Architektur bei pathologischen Formveränderungen der Knochen.

Roux suchte zu zeigen, dass bei dem fortwährenden Vorkommen von kleinen Variationen in den Qualitäten der Theile des Organismus ein Kampf der neuen Qualitäten mit den alten um Nahrung und Raum stattfinden müsse, und dass in diesem Kampf immer bloss die in den vorhandenen Verhältnissen lebenskräftigsten Qualitäten siegen und schliesslich allein übrig bleiben müssen. Siegreich sind aber diejenigen Theile, welche durch den einwirkenden, die Function auslösenden Reiz zugleich am meisten in ihrer Assimilationsfähigkeit gekräftigt werden.

So wird die Anpassung der Individuen an die Specialverhältnisse jedes Individuums auf dem Wege der Begünstigung oder Benachtheiligung der diesen Verhältnissen entsprechenden oder nicht entsprechenden Theile der Individuen bewirkt.

Während also der Darwin'sche Kampf der Individuen, die »Individualauslese« für die Ausbildung und Erhaltung der Art auf Kosten der Individuen sorgt, bewirkt der Kampf der Theile im Organismus, die »Partialauslese«, die Ausbildung und Erhaltung der Individuen auf Kosten der Theile derselben.

Digitized by Google

Nach Roux's eigenen Deductionen kann durch den Nachweis des Vorhandenseins einer »functionellen Structur« der normalen Gewebe die Lehre vom Kampf der Theile im Organismus nur indirect bewiesen werden, während der directe, durch das Transformationsgesetz erbrachte Beweis, der der Entstehung solcher Structur unter functionell neuen Verhältnissen, bei Weitem überzeugender ist.

Erklärung der Abbildungen.

Fig. 1. Geheilter Schenkelhalsbruch (Frontalschnitt, vergl. S. 233).
Fig. 2. Hüftgelenkankylose (Frontalschnitt durch Femur und Becken, vergl. S. 235).

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

Digitized by Google

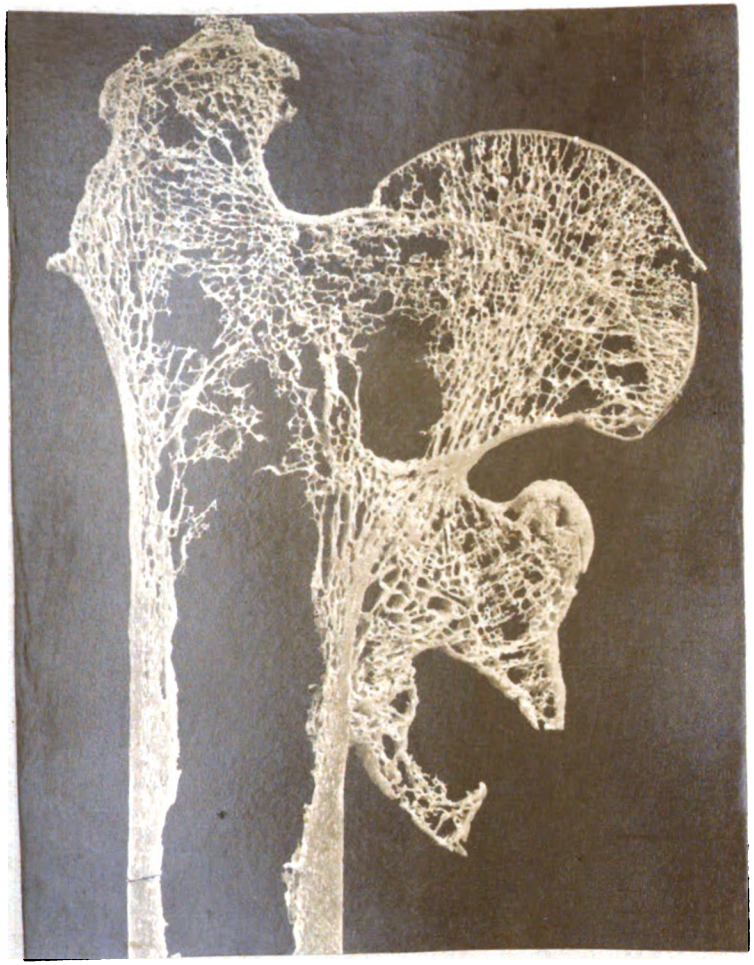


Fig. 1.

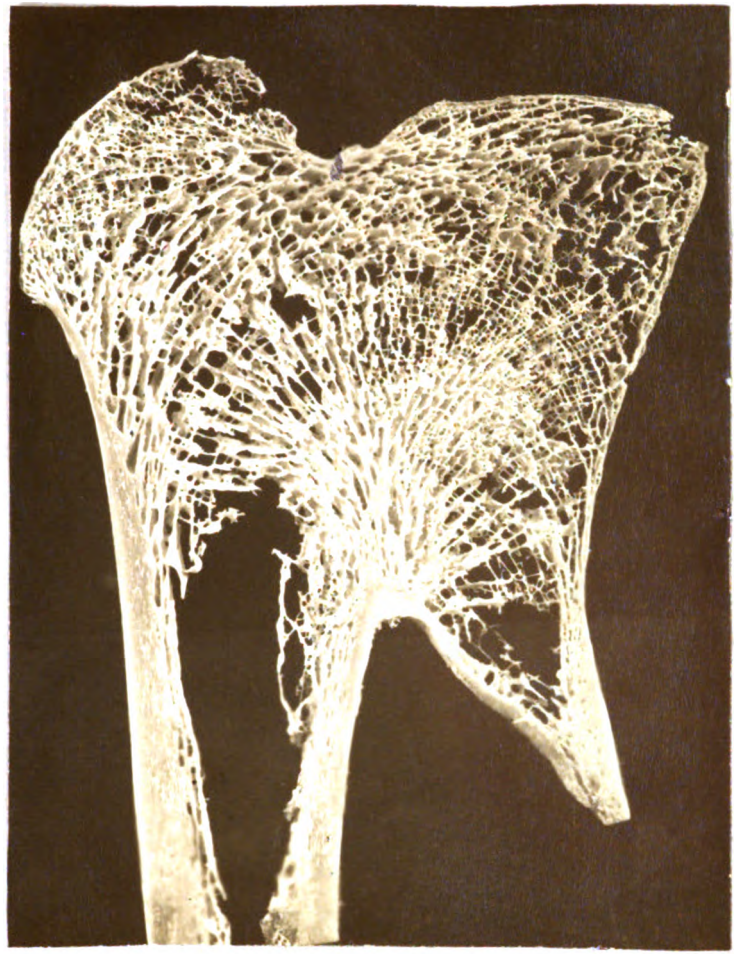


Fig. 2.

J. Kricheldorff phot.

Julius Wolff: Das Gesetz der Transformation der inneren Architektur der Knochen bei pathologischen Veränderungen der äusseren Knochenform.

Digitized by Google

Digitized by Google

19. Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste.

Von L. Kronecker.

(Vorgetragen am 7. Februar; — gedruckt im Bericht vom 1. Mai [St. XXIII]; — ausgegeben am 8. Mai.)

I.

Sind a und x irgend welche reelle Grössen, so hat das Product:

$$(a - x)\,(a - x + \tfrac{1}{2})$$

dann und nur dann einen negativen Werth, wenn x zwischen a und $a + \frac{1}{2}$ oder, was dasselbe ist, wenn a zwischen $x - \frac{1}{2}$ und x liegt. Setzt man für x irgend eine ganze Zahl k_0, so kann also jenes Product nur dann negativ sein, wenn $k_0 - 1$ die der Grösse a zunächst liegende kleinere ganze Zahl ist, und wenn nach deren Subtraction von a der Rest:

$$a - k_0 + 1$$

grösser als $\frac{1}{2}$ wird. Diese einfache Bemerkung führt zu einem analytisch brauchbaren Kriterium dafür, ob der bezeichnete Rest unter oder über $\frac{1}{2}$ liegt, d. h. also dafür, ob die der Grösse a nächste ganze Zahl kleiner oder grösser als a ist. Denn, da:

$$(a - k)\,(a - k + \tfrac{1}{2})$$

für alle von k_0 verschiedenen ganzen Zahlen k stets positiv ist, so hat offenbar das Product:

$$\prod_k (a - k)\,(a - k + \tfrac{1}{2}) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots r),$$

wenn nur r nicht kleiner als jene Zahl k_0 — falls sie existirt — also nicht kleiner als die der Grösse $a + \frac{1}{2}$ zunächst liegende kleinere ganze Zahl genommen wird, einen positiven oder negativen Werth, je nachdem die der Grösse a zunächst benachbarte ganze Zahl kleiner oder grösser als a ist.

Bezeichnet man in Gauss'scher Weise mit $[a]$ die der Grösse a zunächst liegende kleinere ganze Zahl und mit:

$$\operatorname{sgn}.\ a$$

Digitized by Google

das Vorzeichen von a, so sind diese Bezeichnungen offenbar durch die Relationen:

$$a - 1 < [a] \leqq a \quad , \quad \text{sgn.}\, a = \frac{a}{|a|} = \pm 1$$

definirt, wenn durch $|a|$ in WEIERSTRASS'scher Weise der absolute Werth von a dargestellt wird.[1] Setzt man ferner:

$$\mathrm{R}(a) = a - [a + \tfrac{1}{2}],$$

so ist $\mathrm{R}(a)$ der Rest, welcher verbleibt, wenn man von der Grösse a die ihr zunächst benachbarte ganze Zahl subtrahirt, und es ist daher:

$$\text{sgn.}\, \mathrm{R}(a) = +1 \text{ oder } -1,$$

je nachdem der stets positive Werth der Differenz $a - [a]$ unter oder über $\frac{1}{2}$ liegt. Nach Einführung dieser Bezeichnungen kann das obige Resultat durch die Gleichung:

$$(\mathfrak{A}) \qquad \text{sgn.}\, \mathrm{R}(a) = \text{sgn.} \prod_k (a-k)(a-k+\tfrac{1}{2}) \quad (k = 1, 2, 3, \ldots r;\ r \geqq [a+\tfrac{1}{2}])$$

dargestellt werden. Aus dieser Gleichung folgt nun unmittelbar, dass:

$$(\mathfrak{A}^{\circ}) \qquad \text{sgn.}\, \mathrm{R}(n\alpha) = \text{sgn.} \prod_k \left(\alpha - \frac{k}{n}\right)\left(\alpha - \frac{k}{n} + \frac{1}{2n}\right) \quad (k = 1, 2, 3, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1))$$

wird, wenn n eine positive ungerade Zahl und α einen positiven echten Bruch, der kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, bedeutet; denn unter diesen Voraussetzungen erfüllt der grösste Werth von k, bis zu welchem die Multiplication erstreckt wird, sicher die in der Gleichung $(\mathfrak{A})$ vorgeschriebene Bedingung:

$$r = \tfrac{1}{2}(n-1) \geqq [n\alpha + \tfrac{1}{2}],$$

da $\alpha < \frac{1}{2}$, also $n\alpha < \frac{1}{2}(n+1)$ ist. Setzt man endlich im zweiten Factor auf der rechten Seite der Gleichung $(\mathfrak{A}^{\circ})$:

$$\tfrac{1}{2}(n+1) - k \text{ an die Stelle von } k,$$

so wird die Bedingung: $k = 1, 2, 3, \ldots \frac{1}{2}(n-1)$ hierdurch nicht alterirt, und die Gleichung $(\mathfrak{A}^{\circ})$ geht in die für jede positive ungrade Zahl n geltende Gleichung:

$$(\bar{\mathfrak{A}}) \quad \text{sgn.}\, \mathrm{R}(n\alpha) = \text{sgn.} \prod_k \left(\alpha - \frac{k}{n}\right)\left(\alpha + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) \quad (0 < \alpha < \tfrac{1}{2};\ k = 1, 2, 3, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1))$$

---

[1] In meinen Universitätsvorlesungen über algebraische Gleichungen und in meinen beiden Aufsätzen im Monatsbericht vom Februar 1878 habe ich das Vorzeichen einer reellen Grösse a mit $[a]$ bezeichnet; um aber hier das Zeichen [ ] in derjenigen Bedeutung brauchen zu können, welche GAUSS demselben beigelegt hat, musste ich in diesem Aufsatze jene Bezeichnungsweise abändern.

Digitized by Google

über, welche den Satz ausdrückt,

dass das Vorzeichen des Restes, welcher verbleibt, wenn man von $n\alpha$ die ihr zunächst benachbarte ganze Zahl subtrahirt, mit demjenigen des Products:

$$\prod_k \left(\alpha - \frac{k}{n}\right)\left(\alpha + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) \qquad \left(k = 1, 2, 3, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

genau übereinstimmt.

Ist $\alpha < \frac{1}{4}$, also $\alpha < \frac{1}{2} - \alpha$ und liegen λ^0 Brüche $\frac{k}{n}$ unter α, liegen ferner μ^0 Brüche zwischen α und $\frac{1}{2} - \alpha$, und endlich ν^0 über $\frac{1}{2} - \alpha$, so ist die Anzahl der negativen Factoren $\alpha - \frac{k}{n}$ gleich $\mu^0 + \nu^0$ und die der negativen Factoren $\alpha + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}$ gleich $\lambda^0 + \mu^0$. Die Gesammtanzahl der negativen Factoren des Products ist daher $\lambda^0 + 2\mu^0 + \nu^0$. Ist aber $\alpha > \frac{1}{4}$, also $\alpha > \frac{1}{2} - \alpha$ und liegen λ' Brüche $\frac{k}{n}$ unter $\frac{1}{2} - \alpha$ und ν' Brüche $\frac{k}{n}$ über α, so ist die Gesammtanzahl der negativen Factoren des Products gleich $\lambda' + \nu'$. Da hiernach in beiden Fällen die Gesammtanzahl der negativen Factoren des Products mit dem Werthe von $\lambda + \nu$ *modulo* 2 übereinstimmt, welcher die Anzahl der ausserhalb des durch α und $\frac{1}{2} - \alpha$ begrenzten Intervalles liegenden Brüche ausdrückt, so kann der obige Satz auch folgendermaassen formulirt werden:

Ist sowohl α als auch $\frac{1}{2} - \alpha$ positiv, so ist die Anzahl der Brüche mit positivem ungraden Nenner n:

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots\ldots \frac{\frac{1}{2}(n-1)}{n},$$

welche ausserhalb des durch die Werthe von α und $\frac{1}{2} - \alpha$ begrenzten Intervalles liegen, grade oder ungrade, je nachdem die dem Werthe von $n\alpha$ zunächst liegende ganze Zahl kleiner oder grösser als $n\alpha$ ist.

Bedeutet m eine positive ungrade Zahl und h irgend eine der Zahlen:

$$1, 2, 3, \ldots\ldots \tfrac{1}{2}(m-1),$$

und setzt man $\alpha = \frac{h}{m}$, so wird gemäss der Gleichung ($\mathfrak{A}$):

$$(\mathfrak{B}) \quad \operatorname{sgn.R}\left(\frac{nh}{m}\right) = \operatorname{sgn.}\prod_k \left(\frac{h}{m} - \frac{k}{n}\right)\left(\frac{h}{m} + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) \quad \left(k = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1)\right).$$

Digitized by Google

Ist nun h' diejenige von den Zahlen:

$$1, 2, 3, \ldots\ldots \tfrac{1}{2}(m-1),$$

welche ihrem absoluten Werthe nach der Zahl nh *modulo* m congruent ist, so wird:

$$nh \equiv h' \operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{nh}{m}\right) \pmod{m}$$

und also:

$$(\mathfrak{S}) \qquad nh \equiv h' \operatorname{sgn.} \prod_{k=1}^{k=\frac{1}{2}(n-1)} \left(\frac{h}{m} - \frac{k}{n}\right)\left(\frac{h}{m} + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) \pmod{m}.$$

Auf diese Congruenz stützt sich der Beweis des Reciprocitätsgesetzes, welcher nunmehr gegeben werden soll. Um jedoch die Einfachheit dieses Beweises in das hellste Licht zu setzen, soll dabei die hier aus allgemeineren Betrachtungen hergeleitete Congruenz ($\mathfrak{S}$) nochmals, und zwar in ganz directer Weise, begründet werden.

II.

Unter den je $\frac{1}{2}(n-1)$ Grössen:

$$\frac{h}{m} - \frac{k^\circ}{n}, \quad \frac{h}{m} + \frac{k'}{n} - \frac{1}{2} \qquad (k^\circ, k' = 1, 2, \ldots\ldots \tfrac{1}{2}(n-1))$$

sind je zwei, für welche $k^\circ + k' = \frac{1}{2}(n+1)$ ist, von gleichem Vorzeichen, den einzigen Fall ausgenommen, in welchem eine Zahl k° die Ungleichheitsbedingung:

$$\frac{nh}{m} < k^\circ < \frac{nh}{m} + \frac{1}{2}$$

erfüllt. Dies findet aber nur Statt, wenn die dem Bruche $\frac{nh}{m}$ zunächst liegende ganze Zahl grösser als $\frac{nh}{m}$, und wenn also $nh \equiv -h' \pmod{m}$ ist. Das Product:

$$\prod_k \left(\frac{h}{m} - \frac{k}{n}\right)\left(\frac{h}{m} + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1))$$

ist daher positiv oder negativ, je nachdem der absolut kleinste Rest von $nh \pmod{m}$ positiv oder negativ ist, d. h. es besteht die Congruenz:

$$(\mathfrak{S}) \qquad nh \equiv h' \operatorname{sgn.} \prod_{k=1}^{k=\frac{1}{2}(n-1)} \left(\frac{h}{m} - \frac{k}{n}\right)\left(\frac{h}{m} + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) \pmod{m}$$

Digitized by Google

so wie die damit äquivalente Gleichung:

$$(\mathfrak{B}) \qquad \text{sgn. R}\left(\frac{nh}{m}\right) = \mp \text{sgn.} \prod_{k=1}^{k=\frac{1}{2}(n-1)} \left(\frac{h}{m} - \frac{k}{n}\right)\left(\frac{h}{m} + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right).$$

Setzt man in der Congruenz (𝔈) für h die Zahlen $1, 2, \ldots \frac{1}{2}(m-1)$ und multiplicirt die sämmtlichen daraus entstehenden Congruenzen mit einander, so kommt:

$$(\mathfrak{E}') \quad n^{\frac{1}{2}(m-1)} \prod_h h \equiv \prod_h h \cdot \text{sgn.} \prod_{h,k} \left(\frac{h}{m} - \frac{k}{n}\right)\left(\frac{h}{m} + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) \pmod{m},$$
$$\left(h = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(m-1);\ k = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

und hieraus folgt, wenn m eine Primzahl ist, die Gleichung:

$$(\mathfrak{D}) \qquad \left(\frac{n}{m}\right) = \text{sgn.} \prod_{h,k} \left(\frac{h}{m} - \frac{k}{n}\right)\left(\frac{h}{m} + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) \quad \left(\begin{matrix} h = 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(m-1) \\ k = 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(n-1) \end{matrix}\right),$$

in welcher das LEGENDRE'sche Zeichen $\left(\frac{n}{m}\right)$ so dargestellt ist, dass die Reciprocitätsgleichung:

$$(\mathfrak{E}) \qquad \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(m-1)(n-1)}$$

unmittelbar in Evidenz tritt, wenn auch n als Primzahl vorausgesetzt wird.

III.

Der vorstehende Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste ist wohl der einfachste unter allen, die bisher gegeben worden sind; er gehört in diejenige Kategorie, welche durch den dritten und fünften GAUSS'schen Beweis bezeichnet wird, und welche ich in meiner Mittheilung vom 22. Juni 1876 eingehend behandelt habe.[1] In ähnlicher Weise, wie hier durch die Gleichung (𝔇), habe ich auch dort das LEGENDRE'sche Zeichen durch das Vorzeichen eines Products dargestellt, und die dortige Bestimmungsweise[2] lässt sich bei Anwendung der hier eingeführten Bezeichnungen durch die Gleichung:

$$(\mathfrak{D}') \qquad \left(\frac{m}{n}\right) = \text{sgn.} \prod_{h,k} \left(\frac{h}{m} - \frac{k}{n}\right) \quad \left(\begin{matrix} h = 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(m-1) \\ k = 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(n-1) \end{matrix}\right),$$

ausdrücken. Bei beiden Arten der Darstellung des LEGENDRE'schen Zeichens, d. h. sowohl bei derjenigen, welche durch die Gleichung (𝔇)

[1] Monatsbericht vom Juni 1876, S. 331 u. flgde.
[2] Vergl. die mit (𝔅') bezeichnete Bestimmung a. a. O. S. 335.

Digitized by Google

als bei derjenigen, welche durch die Gleichung ($\mathfrak{D}'$) ausgedrückt wird, tritt die Geltung des Reciprocitätsgesetzes in Evidenz. An formaler Einfachheit wird offenbar die neue Bestimmung ($\mathfrak{D}$) durch die frühere ($\mathfrak{D}'$) übertroffen, aber diese steht jener in einer viel wichtigeren Beziehung nach, nämlich in Hinsicht der Einfachheit des Nachweises, dass wirklich durch die Zeichen auf der rechten Seite in ($\mathfrak{D}$) und ($\mathfrak{D}'$) die LEGENDRE'schen Zeichen dargestellt werden. Der erforderliche Nachweis ist dort im §. 2 durch eine allerdings kurze, aber immerhin etwas künstlich erscheinende Deduction geführt, dagegen hier im Art. II unmittelbar auf die Congruenz ($\mathfrak{E}$) gestützt worden, welche selbst in den Eingangssätzen des Art. II eine höchst einfache und natürliche Begründung erhalten hat.

Die Vergleichung von ($\mathfrak{D}$) und ($\mathfrak{D}'$) ergiebt die Relation:

$$\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right) = \operatorname{sign}. \prod_{h,k}\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\right) \quad \begin{pmatrix} h=1,2,\ldots\frac{1}{2}(m-1) \\ k=1,2,\ldots\frac{1}{2}(n-1)\end{pmatrix}$$

oder also, wegen ($\mathfrak{E}$):

$$(\mathfrak{F}) \qquad (-1)^{\frac{1}{4}(m-1)(n-1)} = \operatorname{sign}. \prod_{h,k}\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\right) \quad \begin{pmatrix} h=1,2,\ldots\frac{1}{2}(m-1) \\ k=1,2,\ldots\frac{1}{2}(n-1)\end{pmatrix}.$$

Diese Gleichung, welche die Verbindung der beiden Bestimmungsweisen des LEGENDRE'schen Zeichens (($\mathfrak{D}$) und ($\mathfrak{D}'$)) und also die Zurückführung der einen auf die andere enthält, soll nunmehr direct verificirt werden.

Da die grösste der Zahlen k, wofür — bei festem h — noch $\frac{h}{m}+\frac{k}{n}<\frac{1}{2}$ ist, durch:

$$\left[\frac{n}{2}-\frac{nh}{m}\right]$$

dargestellt wird, so ist die Gesammtzahl der negativen Factoren des Products auf der rechten Seite von ($\mathfrak{F}$):

$$\sum_h\left[\frac{n}{2}-\frac{nh}{m}\right] \qquad \left(h=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(m-1)\right).$$

Bedeutet nun g_h die dem Bruche $\frac{nh}{m}$ zunächst liegende ganze Zahl, so wird:

$$nh = mg_h \pm h',$$

wo auch h' eine der $\frac{1}{2}(m-1)$ Zahlen h ist, und:

$$\left[\frac{n}{2}-\frac{nh}{m}\right] = \tfrac{1}{2}(n-1)-g_h.$$

Es wird daher:

Digitized by Google

$$\sum_h \left[\frac{n}{2} - \frac{nh}{m}\right] = \tfrac{1}{4}(m-1)(n-1) - \sum_h g_h \quad (h = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(m-1)),$$

und da vermöge der Gleichung: $nh = mg_h \pm h'$ die Congruenz:

$$g_h \equiv h - h' \pmod 2$$

besteht, so folgt, dass $\sum_h g_h$ eine grade Zahl ist, und dass daher in der That die durch:

$$\sum_h \left[\frac{n}{2} - \frac{nh}{m}\right] \qquad (h = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(m-1))$$

ausgedrückte Gesammtzahl der negativen Factoren des Products auf der rechten Seite von (𝔉) dem Exponenten auf der linken Seite, nämlich der Zahl:

$$\tfrac{1}{4}(m-1)(n-1),$$

nach dem Modul 2 congruent ist.

IV.

Die im §. 3 meiner Mittheilung vom Juni 1876 gegebenen Entwickelungen vereinfachen sich sehr wesentlich, wenn man die Gleichung (𝔇) an Stelle der Gleichung (𝔇′) zum Ausgangspunkt nimmt. Definirt man nämlich für irgend zwei positive ungrade Zahlen m, n das Zeichen $\left(\frac{n}{m}\right)$ durch die Gleichung:

$$(\mathfrak{D}) \qquad \left(\frac{n}{m}\right) = \operatorname{sgn} \prod_{h,k} \left(\frac{h}{m} - \frac{k}{n}\right)\left(\frac{h}{m} + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) \quad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(m-1) \\ k = 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(n-1) \end{pmatrix},$$

so folgt aus der Gleichung (𝔅) des Art. II, dass auch:

$$(\mathfrak{D}^\circ) \qquad \left(\frac{n}{m}\right) = \operatorname{sgn} \prod_h \mathrm{R}\left(\frac{nh}{m}\right) \qquad (h = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(m-1))$$

ist, und aus der Gleichung (𝔇) selbst erhellt unmittelbar die Reciprocitätsgleichung:

$$(\mathfrak{E}) \qquad \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(m-1)(n-1)}.$$

Nun ist gemäss der Definition des Zeichens R:

$$(\mathfrak{G}) \quad \mathrm{R}\left(\frac{nh}{m}\right) = \varepsilon \mathrm{R}\left(\frac{n^\circ h}{m}\right), \text{ wenn } n \equiv \varepsilon n^\circ \pmod m \text{ und } \varepsilon = \pm 1 \text{ ist},$$

$$(\mathfrak{H}) \quad \operatorname{sgn} \mathrm{R}\left(\frac{nh}{m}\right) \cdot \operatorname{sgn} \mathrm{R}\left(\frac{n'h'}{m}\right) = \operatorname{sgn} \mathrm{R}\left(\frac{nn'h}{m}\right), \text{ wenn } nh \equiv \pm h' \pmod m \text{ ist};$$

Digitized by Google

denn aus den Gleichungen:

$$R\left(\frac{nh}{m}\right) = \frac{h'}{m} \operatorname{sgn}. R\left(\frac{nh}{m}\right), \quad R\left(\frac{n'h'}{m}\right) = \frac{h''}{m} \operatorname{sgn}. R\left(\frac{n'h'}{m}\right)$$

$$R\left(\frac{nn'h}{m}\right) = \frac{h'''}{m} \operatorname{sgn}. R\left(\frac{nn'h}{m}\right)$$

folgt sowohl, dass die Gleichung (ℌ) bestehen, als auch dass $h'' = h'''$ sein muss. Aus den Gleichungen (𝔊) und (ℌ) aber resultiren für das Zeichen $\left(\frac{n}{m}\right)$ die Fundamentalrelationen:

$$(\beta) \quad \left(\frac{n}{m}\right) = \left(\frac{n^\circ}{m}\right), \text{ wenn } n \equiv n^\circ \pmod{m} \text{ ist,}$$

$$(\beta') \quad \left(\frac{n}{m}\right) = \left(\frac{n^\circ}{m}\right)(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}, \text{ wenn } n \equiv -n^\circ \pmod{m} \text{ ist,}$$

$$(\gamma) \quad \left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{n'}{m}\right) = \left(\frac{nn'}{m}\right),$$

und aus dieser letzteren Gleichung ergiebt sich mit Hülfe der Reciprocitätsgleichung (𝔈) die fernere Relation:

$$(\gamma') \quad \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n'}\right) = \left(\frac{m}{nn'}\right),$$

welche zeigt, dass das durch die Gleichung (𝔇) definirte Zeichen $\left(\frac{n}{m}\right)$ nicht verschieden von dem Legendre-Jacobi'schen sein kann, sobald für Primzahlen m:

$$\left(\frac{n}{m}\right) = +1 \text{ oder } -1$$

wird, je nachdem n quadratischer Rest oder Nichtrest von m ist.

Die Fundamentalrelationen (β), (β'), (γ), (γ') stimmen mit denjenigen überein, welche in meiner Mittheilung im Monatsbericht vom Juni 1876 (S. 337 und 338) mit (β), (β'), (γ), (γ') bezeichnet worden sind, und es kann daher von hier ab der Nachweis, dass das durch die Gleichung (𝔇) definirte Zeichen mit dem Legendre-Jacobi'schen identisch ist, genau so wie dort zu Ende geführt werden, und zwar ohne von dem Gauss'schen Lemma Gebrauch zu machen oder überhaupt über die engere Sphäre der quadratischen Reste, in welcher sich der erste Gauss'sche Beweis des Reciprocitätsgesetzes hält, hinauszugehen.[1] Gestattet man sich aber die in der That über diese Sphäre hinausgreifende Benutzung des Satzes, dass für eine Primzahl m:

$$n^{\frac{1}{2}(m-1)} \equiv +1 \text{ oder } -1 \pmod{m}$$

[1] Vergl. die Ausführungen am Schlusse meines Aufsatzes im Monatsbericht vom Juni 1876, S. 340 und 341.

Digitized by Google

wird, je nachdem n quadratischer Rest oder Nichtrest von m ist, so geht schon aus der Congruenz ($\mathfrak{C}'$) im Art. II hervor, dass das Vorzeichen des Products:

$$\prod_{h,k}\left(\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right)\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\right) \quad \begin{pmatrix} h=1,2,\ldots\frac{1}{2}(m-1) \\ k=1,2,\ldots\frac{1}{2}(n-1)\end{pmatrix}$$

für den Fall, dass m Primzahl ist, mit dem LEGENDRE'schen Zeichen $\left(\frac{n}{m}\right)$ übereinstimmt, und es ist hiermit, da nur dieser Punkt noch zu erledigen war, der obige Nachweis der allgemeinen Übereinstimmung des Zeichens jenes Products mit dem LEGENDRE-JACOBI'schen Zeichen $\left(\frac{n}{m}\right)$ vervollständigt.

Der Nachweis, dass das Zeichen $\left(\frac{n}{m}\right)$ in der Gleichung ($\mathfrak{D}$) mit dem LEGENDRE-JACOBI'schen Zeichen übereinstimmt, enthält zugleich denselben Nachweis für das Zeichen $\left(\frac{n}{m}\right)$ in der Gleichung ($\mathfrak{D}^0$), d. h. also den Nachweis dafür, dass das Zeichen des Products:

$$\prod_{h} \mathrm{R}\left(\frac{nh}{m}\right) \qquad \left(h=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(m-1)\right),$$

wenn m und n keinen gemeinsamen Theiler haben, mit dem LEGENDRE-JACOBI'schen Zeichen $\left(\frac{n}{m}\right)$ identisch ist. Dies kann aber auch direct in einfacher Weise gezeigt werden. Denkt man sich nämlich alle Brüche $\frac{h}{m}$ auf ihre reducirte Form $\frac{r}{d}$ gebracht, so zerfällt das obige Product in so viel Theilproducte:

$$\prod_{r} \mathrm{R}\left(\frac{nr}{d}\right)$$

als Divisoren (d) von m vorhanden sind. Jedes dieser Producte erstreckt sich auf alle Zahlen r, die kleiner als $\frac{1}{2}d$ und relativ prim zu d sind, und vermöge der Congruenz:

$$nr \equiv r' \operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{nr}{d}\right) \pmod{d},$$

durch welche nach Art. I das Zeichen $\operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{nr}{d}\right)$ definirt ist, wird:

$$\operatorname{sgn.} \prod_{r} \mathrm{R}\left(\frac{nr}{d}\right) \equiv n^{\frac{1}{2}\varphi(d)} \pmod{d},$$

Digitized by Google

wenn $\phi(d)$ in üblicher Weise die Anzahl der Zahlen bedeutet, die kleiner als d und relativ prim zu d sind. Da nun die Congruenz:

$$n^{\frac{1}{2}\phi(d)} \equiv 1 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{n}{p}\right) \pmod{d}$$

besteht, je nachdem d mehrere verschiedene Primzahlen enthält oder die Potenz einer einzigen Primzahl p ist, so wird:

$$\operatorname{sgn.} \prod_h \mathrm{R}\left(\frac{nh}{m}\right) = \prod_p \left(\frac{n}{p}\right) \qquad \left(h = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(m-1)\right),$$

wo das Product rechts auf alle in m enthaltenen (gleichen oder verschiedenen) Primzahlen zu erstrecken und unter $\left(\frac{n}{p}\right)$ das LEGENDRE'sche Zeichen zu verstehen ist. Bekanntlich wird aber bei der JACOBI'schen Verallgemeinerung des LEGENDRE'schen Zeichens durch eben dieses Product:

$$\prod_p \left(\frac{n}{p}\right)$$

das Zeichen $\left(\frac{n}{m}\right)$ für den Fall einer beliebigen positiven ungraden Zahl m definirt, und es hat also in der Gleichung:

$$(\mathfrak{D}^0) \qquad \left(\frac{n}{m}\right) = \operatorname{sgn.} \prod_h \mathrm{R}\left(\frac{nh}{m}\right) \qquad (h = 1, 2, \ldots (m-1))$$

das Zeichen auf der linken Seite für eine beliebige positive ungrade Zahl m in der That genau die Bedeutung, welche ihm JACOBI beigelegt hat.

Auf diesem directen Wege ist Hr. E. SCHERING, wie ich aus seiner Abhandlung im I. Bande der Acta Mathematica entnehme, zu dem durch die Gleichung $(\mathfrak{D}^0)$ ausgedrückten Satze gelangt, welchen er im Juni 1876 der Akademie mitgetheilt hat.[1] Ich selber war dazu schon im Verlaufe der an der hiesigen Universität im Wintersemester 1869/70 gehaltenen Vorträge durch die einfache Bemerkung geführt worden,[2] dass das Product:

$$\prod_h \frac{\sin\frac{2nh\pi}{m}}{\sin\frac{2h\pi}{m}} \qquad \left(h = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(m-1)\right),$$

[1] Monatsbericht vom Juni 1876, S. 330.
[2] » » » » S. 331.

Digitized by Google

durch welches EISENSTEIN für den Fall einer Primzahl m das LEGENDRE'sche Zeichen $\left(\frac{n}{m}\right)$ dargestellt hat, auch für zusammengesetzte Zahlen m nur einen der Werthe $-1, 0, +1$ haben kann. Es lag also nahe, die Bedingungen zu untersuchen, unter welchen einer oder der andere Werth eintritt, und ich fand dabei, dass jenes EISENSTEIN'sche Product stets das durch JACOBI verallgemeinerte LEGENDRE'sche Zeichen $\left(\frac{n}{m}\right)$ darstellt, vorausgesetzt, dass man dessen Bedeutung noch dahin erweitert, dass es gleich *Null* wird, sobald m und n einen gemeinsamen Theiler haben. Die dabei erforderlichen Entwickelungen habe ich genau so, wie ich sie im Monatsbericht vom Juni 1876 mitgetheilt habe, schon in meinen Universitätsvorträgen im Winter 1869/70 und seitdem regelmässig in den Vorlesungen gegeben, welche ich alle zwei Jahre an der hiesigen Universität über die Anwendungen der Analysis auf Zahlentheorie gehalten habe. Den Vorlesungen im Winter 1875/76 haben unter Anderen die HH. HETTNER und KNOBLAUCH beigewohnt, und der erstere hat sich damals die Mühe genommen, eine genaue und vollständige Ausarbeitung der Vorlesungen anzufertigen. Diese Ausarbeitung enthält jene erwähnten, im Monatsbericht vom Juni 1876 abgedruckten Entwickelungen in aller Ausführlichkeit und zeigt also, dass ich sie schon im voraufgegangenen Winter dem Kreise meiner Zuhörer bekannt gegeben hatte.

V.

Jene neue und, wie mir scheint, bemerkenswerthe Bestimmungsweise des Vorzeichens sgn. $R(n\alpha)$, welche durch die Gleichung $(\mathfrak{A})$ im Art. I ausgedrückt ist, und welche das eigentliche Fundament des Reciprocitätsgesetz-Beweises im Art. II bildet, habe ich ursprünglich nicht auf dem im Art. I angegebenen arithmetischen Wege erlangt. Ich bin vielmehr durch die Bemerkung darauf geführt worden, dass offenbar:

$$\text{sgn. } R(n\alpha) = \text{sgn. tg } n\alpha\pi$$

ist, da $R(n\alpha)$ den in dem Intervalle zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ liegenden Rest bedeutet, welcher verbleibt, wenn man von der Grösse $n\alpha$ die ihr zunächst benachbarte ganze Zahl subtrahirt. Indem ich nun in dieser Gleichung an Stelle von $\text{tg } n\alpha\pi$ das damit identische Product:

$$\prod_k \text{tg}\left(\alpha - \frac{k}{n}\right)\pi \cot\left(\alpha + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right)\pi \qquad \left(k = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1)\right),$$

Digitized by Google

setzte und dann in Betracht zog, dass unter der Voraussetzung: $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ die Argumente:

$$\left(\alpha - \frac{k}{n}\right)\pi \ , \quad \left(\alpha + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right)\pi \qquad \left(k = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

sämmtlich zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegen, und dass also die Vorzeichen der einzelnen Factoren:

$$\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{k}{n}\right)\pi \ , \quad \cot\left(\alpha + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right)\pi \qquad \left(k = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

mit denen der Argumente selbst übereinstimmen müssen, ergab sich mir unmittelbar die Gleichung ($\mathfrak{A}$) des Art. I:

$$\operatorname{sgn.} \mathrm{R}(n\alpha) = \operatorname{sgn.} \prod_k \left(\alpha - \frac{k}{n}\right)\left(\alpha + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) \quad \left(0 < \alpha < \tfrac{1}{2};\ k = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1)\right).$$

Ich suchte diese Gleichung nun in rein arithmetischer Weise zu begründen und fand dabei jene einfache Herleitung, welche ich im Art. I mitgetheilt habe.[1]

VI.

Aus dem Reciprocitätsgesetze ergeben sich bekanntlich Methoden zur Bestimmung des Legendre-Jacobi'schen Zeichens, und ich pflege in meinen Universitätsvorlesungen mehrere solche Methoden auseinanderzusetzen. Eine derselben habe ich am Schlusse meines im Monatsbericht vom Juli 1880 abgedruckten Aufsatzes kurz angedeutet, und eine andere, besonders elegante Bestimmungsweise des Legendre-Jacobi'schen Zeichens will ich hier am Schlusse der vorliegenden Mittheilung ganz so wie in meinen im Winter 1875/76 gehaltenen Vorlesungen, genau nach der schon oben erwähnten Ausarbeitung des Hrn. Prof. Hettner, ausführlich und vollständig entwickeln.

Sind m und n positive oder negative ungrade Zahlen und ist δ das Vorzeichen von m und ε dasjenige von n, so gilt die allgemeine Reciprocitätsformel:[2]

$$(\mathfrak{E}) \qquad \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(m-1)(n-1) - \frac{1}{4}(\delta-1)(\varepsilon-1)},$$

welche aus der specielleren, im Art. II bewiesenen Reciprocitäts-

[1] Vergl. auch die Deduction im Art. II für $\alpha = \frac{h}{m}$.

[2] Vergl. die Formel (B) meines Aufsatzes im Monatsbericht vom Juni 1876, S. 333.

Digitized by Google

gleichung (𝔈) leicht herzuleiten ist. Geht man nun von zwei (positiven oder negativen) ungraden Zahlen n_0, n_1 für welche:

$$|n_0| > |n_1|$$

ist, aus und bildet daraus eine Reihe von Zahlen:

$$n_0, n_1, n_2, n_3, \ldots . n_t$$

derart, dass:

$$(\mathfrak{R}) \quad n_2 = -2n_1 \mathrm{R}\left(\frac{n_0}{2n_1}\right), n_3 = -2n_2 \mathrm{R}\left(\frac{n_1}{2n_2}\right), \ldots . n_t = -2n_{t-1} \mathrm{R}\left(\frac{n_{t-2}}{2n_{t-1}}\right)$$

wird, so ist dies eine Reihe von lauter ungraden, positiven oder negativen, ihrem absoluten Werthe nach abnehmenden Zahlen, und es besteht zwischen ihnen eine Reihe von Gleichungen:

$$(\mathfrak{Q}) \quad n_0 - 2r_1 n_1 + n_2 = 0, n_1 - 2r_2 n_2 + n_3 = 0, \ldots . n_{t-2} - 2r_{t-1} n_{t-1} + n_t = 0,$$

in denen $r_1, r_2, \ldots . r_{t-1}$ positive oder negative ganze Zahlen sind. Bezeichnet man nämlich die dem Bruche $\frac{n_{k-1}}{2n_k}$ zunächst liegende positive oder negative ganze Zahl mit r_k, so ist der absolute Werth der Differenz $\frac{n_{k-1}}{2n_k} - r_k$ kleiner als $\frac{1}{2}$; es ist daher:

$$\frac{n_{k-1}}{2n_k} - r_k = \mathrm{R}\left(\frac{n_{k-1}}{2n_k}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots t-1)$$

und folglich gemäss den Gleichungen (𝔎):

$$\frac{n_{k-1}}{2n_k} - r_k = \frac{-n_{k+1}}{2n_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots t-1),$$

so dass in der That:

$$(\mathfrak{Q}) \qquad n_{k-1} - 2r_k n_k + n_{k+1} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots t-1)$$

wird. — Sind n_0 und n_1, wie von jetzt ab angenommen werden soll, zu einander relativ prim, so kann man die Reihe der Zahlen n so weit fortsetzen, dass $n_t = \pm 1$ wird.

Es seien nun η_k, ν_k, ρ_k diejenigen Werthe ± 1, wofür:

$$\eta_k n_k \equiv 1 \pmod 4, \quad \nu_k n_k > 0, \quad \rho_k r_k > 0$$

wird, so dass $\nu_k = \mathrm{sgn.}\, n_k$ und $\rho_k = \mathrm{sgn.}\, r_k$ ist, während η_k als der Werth von sgn. n_k *modulo* 4 definirt werden kann.[1] Bei Ein-

[1] Nennt man, ähnlich wie in der Theorie der complexen Zahlen, eine ungrade (positive oder negative) Zahl *primär*, wenn sie congruent 1 *modulo* 4 ist, so kann η_k als diejenige (positive oder negative) Einheit definirt werden, wofür $\eta_k n_k$ primär ist oder wird.

Digitized by Google

führung dieser Bezeichnungen wird gemäss der obigen Reciprocitäts-formel (𝔈):

$$\left(\frac{n_{k-1}}{-n_k}\right)\left(\frac{-n_k}{n_{k-1}}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}\sigma_k},$$

wo: $$\sigma_k = (\eta_{k-1} - 1)(\eta_k + 1) - (\nu_{k-1} - 1)(\nu_k + 1)$$

ist; und hiernach wird:

$$(\mathfrak{M}) \qquad \prod_k \left(\frac{n_{k-1}}{-n_k}\right) \prod_k \left(\frac{-n_k}{n_{k-1}}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}\mathfrak{S}} \qquad (k=1,2,\ldots t),$$

wo:

$$(\mathfrak{M}') \qquad \mathfrak{S} = \sum_k \{(\eta_{k-1} - 1)(\eta_k + 1) - (\nu_{k-1} - 1)(\nu_k + 1)\} \qquad (k=1,2,\ldots t)$$

zu setzen ist. Aus den Gleichungen (𝔔) folgt aber, dass:

$$n_{k-1} \equiv -n_{k+1} \pmod{2n_k}$$

also:

$$\left(\frac{n_{k-1}}{-n_k}\right) = \left(\frac{-n_{k+1}}{n_k}\right)$$

und daher:

$$\prod_{k=1}^{k=t-1}\left(\frac{n_{k-1}}{-n_k}\right) = \prod_{k=1}^{k=t-1}\left(\frac{-n_{k+1}}{n_k}\right) = \prod_{k=2}^{k=t}\left(\frac{-n_k}{n_{k-1}}\right)$$

ist, und mit Hülfe dieser Relation verwandelt sich das erstere Product auf der linken Seite der Gleichung (𝔐) in:

$$\left(\frac{-n_1}{n_0}\right)\left(\frac{n_{t-1}}{n_t}\right)\prod_k\left(\frac{-n_k}{n_{k-1}}\right) \qquad (k=1,2,\ldots t);$$

diese Gleichung (𝔐) selbst geht also in folgende über:

$$\left(\frac{-n_1}{n_0}\right)\left(\frac{n_{t-1}}{n_t}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}\mathfrak{S}}.$$

Da nun $n_t = \pm 1$ und also $\left(\frac{n_{t-1}}{n_t}\right) = 1$ ist, so resultirt die Gleichung:

$$(\mathfrak{N}) \qquad \left(\frac{-n_1}{n_0}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}\mathfrak{S}},$$

durch welche die Bestimmung des Legendre-Jacobi'schen Zeichens auf die Bestimmung des Werthes von $\mathfrak{S}$ (mod. 8) zurückgeführt wird.

Um diesen Werth von $\mathfrak{S}$ zu bestimmen, braucht man nur die Summation auf der rechten Seite der Gleichung ($\mathfrak{M}'$) auszuführen. Dabei ergiebt sich, dass:

$$\mathfrak{S} = \eta_0 - \eta_t - \nu_0 + \nu_t + \sum_k (\eta_{k-1}\eta_k - \nu_{k-1}\nu_k) \qquad (k=1,2,\ldots t)$$

Digitized by Google

wird. Da aber $n_t = \pm 1$ und also gemäss der Definition von η_t, ν_t:

$$\eta_t = \nu_t$$

ist, so kommt:

$$(\mathfrak{P}) \qquad \mathfrak{S} = \sum_k (\eta_{k-1}\eta_k - \nu_{k-1}\nu_k) \qquad (k=0,1,2,\ldots t),$$

wenn in der Summe rechts

$$\eta_{-1} = \nu_{-1} = +1$$

genommen wird.

Setzt man, da $n_k \equiv \eta_k \pmod 4$ ist, $n_k = 4s_k + \eta_k$, so wird:

$$\eta_{k-1}\eta_k \equiv n_{k-1}n_k + 4(s_{k-1} - s_k) \pmod 8 \qquad (k=1,2,\ldots t);$$

wenn man hier über alle Werthe von k summirt und dann berücksichtigt, dass $s_t = 0$ und $4s_0 = n_0 - \eta_0$ ist, so kommt:

$$n_0 + \sum_k n_{k-1}n_k \equiv \eta_0 + \sum_k \eta_{k-1}\eta_k \pmod 8 \qquad (k=1,2,\ldots t),$$

oder:

$$\sum_k n_{k-1}n_k \equiv \sum_k \eta_{k-1}\eta_k \pmod 8 \qquad (k=0,1,2,\ldots t),$$

wenn $n_{-1} = 1$ genommen wird. An Stelle der Gleichung $(\mathfrak{P})$ kann daher auch die Congruenz:

$$(\mathfrak{Q}) \qquad \mathfrak{S} \equiv \sum_k (n_{k-1}n_k - \nu_{k-1}\nu_k) \pmod 8 \qquad (k=0,1,2,\ldots t),$$

zur Bestimmung des Exponenten $\mathfrak{S}$ in der Gleichung $(\mathfrak{R})$ benutzt werden.

Vermöge der Gleichungen $(\mathfrak{L})$ ist:

$$\nu_{k-1}n_{k-1} + \nu_{k-1}n_{k+1} = 2\nu_{k-1}r_k n_k \qquad (k=1,2,\ldots t-1),$$

und der Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung ist positiv, weil $|n_{k-1}| > |n_{k+1}|$ ist; es muss daher $\nu_{k-1}r_k n_k$ positiv und also:

$$\nu_{k-1}\operatorname{sgn} n_k \cdot \operatorname{sgn} r_k = 1, \text{ d. h. } \nu_{k-1}\nu_k = \rho_k \qquad (k=1,2,\ldots t-1)$$

sein. Hiernach kann die Congruenz $(\mathfrak{Q})$ in folgende transformirt werden:

$$(\mathfrak{R}^0) \qquad \mathfrak{S} \equiv n_0 - \nu_0 + \sum_{k=1}^{k=t-1}(n_{k-1}n_k - \rho_k) + n_{t-1}n_t - \nu_{t-1}\nu_t \pmod 8,$$

welche wiederum, da vermöge der Gleichungen $(\mathfrak{L})$:

$$n_k(n_{k-1} + n_{k+1}) = 2r_k n_k^2 \equiv 2r_k \pmod{16} \qquad (k=1,2,\ldots t-1)$$

und also:

$$2\sum_k n_{k-1}n_k \equiv n_0 n_1 - n_{t-1}n_t + 2\sum_k r_k \pmod{16} \qquad (k=1,2,\ldots t-1)$$

ist, in die Congruenz:

$$(\mathfrak{R}') \qquad \mathfrak{S} \equiv n_0 - \nu_0 + \tfrac{1}{2}(n_0 n_1 + n_{t-1}n_t) - \nu_{t-1}\nu_t + \sum_{k=1}^{k=t-1}(r_k - \rho_k) \pmod 8$$

verwandelt werden kann. Setzt man nunmehr:

Digitized by Google

$$r_t = n_{t-1} n_t, \quad \rho_t = \text{sgn.}\, r_t, \quad \text{also } \nu_{t-1} \nu_t = \rho_t,$$

so tritt zu den Gleichungen (𝔔) die Gleichung:

$$n_{t-1} - r_t n_t = 0$$

hinzu, und die Congruenz (ℜ′) erhält die Gestalt:

$$(\mathfrak{R}) \qquad \mathfrak{S} \equiv \tfrac{1}{2} n_0 + \tfrac{1}{2} r_0 - \rho_0 + \sum_{k=1}^{k=t-1} (r_k - \rho_k) + \tfrac{1}{2} r_t - \rho_t \pmod 8,$$

worin r_0, ρ_0 durch die Bedingungen:

$$r_0 n_0 \equiv 1 + n_1 \pmod{16}, \quad \text{sgn.}\, r_0 = \nu_0 = \rho_0$$

zu bestimmen sind.

Die hier abgeleiteten, mit (𝔓), (𝔒), (ℜ) bezeichneten Bestimmungsweisen des Exponenten von -1 in der Gleichung (ℜ) lassen sich in bemerkenswerther Weise interpretiren. Verwandelt man nämlich den Bruch $\frac{-n_1}{n_0}$ in einen Kettenbruch mit den Theilzählern -1 und mit möglichst viel **graden** Theilnennern, so dass:

$$\frac{-n_1}{n_0} = \cfrac{-1}{g_1 - \cfrac{1}{g_2 - \cfrac{1}{g_3 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{g_{t-1} - \cfrac{1}{g_t}}}}}}$$

wird, so sind $g_1, g_2, \ldots g_{t-1}$ **grade** Zahlen und nur der letzte Theilnenner g_t ist nothwendig ungrade. Es ist ferner:

$$(\mathfrak{Q}') \qquad n_0 - g_1 n_1 + n_2 = 0, \quad n_1 - g_2 n_2 + n_3 = 0, \ldots .$$
$$n_{t-2} - g_{t-1} n_{t-1} + n_t = 0, \quad n_{t-1} - g_t n_t = 0,$$

also:

$$g_1 = 2r_1, \; g_2 = 2r_2, \ldots . \; g_{t-1} = 2r_{t-1}, \; g_t = r_t.$$

Fügt man den Gleichungen (𝔔′) die Gleichung:

$$(\mathfrak{Q}_0') \qquad 1 - g_0 n_0 + n_1 = 0$$

hinzu, so ist:

$$g_0 \equiv r_0 \pmod{16}$$

und

Digitized by Google

$$\frac{-n_k}{n_{k-1}} = \cfrac{-1}{g_k - \cfrac{1}{g_{k+1} - \cfrac{-1}{\ddots \; - \cfrac{-1}{g_{t-1} - \cfrac{1}{g_t}}}}}$$

für alle Werthe: $k = 0, 1, 2, \ldots t$, da auch für $k = 0$:

$$\frac{-n_0}{n_{-1}} = -n_0 = \cfrac{-1}{g_0 - \cfrac{n_1}{n_0}}$$

wird. Es ist nun:

$$\operatorname{sgn}. \frac{-n_k}{n_{k-1}} = -\nu_{k-1}\nu_k \qquad (k=0,1,\ldots t),$$

während $-\eta_{k-1}\eta_k$ als der Zeichenwerth von $\frac{-n_k}{n_{k-1}}$ *modulo* 4 aufzufassen ist, so dass:

$$-\eta_{k-1}\eta_k \equiv \frac{-n_k}{n_{k-1}} \pmod 4 \qquad (k=0,1,\ldots t)$$

wird. Gemäss den Gleichungen ($\mathfrak{R}$) und ($\mathfrak{P}$) ist daher

das LEGENDRE-JACOBI*'sche Zeichen* $\left(\frac{-n_1}{n_0}\right)$ *positiv oder negativ, je nachdem die algebraische Summe der Vorzeichen der* $t+1$ *Kettenbrüche:*

$$\cfrac{-1}{g_k - \cfrac{1}{g_{k+1} - \cfrac{-1}{\ddots \; - \cfrac{-1}{g_t}}}} \qquad (k=0,1,2,\ldots t)$$

mit der algebraischen Summe ihrer modulo 4 genommenen Zeichenwerthe nach dem Modul 8 congruent oder incongruent ist;

und es folgt aus den citirten Gleichungen auch, dass die beiden erwähnten algebraischen Summen *nach dem Modul* 4 *stets* einander congruent sein müssen.

Die Gleichung ($\mathfrak{R}$) verwandelt sich bei Einführung der Zahlen g in:

$$(\bar{\mathfrak{R}}) \qquad \mathfrak{S} \equiv \tfrac{1}{2} n_0 + \tfrac{1}{2} \sum_k g_k - \sum_k \operatorname{sgn}. g_k \pmod 8 \qquad (k=0,1,2,\ldots t),$$

und es ergiebt sich daher, dass:

Digitized by Google

$$\tfrac{1}{2}n_0 + \sum_k{}'(\tfrac{1}{2}g_k - \operatorname{sgn}.g_k) \qquad (k=0,1,2,\ldots t)$$

stets eine durch 4 theilbare ganze Zahl sein muss, dass aber

$\left(\frac{-n_1}{n_0}\right)$ *dann und nur dann positiv ist, wenn die Zahl:*

$$\tfrac{1}{2}n_0 + \sum_k{}'(\tfrac{1}{2}g_k - \operatorname{sgn}.g_k) \qquad (k=0,1,2,\ldots t)$$

nicht bloss durch 4, sondern auch durch 8 theilbar ist.

Endlich lässt sich die Gleichung ($\mathfrak{P}$) noch in die Form setzen:

$$(\mathfrak{P}') \qquad \tfrac{1}{2}\mathfrak{S} = \sum_k{}' \frac{1-\nu_{k-1}\nu_k}{2} - \sum_k{}' \frac{1-\eta_{k-1}\eta_k}{2} \qquad (k=0,1,2,\ldots t)$$

oder

$$(\mathfrak{P}'') \qquad \tfrac{1}{2}\mathfrak{S} = \sum_k{}' \frac{1+\eta_{k-1}\eta_k}{2} - \sum_k{}' \frac{1+\nu_{k-1}\nu_k}{2} \qquad (k=0,1,2,\ldots t).$$

Da nun $\frac{1-\nu_{k-1}\nu_k}{2} = 0$ oder 1 und zugleich $\frac{1+\nu_{k-1}\nu_k}{2} = 1$ oder 0 wird, je nachdem bei dem Übergange von n_{k-1} zu n_k eine Zeichenfolge besteht oder ein Zeichenwechsel eintritt, so zeigt sich, dass der Werth des Legendre-Jacobi'schen Zeichens $\left(\frac{-n_1}{n_0}\right)$ durch die Anzahl der Folgen oder der Wechsel in den Zeichen der Reihe:

$$n_{-1}, n_0, n_1, n_2, \ldots . n_t \qquad (n_{-1}=1)$$

bestimmt werden kann. Ist nämlich:

ϕ die Anzahl der Folgen und ψ die Anzahl der Wechsel in der Reihe der Vorzeichen der Zahlen n, aber ϕ' die Anzahl der Folgen und ψ' die Anzahl der Wechsel in der Reihe der *modulo* 4 genommenen Zeichenwerthe der Zahlen n,

so folgt aus den Gleichungen ($\mathfrak{P}'$), ($\mathfrak{P}''$) die Relation:

$$(\overline{\mathfrak{P}}) \qquad \left(\frac{-n_1}{n_0}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(\phi-\phi')} = (-1)^{\frac{1}{2}(\psi-\psi')},$$

durch welche der Werth des Legendre-Jacobi'schen Zeichens $\left(\frac{-n_1}{n_0}\right)$ vollkommen, und zwar in einer offenbar an den Sturm'schen Satz erinnernden Weise, bestimmt wird.

Um schliesslich noch ein Beispiel anzuführen, sei $n_0 = 143$, $n_1 = 105$. Alsdann ist die Reihe der Zahlen n:

$$1, 143, 105, 67, 29, -9, 7, -5, 3, -1;$$

die Reihe ihrer Zeichenwerthe *modulo* 4 ist:

Digitized by Google

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, -1, -1, -1,$$

so dass $\phi = \phi' = 4$, $\psi = \psi' = 5$ wird. Ferner ist die Reihe der Zahlen g von g_0 ab:

$$\frac{106}{143}, 2, 2, 2, -4, -2, -2, -2, -3;$$

und da hier $\frac{1}{2}g_0 \equiv -53 \equiv 3 \pmod 8$, also $\frac{1}{2}\Sigma g_k \equiv -\frac{1}{2} \pmod 8$ und $\Sigma \operatorname{sgn}. g_k = -1$ ist, so wird:

$$\tfrac{1}{2}n_0 + \sum_k (\tfrac{1}{2}g_k - \operatorname{sgn}. g_k) \equiv 0 \pmod 8,$$

und jede der obigen Bestimmungen liefert daher für das LEGENDRE-JACOBI'sche Zeichen $\left(\frac{-105}{143}\right)$ den positiven Werth.

Digitized by Google

Digitized by Google

20. Beweis einer JACOBI'schen Integralformel.

Von L. KRONECKER.

(Vorgetragen am 7. Februar; — gedruckt im Bericht vom 1. Mai [St. XXIII]; — ausgegeben am 8. Mai.)

In einer im XV. Bande des CRELLE'schen Journals abgedruckten Abhandlung, welche den Titel führt: »*Formula transformationis integralium definitorum*« entwickelt JACOBI eine Formel, mittels deren die Integrale, welche die Coefficienten FOURIER'scher Reihen darstellen, in andere zur Berechnung geeignetere transformirt werden. Es ist dies die a. a. O. (CRELLE's Journal, Bd. XV. S. 3) mit (7) bezeichnete Formel:

$$\int_0^\pi f(\cos x)\cos nx\,dx = \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}\int_0^\pi f^{(n)}(\cos x)\sin^{2n}x\,dx,$$

in welcher n irgend eine positive ganze Zahl und $f^{(n)}(z)$ die n^{te} Ableitung der Function $f(z)$ bedeutet.

JACOBI leitet seine Formel zuerst unter der Voraussetzung ab, dass die Function $f(z)$ durch eine nach ganzen positiven Potenzen von z fortschreitende Reihe gegeben sei, und beweist nachher dieselbe Formel allgemein mit Hülfe eines auch »an sich bemerkenswerthen Lemma's«. Als nun vor Kurzem von einem Mitgliede des hiesigen mathematischen Seminars in einer Versammlung, die unter meiner Leitung stattfand, ein Vortrag über die angeführte JACOBI'sche Abhandlung gehalten und dabei auch eine andere Herleitung der JACOBI-schen Formel gegeben wurde, bemerkte ich, dass die allgemeinste und zugleich einfachste Beweismethode durch einen Inductionsschluss erlangt wird.

Da nämlich für die Integrale auf der linken Seite der JACOBI-schen Formel die Gleichung:

$$\int_0^\pi f(\cos x)\cos(n+1)x\,dx + \int_0^\pi f(\cos x)\cos(n-1)x\,dx - 2\int_0^\pi \cos x\, f(\cos x)\cos nx\,dx = 0$$

besteht, so braucht offenbar nur gezeigt zu werden, dass auch die drei entsprechenden Ausdrücke auf der rechten Seite der Formel die

Digitized by Google

entsprechende Gleichung befriedigen. Werden diese drei Ausdrücke sämmtlich mit dem Product: $1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)$ multiplicirt, so erhält man die zu beweisende Gleichung in folgender Gestalt:

$$\int_0^{\pi} f^{(n+1)}(\cos x) \sin^{2n+2} x \, dx + (4n^2 - 1) \int_0^{\pi} f^{(n-1)}(\cos x) \sin^{2n-2} x \, dx$$
$$- 2(2n+1) \int_0^{\pi} \phi^{(n)}(\cos x) \sin^{2n} x \, dx = 0,$$

wobei zur Abkürzung $\phi(\cos x) = \cos x \, f(\cos x)$ und also

$$\phi^{(n)}(\cos x) = \cos x \, f^{(n)}(\cos x) + n f^{(n-1)}(\cos x)$$

gesetzt ist. Das Aggregat der drei Integrale auf der linken Seite ist aber nichts Anderes als $\int_0^{\pi} F_n'(x) \, dx$, wo $F_n'(x)$ die nach x genommene Ableitung von:

$$(2n+1) f^{(n-1)}(\cos x) \sin^{2n-1} x \cos x - f^{(n)}(\cos x) \sin^{2n+1} x$$

bedeutet. Wenn nun $f^{(n)}(z)$ in dem Intervalle von $z = -1$ bis $z = +1$ endlich und stetig bleibt, so bleibt offenbar $F_n(x)$ in dem Intervalle $x = 0$ bis $x = \pi$ endlich und stetig und verschwindet überdies (wegen des Factors $\sin^{2n-1} x$) an den beiden Grenzen des Intervalls. Es wird also in der That für alle ganzen positiven Zahlen n:

$$\int_0^{\pi} F_n'(x) \, dx = 0,$$

sobald die Function $f(z)$ nebst allen ihren Ableitungen in dem Intervalle von $z = -1$ bis $z = +1$ endlich und stetig bleibt.

Die Jacobi'sche Integralformel ist hiermit in dem ganzen Umfange ihrer Gültigkeit bewiesen, und aus dieser kann hinwiederum das Bestehen eben jener Differentialformel:

$$\frac{d^n \sin^{2n+1} x}{d \cos x^n} = (-1)^n \, 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1) \frac{\sin(2n+1)x}{n+1}$$

erschlossen werden,[1] auf welche Jacobi den allgemeineren Beweis seiner Integralformel gründet.[2]

---

[1] Dieser Nachweis bildete einen Theil des oben erwähnten Seminarvortrages.

[2] Vergl. Liouville's Aufsatz: »Sur une formule de M. Jacobi« (Liouville's Journal Bd. VI. 1841).

Digitized by Google

21. Beweis des Puiseux'schen Satzes.

Von L. Kronecker.

(Vorgetragen am 8. Mai; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXIV]; — ausgegeben am 15. Mai.)

In einem Aufsatze[1] »über die Bestimmung des Grades einer durch Elimination hervorgehenden Gleichung« hat Hr. Minding zuerst darauf aufmerksam gemacht, dass die Entwickelung algebraischer Functionen einer Variabeln nach fallenden Potenzen zur Bestimmung des Grades der Endgleichung benutzt werden kann, welche aus zwei algebraischen Gleichungen $f(x, y) = 0$ und $\phi(x, y) = 0$ bei Elimination von y resultirt, und Liouville hat in einer kurz darauf publicirten grösseren Abhandlung[2] jene Reihenentwickelungen algebraischer Functionen in ausgedehnterem Maasse für die Theorie der Elimination verwendet, ohne jedoch dabei auf diejenigen Fälle näher einzugehen, in denen die Entwickelungen auch gebrochene Potenzen der Variabeln enthalten. Eben dieselben Entwickelungen algebraischer Functionen einer Variabeln nach fallenden Potenzen können nun auch zur unmittelbaren Erkenntniss der Richtigkeit jenes fundamentalen Satzes benutzt werden, welchen Puiseux im Jahre 1851 in seinem Aufsatze[3] »Nouvelles recherches sur les fonctions algébriques« aufgestellt hat. Geht man nämlich von der Voraussetzung aus, dass eine Function einer complexen Variabeln z, welche mit $f(z)$ bezeichnet werden möge, durchweg eindeutig ist und zugleich einer algebraischen Gleichung:

$$f(z)^n + \phi_1(z) f(z)^{n-1} + \ldots\ldots + \phi_{n-1}(z) f(z) + \phi_n(z) = 0$$

genügt, in welcher $\phi_1(z), \phi_2(z), \ldots \phi_n(z)$ ganze rationale Functionen von z bedeuten, so schliesst man, dass die Entwickelung von $f(z)$ nach fallenden Potenzen von z nicht Glieder mit positiven gebrochenen Exponenten enthalten kann, weil sonst beim einmaligen Umlauf auf einem Kreise mit dem Mittelpunkt $z = 0$ und mit hinreichend grossem Radius der Werth von $f(z)$ eine Änderung erfahren würde. Man schliesst ferner, dass die Entwickelung nur Glieder mit positiven ganzen Exponenten enthalten kann, da — wenn das Aggregat dieser

[1] Crelle's Journal, Bd. XXII (1841) S. 178 und Liouville's Journal Bd. VI (1841), S. 412.

[2] Liouville's Journal, Bd. VI (1841), S. 345.

[3] Liouville's Journal, Bd. XVI (1851), S. 229.

Digitized by Google

Glieder mit $f_0(z)$ bezeichnet wird — die Differenz $f(z) - f_0(z)$ für unendlich grosse Werthe von z verschwindet und überdies, wie nachher näher ausgeführt werden soll, sich durch das CAUCHY'sche Integral, erstreckt über die Peripherie eines Kreises mit beliebig grossem Radius, darstellen lässt, also durchweg gleich Null sein muss.

Die allgemeine Entwickelbarkeit algebraischer Functionen, welche der vorstehenden Deduction zu Grunde liegt, ist wohl nicht in ganz einfacher und zugleich vollständiger Weise darzulegen. In den meisten Lehrbüchern fehlt die Theorie dieser Entwickelungen überhaupt; ich finde sie nur in einem älteren Werke, dem grossen LACROIX'schen »Traité du calcul différentiel et du calcul intégral«, auf welches auch in dem MINDING'schen Aufsatze verwiesen wird, und in dem neueren C. JORDAN'schen Lehrbuche »Cours d'analyse de l'école polytechnique« behandelt, aber mir scheinen die bezüglichen Auseinandersetzungen nicht ganz erschöpfend zu sein. So viel ich sehe, wird in den beiden citirten Werken nur gezeigt, wie unter der Voraussetzung der Entwickelbarkeit die einzelnen Exponenten und Coefficienten der verschiedenen Glieder der Entwickelung bestimmt werden können. Doch ist weder nachgewiesen, dass jede aus diesen Bestimmungen hervorgehende Entwickelung wirklich die vorgelegte algebraische Gleichung befriedigt, noch dass für jede der verschiedenen Wurzeln der Gleichung eine solche Entwickelung erlangt wird. Der erstere Nachweis müsste offenbar den der Convergenz der Reihenentwickelung mit enthalten, der letztere müsste entweder auf eine Reduction des Grades der vorgelegten Gleichung mit Hülfe einer der gefundenen Reihenentwickelungen gestützt werden, oder es müsste dabei die Voraussetzung hinzugenommen werden, dass die vorgelegte Gleichung lauter verschiedene Wurzeln habe, und keine Discussion solcher Art findet sich in den angeführten Werken bei Behandlung der bezeichneten Frage. Dass Hr. WEIERSTRASS schon vor langer Zeit die Theorie der Reihenentwickelungen algebraischer Functionen vollständig erledigt und in seinen Universitätsvorlesungen mehrmals vorgetragen hat, weiss ich aus seinen persönlichen Mittheilungen, und dieselbe Theorie lässt sich auch in voller Allgemeinheit, wie ich schon in der Einleitung zu meiner Abhandlung »über die Discriminante algebraischer Functionen einer Variabeln« erwähnt habe,[1] mit den a. a. O. auseinandergesetzten Methoden behandeln.

Wenn hiernach die allgemeine und vollständige Theorie der Entwickelung algebraischer Functionen in Potenzreihen eben nur auf eingehendere Untersuchungen gegründet werden kann, so erscheint es

[1] Journal für Mathematik Bd. 91 (1881), S. 305.

Digitized by Google

von Interesse, dass die obige Deduction des PUISEUX'schen Satzes mittels einer einfachen Transformation der unabhängigen Veränderlichen von der Voraussetzung der allgemeinen Entwickelbarkeit algebraischer Functionen befreit werden kann. Um dies zu zeigen, möge nunmehr vorausgesetzt werden, dass eine eindeutige Function $f(z)$ einer Gleichung:

$$\phi_0(z)f(z)^n + \phi_1(z)f(z)^{n-1} + \ldots + \phi_{n-1}(z)f(z) + \phi_n(z) = 0$$

genügt, deren Coefficienten $\phi(z)$ ganze rationale Functionen von z sind, und deren Discriminante $\Delta(z)$ von Null verschieden ist. Es ist nachzuweisen, dass hieraus erschlossen werden kann, $f(z)$ müsse eine rationale Function von z sein. Ist nun z_0 irgend ein Werth von z, wofür weder $\phi_0(z)$ noch die Discriminante $\Delta(z)$ verschwindet, so ergiebt die TAYLOR'sche Entwickelung für jede der n Wurzeln jener Gleichung n^{ten} Grades, also auch für $f(z)$, eine nach ganzen, steigenden Potenzen von $(z - z_0)$ fortschreitende Reihe. Setzt man:

$$z = z_0 + \frac{1}{x}, \quad f\left(z_0 + \frac{1}{x}\right) = g(x),$$

so ist $g(x)$ nach ganzen fallenden Potenzen von x entwickelbar und genügt zugleich einer Gleichung n^{ten} Grades:

$$\psi_0(x)g(x)^n + \psi_1(x)g(x)^{n-1} + \ldots + \psi_{n-1}(x)g(x) + \psi_n(x) = 0,$$

deren Coefficienten $\psi(x)$ ganze rationale Functionen von x sind. Es ist daher, wenn man mit $\gamma(x)$ denjenigen Theil der Entwickelung von $\psi_0(x)g(x)$, welcher die nicht negativen Potenzen von x enthält, und mit $\rho(x)$ die Differenz $\psi_0(x)g(x) - \gamma(x)$ bezeichnet, offenbar $\rho(x)$ eine eindeutige Function von x, welche für $x = \infty$ verschwindet und zugleich einer Gleichung:

$$\rho(x)^n + \chi_1(x)\rho(x)^{n-1} + \ldots + \chi_{n-1}(x)\rho(x) + \chi_n(x) = 0$$

genügt, in welcher die Coefficienten $\chi(x)$ ganze rationale Functionen von x sind. Hiernach ist:

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\rho(\xi)}{\xi - x}\, d\xi,$$

wenn die Integration über irgend eine den Punkt (x) umschliessende Curve erstreckt wird; denn daraus, dass $\rho(x)$ jener Gleichung n^{ten} Grades genügt, folgt, dass $\rho(x)$ für endliche Werthe von x endlich und im Allgemeinen, d. h. höchstens mit Ausnahme derjenigen Werthe von x, wofür die Discriminante der Gleichung verschwindet, auch stetig sein muss. Nimmt man nun für jene Integrations-Curve einen Kreis mit unendlich grossem Radius, so wird $\rho(\xi) = 0$, und es ergiebt sich daher, dass $\rho(x)$ für alle Werthe von x gleich Null, also $\psi_0(x)g(x) = \gamma(x)$ und folglich $f(z)$ eine rationale Function von z sein muss.

Digitized by Google

Bei der hier dargelegten Beweismethode kann man natürlich auch die Transformation der Variabeln z in die Variable x vermeiden; man gelangt alsdann zu einer vereinfachten Darstellung des von PUISEUX selbst a. a. O. gegebenen Beweises. Nach den obigen Bestimmungen ist nämlich, wenn

$$\phi_0(z)y^n + \phi_1(z)y^{n-1} + \ldots + \phi_{n-1}(z)y + \phi_n(z) = \Phi(y,z)$$

gesetzt und der Grad von $\Phi(y,z)$ in Beziehung auf z mit m bezeichnet wird:

$$\psi_0(x) = (z-z_0)^{-m}\phi_0(z) \text{ und also: } \psi_0(x)g(x) = (z-z_0)^{-m}\phi_0(z)f(z).$$

Bedeutet nun y_k irgend einen der n Werthe von y, wofür $\Phi(y,z) = 0$ wird, und $\Theta_k(z)$ denjenigen Theil der Entwickelung von $\phi_0(z)y_k$ nach steigenden Potenzen von $(z-z_0)$, welcher nur niedrigere als $(m+1)^{te}$ Potenzen enthält, so ist für einen Werth des Index k:

$$\big(\phi_0(z)y_k - \Theta_k(z)\big)(z-z_0)^{-m} = \rho(x).$$

Für den Beweis des PUISEUX'schen Satzes ist also nur erforderlich zu zeigen, dass der Ausdruck auf der linken Seite, wenn er eine eindeutige Function von z darstellen soll, nothwendig gleich Null sein muss. Dies erhellt aber in der That, wenn man diesen Ausdruck durch ein CAUCHY'sches Integral darstellt. Setzt man nämlich zur Abkürzung:

$$\phi_0(z)y_k - \Theta_k(z) = F_k(z),$$

so bleibt $(z-z_0)^{-m-1}F_k(z)$, für jeden Index k, bei endlichen Werthen von z, auch wenn z dem Werthe z_0 beliebig nahe genommen wird, innerhalb endlicher Grenzen, ist durchweg — höchstens mit Ausnahme der unmittelbaren Umgebung des Werthes $z = z_0$ und aller derjenigen Werthe, wofür die Discriminante von $\Phi(y,z)$ verschwindet — stetig, und nähert sich, wenn z unendlich grosse Werthe annimmt, der Grenze Null. Wenn daher für einen Werth des Index k die Function $F_k(z)$ eindeutig ist, so muss sie gleich:

$$\frac{(z-z_0)^{m+1}}{2\pi i}\int \frac{(\zeta-z_0)^{-m-1}F_k(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

sein, wo die Integration über einen Kreis mit unendlich grossem Radius erstreckt werden kann. Da aber der Werth von $(\zeta-z_0)^{-m-1}F_k(\zeta)$ auf einem Kreise mit wachsendem Radius sich durchweg der Null nähert, so muss $F_k(z) = 0$ und also y_k mit der rationalen Function $\frac{\Theta_k(z)}{\phi_0(z)}$ identisch sein.

Bedeutet $f(z)$, wie oben, die als eindeutige Function von z vorausgesetzte Wurzel y_k, so ist $f(z) = \frac{\Theta_k(z)}{\phi_0(z)}$. Wird hierin für den

Digitized by Google

mit $\Theta_k(z)$ bezeichneten Theil der Entwickelung von $\phi_0(z)f(z)$ nach Potenzen von $(z - z_0)$ dasjenige Integral substituirt, welches aus der Darstellung von $\phi_0(z)f(z)$ durch das CAUCHY'sche Integral resultirt, so kommt:

$$f(z) = \frac{-1}{2\pi i \phi_0(z)} \int \frac{\phi_0(\zeta) f(\zeta)}{z - \zeta} \left(1 - \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^{m+1}\right) d\zeta,$$

wo die Integration über einen unendlich grossen Kreis zu erstrecken ist. Hier erscheint nun der von PUISEUX selbst gegebene Beweis seines Satzes in einer einzigen Formel zusammengefasst; denn der Ausdruck auf der rechten Seite ist offenbar eine rationale Function von z, und die Richtigkeit der Formel basirt einerseits auf der Voraussetzung der Eindeutigkeit von $f(z)$ als einer Vorbedingung der Darstellung durch das CAUCHY'sche Integral, andererseits auf der Voraussetzung, dass $f(z)$ zugleich einer algebraischen Gleichung genügt, deren Coefficienten ganze rationale Functionen von z sind. Aus der letzteren Voraussetzung folgt nämlich erstens, dass $f(z)$, multiplicirt mit dem Coefficienten der höchsten Potenz, der oben mit $\phi_0(z)$ bezeichnet worden ist, durchweg endlich und, abgesehen von der Umgebung einzelner Punkte, stetig, also durch das über einen unendlich grossen Kreis zu erstreckende Integral:

$$\frac{-1}{2\pi i} \int \frac{\phi_0(\zeta) f(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta$$

darstellbar ist, und es folgt daraus zweitens, dass das über einen unendlich grossen Kreis ausgedehnte Integral:

$$\int \frac{\phi_0(\zeta) f(\zeta)}{z - \zeta} (\zeta - z_0)^{-m-1} d\zeta$$

verschwindet, wenn die ganze Zahl m durch den Grad der ganzen rationalen Coefficienten der Gleichung, welcher $f(z)$ genügt, nicht übertroffen wird.

Der hier unter verschiedenen Formen dargestellte Beweis des PUISEUX'schen Satzes stützt sich nur auf die zwei Elemente, welche durch den Ausspruch des Satzes selbst als wesentliche bezeichnet sind, nämlich auf die Möglichkeit der Isolirung einer der durch die vorgelegte Gleichung definirten Functionen und auf die Möglichkeit der Charakterisirung ihrer Eindeutigkeit. Die Isolirung geschieht durch die Entwickelung in eine TAYLOR'sche Reihe, aber nur bis zu einem von vornherein durch den Grad der Gleichungscoefficienten zu bestimmenden Gliede, die Charakterisirung der Eindeutigkeit geschieht dadurch, dass die Function als CAUCHY'sches Integral dargestellt wird. Dabei erfüllt der Beweis jene strengeren Forderungen, welche ich im Anfange des §. 4 meiner Festschrift zu Hrn. KUMMER's Doctorjubiläum angedeutet habe; denn es wird in dem Beweise eine Methode angegeben,

Digitized by Google

mittels deren die rationale Function von z gefunden werden kann, welche nach dem Ausspruche des PUISEUX'schen Satzes einer algebraischen Gleichung $\Phi(y,z)=0$ genügen muss, wenn eine ihrer Wurzeln y eine eindeutige Function von z ist. Man braucht nämlich nur aus den Coefficienten der Gleichung $\Phi(y,z)=0$ die n ganzen Functionen m^{ten} Grades zu bilden, welche oben mit:

$$\Theta_k(z) \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

bezeichnet sind, und zu versuchen, welcher der n Werthe:

$$y=\frac{\Theta_k(z)}{\phi_0(z)} \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

der Gleichung $\Phi(y,z)=0$ genügt, da einer dieser Werthe eben genügen muss, wenn diese Gleichung überhaupt eine in z rationale Wurzel hat.

Diese Betrachtung kann auch zur Ermittelung der Factoren einer ganzen Function mehrerer Variabeln benutzt werden und führt also zu einer anderen Erledigung des im oben citirten §. 4 meiner Festschrift behandelten Gegenstandes. Denn man kann offenbar in derselben Weise, wenn eine Gleichung:

$$\phi_0 y^n+\phi_1 y^{n-1}+\ldots+\phi_{n-1}y+\phi_n=0$$

gegeben ist, in welcher $\phi_0,\phi_1,\ldots\phi_n$ ganze Functionen der Variabeln $z',z'',z''',\ldots$ sind — durch Entwickelung von y nach ganzen steigenden Potenzen von

$$z'-z'_0,\ z''-z''_0,\ z'''-z'''_0,\ldots.$$

bis zu einer von vornherein zu bestimmenden Dimension — alle rationalen Functionen der Grössen $z'z'',z'''\ldots.$ aufstellen, welche überhaupt Wurzeln jener Gleichung sein können. Die Werthe $z'_0,z''_0,z'''_0,\ldots$ brauchen hierbei nur so bestimmt zu sein, dass dafür die Discriminante der Gleichung in y nicht verschwindet. Die allgemeinere Frage, ob eine ganze Function $F(z,z',z'',z''',\ldots)$ einen Factor hat, welcher in Beziehung auf z von einem bestimmten Grade m ist, lässt sich aber unmittelbar auf die Frage zurückführen, ob die Gleichung deren verschiedene Wurzeln die symmetrischen Functionen von je m der Wurzeln von $F(z)=0$ sind, durch eine rationale Function von $z',z'',z''',\ldots$ befriedigt wird. Ich bemerke schliesslich, dass ich diese Methode zur Untersuchung der Irreductibilität ganzer Functionen schon in meinen im Winter 1872/73 gehaltenen Universitätsvorlesungen ausführlich entwickelt habe.

Digitized by Google

22. Über die centralen Organe für das Sehen und das Hören bei den Wirbelthieren.

Von Hermann Munk.

Fortsetzung der Mittheilung vom 12. Juli 1883[1].

(Vorgetragen am 3. April; — gedruckt im Bericht vom 8. Mai [St. XXIV]; — ausgegeben am 15. Mai.)

5. Untersuchung des Sehens der niederen Säugethiere.

Meine Aufgabe bezüglich des Sehens der Wirbelthiere könnte gelöst scheinen; denn dass die niederen Säugethiere zu den Vögeln und den höheren Säugethieren in Gegensatz treten und mit den Fröschen und den Fischen übereinstimmen, dürfte man nicht glauben wollen. Allein nur die ältesten Forscher haben die niederen Säugethiere, des Grosshirns beraubt, blind gefunden, alle späteren haben dieselben nach anscheinend genauerer Untersuchung für sehend erklärt, so dass an der Sicherheit der neueren Erkenntniss gar kein Zweifel bestand[2]; und noch in jüngster Zeit, nachdem ich schon für den Hund ein anderes Verhalten dargethan und schliesslich auch mit der Totalexstirpation der Sehsphären erwiesen hatte, sind wiederum neue Beobachter[3] für das Sehen des grosshirnlosen Kaninchens eingetreten. Entweder also fallen doch die niederen Säugethiere hier wunderbar aus der Reihe, oder die Forschung ist in seltsamer Weise lange irregeführt worden: und zwischen diesen Möglichkeiten zu entscheiden, ist eine eigene Prüfung der niederen Säugethiere nicht zu umgehen.

Ich habe die Prüfung auf alle die Thiere ausgedehnt, an welchen man die Versuche angestellt hatte: das Kaninchen, das Meerschweinchen und die Ratte. Die Intelligenz dieser Thiere ist so gering, dass Sinnesstörungen, welche nicht beträchtlich sind, sich der Constatirung entziehen und von beträchtlichen Sinnesstörungen, wenn nicht der Sinn ganz verloren ist, genauere Bestimmungen ihres Umfanges nicht zu

[1] Diese Berichte, 1883. S. 793—827. In den folgenden Citaten ist die Mittheilung mit I bezeichnet.

[2] S. oben I. S. 795—8.

[3] Arthur Christiani. Diese Berichte, 1881. S. 224. — Deutsche medicinische Wochenschrift, 7. Jahrg. 1881, No. 21. S. 302.

Digitized by Google

gewinnen sind. Deshalb hatte ich für das Studium der Grosshirnrinde von vorneherein auf die Verwendung dieser Thiere verzichten müssen, und deshalb war bei ihnen an Versuchsreihen über die Sehsphären, wie ich sie beim Hunde durchgeführt hatte, nicht zu denken. Wiederum also musste ich zur Exstirpation des Grosshirns mich entschliessen und damit zur engsten Begrenzung der Untersuchung mich verstehen.

Auch hier haben meine Vorgänger mit Ausnahme von Hrn. Renzi Angaben über die Technik des Versuches unterlassen. Doch so selbstverständlich, wie man danach glauben sollte, ist das Verfahren nicht. Man mag das Grosshirn blosslegen wie man will, bei der Abtragung desselben muss man bestimmten Normen folgen. Gerade was Hr. Renzi[1] vorgiebt, dass man das Grosshirn stückweise entferne, erst ein vorderes Stück, dann die seitlichen Stücke, darauf das hintere obere Stück u. s. w., das ist durchaus zu vermeiden, weil gar zu häufig tiefgelegene Grosshirnpartien der Exstirpation entgehen und auch die niedereren Hirntheile leicht verletzt werden. Man legt am besten zwei dünne und schmale Holzstäbchen[2] ganz flach an das hintere Ende der rechten Hemisphäre an und rollt durch sanften Zug dieses Ende ein wenig nach vorn auf; dann führt man das eine Holzstäbchen durch die vordere Hirnspalte an die untere Fläche der Hemisphäre, mit dem anderen Holzstäbchen geht man, dem hinteren äusseren Hemisphärenrande folgend und immer hart an den Knochen sich haltend, bis zur Schädelbasis in die Tiefe; endlich bewegt man beide Stäbchen zugleich nach vorn und oben und klappt dadurch die Hemisphäre bis zum Balkenknie nach vorn um. Verfährt man danach ebenso mit der linken Hemisphäre, so hat man beide Hemisphären mitsammt Balken und Fornix als ein unversehrtes Ganzes umgeschlagen, das unterste zu oberst, vor sich. Nur auf diesem Wege, der allerdings zu nahe liegt, als dass man ihn nicht schon öfters eingeschlagen haben sollte, gelingt es, die hinter dem Balkenknie gelegenen Hemisphärentheile sicher vollkommen und ohne Verletzung der Thalami optici oder Corpora quadrigemina herauszuschaffen. Zum Schlusse trennt man mit dem Messer die Grosshirnhemisphären vom übrigen Hirne ab, dicht vor den Thalami optici oder ein wenig weiter nach vorn — darauf kommt es für die Zwecke der vorliegenden Untersuchung nicht besonders an. Ich habe in der Regel unmittelbar vor den sichtbaren vorderen Rändern der Thalami optici einen Frontalschnitt etwas schief nach vorn und unten bis zur Schädelbasis geführt, so dass das Messer auf das hintere Ende der vorderen Schädelgrube stiess. Soweit es sich

[1] Ann. universali di Med. Vol. 189. 1864. p. 112.
[2] S. oben I. S. 808.

Digitized by Google

übersehen lässt, war auch bei allen meinen Vorgängern die Entfernung der Corpora striata in die Exstirpation des Grosshirns eingeschlossen.

Man verwendet zu den Versuchen vortheilhaft ältere und kräftige Thiere, welche in den letzten Tagen bloss trockenes Futter erhalten haben. Hat man dann bei der Eröffnung des Schädeldaches etwaige Blutungen aus den Knochenrändern sofort durch Andrücken von Schwämmchen gestillt, die Sinus transversi und vollends den Confluens sinuum sorgsam geschont, die Durazipfel mit dem Sinus longitudinalis anterior tordirt nach vorn und nach hinten zurückgeschlagen, endlich die Exstirpation selbst, falls das Thier narkotisirt war, erst dann unternommen, als die Narkose vorüber war, so ist der mit der Operation verbundene Blutverlust nur unbedeutend, manchmal sogar kleiner als beim entsprechenden Versuche an der Taube; und war, was sich unbedingt empfiehlt, dem Kopfe für die Operation eine möglichst verticale Stellung gegeben, die Schnauze nach unten, das Hinterhaupt nach oben, so zeigt sich schliesslich die Schädelbasis in der Regel frei von Blut, und nur in der Lücke vor den Thalami optici, wo nach der Ausführung des Frontalschnittes das Grosshirn mit dem Scalpellstiele herausgehoben worden ist, sammelt sich etwas Blut an, das bald gerinnt. Es bleiben noch einige Nähte anzulegen, um die freiliegenden Hirntheile vor Vertrocknung zu schützen, und die Operation ist glücklich durchgeführt. Aber damit ist der gute Verlauf des Versuches noch nicht gesichert. Wie man auch die Thiere in der Folge halten mag, ob in Tücher eingeschlagen oder frei im Zimmer oder im engen Käfig, recht häufig treten Nachblutungen ein, bald früher bald später, meist in den ersten Stunden. Diese Blutungen verdunkeln unter allen Umständen die Folgen der Exstirpation und beschleunigen auch, wenn sie nicht ganz unbedeutend sind, den Tod der Thiere; einigermaassen erhebliche Blutungen führen sehr rasch den Tod herbei. Nur in 20—30 Procent der glücklich operirten Fälle blieben die Nachblutungen aus: bei diesen ganz gelungenen Versuchen blieben die Kaninchen bis circa 50 Stunden, die Meerschweinchen und die Ratten bis circa 90 Stunden nach der Operation am Leben.

So lange Zeit die Thiere zu beobachten, haben meine Vorgänger kaum je Gelegenheit gehabt. Allerdings findet man nur selten die Beobachtungsdauer angemerkt: die Thiere hatten dann immer kurze Zeit, die Kaninchen einige Stunden, die Meerschweinchen längstens 24 Stunden[1] den Eingriff überlebt. Aber gerade weil in der seit

[1] Ich habe Renzi's viertes Meerschweinchen (l. c. p. 133, Esp. 23), dessen Grosshirn ganz entfernt war, im Auge. Die drei anderen Meerschweinchen (p. 113—9, Esp. 19—21) können hier überhaupt nicht in Betracht kommen, weil das Grosshirn nur unvollkommen exstirpirt war, wie aus der Lebensdauer von 8 bezw. 7 Tagen

Digitized by Google

Flourens geübten künstlichen Fütterung der enthirnten Vögel so deutlich die volle Erkenntniss des Werthes sich ausspricht, welcher einer möglichst langen Beobachtung der Versuchsthiere zukommt, wird man nicht fehlgehen, wenn man aus dem Schweigen der übrigen Forscher auf einen gleich frühen Tod ihrer enthirnten Säugethiere schliesst. Hr. Schiff, der unzweifelhaft hier die reichsten Erfahrungen hat, sagt auch[1], dass die Säugethiere »gewöhnlich nach einigen Stunden sterben«, indem gerade nach bestgelungener Operation durch die heftigen Bewegungen der Thiere neue Blutungen herbeigeführt werden; und wenn er hinzufügt: »so lange man die operirten Säugethiere gehörig überwacht, kann man sie am Leben erhalten«, so kann damit, bei der Eigenart der gestellten Anforderung, doch eben nur eine mässige Verlängerung der Lebensdauer gemeint sein. Nur Hr. Cyon[2] hat Kaninchen ohne Grosshirnlappen zwei Tage leben sehen, wie er gelegentlich bemerkt, ohne weitere Beobachtungen an diesen Thieren mitzutheilen.

Aber zwei Tage sind auch bei den enthirnten Kaninchen, vier Tage bei den enthirnten Meerschweinchen und Ratten die äusserste Lebensdauer. Obwohl die Thiere nicht Nahrung zu sich nehmen, sterben sie doch nicht den Hungertod. Dafür erliegen die Thiere viel zu früh[3] und mit einer zu geringen Abnahme des Körpergewichtes (7—20 Procent); auch wird der Magen nach dem Tode nicht leer und zusammengezogen, sondern mit einem reichlichen und bei den Kaninchen manchmal sogar noch ziemlich festen Inhalte angetroffen. Sondern die Todesursache ist offenbar im wesentlichen durch die Veränderungen der zurückgebliebenen Hirntheile gegeben, welche regelmässig bei den ganz gelungenen Versuchen die Section aufdeckt, durch die Entzündungen und Erweichungen, welche von der Schnittfläche und von der freien Oberfläche aus sich verbreitet haben. Höchstens eine Beschleunigung des Todes durch den geringen Blutverlust und

---

und dem Sectionsbefunde und dazu noch besonders aus Renzi's Bemerkungen p. 134 hervorgeht. Nur mag angeführt sein, dass diese Thiere, bei welchen nach Renzi ein Theil der »Hinterlappen« und eine dünne Schicht Nervensubstanz über den Thalami optici und den Corpora quadrigemina stehengeblieben war, nach einigen Tagen einen Rest des Gesichtssinnes erkennen liessen, indem sie Hindernissen auswichen.

[1] Lehrbuch der Physiologie des Menschen. Bd. I. Lahr 1858—59. S. 332.

[2] Methodik der physiologischen Experimente. Giessen 1876. S. 508.

[3] Die oft wiederkehrende Angabe, der Inanitionstod trete bei Ratten und Mäusen schon am zweiten oder dritten Tage ein, ist falsch. Sie hat endlich neuerdings durch Voit dahin Berichtigung gefunden, dass »Ratten nach 7—8 Tagen dem Hunger erliegen« (Sitzungsber. der mathem.-phys. Classe der Münchener Akademie der Wiss. Bd. 13, 1883. S. 403). Bei Versuchen, welche ich selber anstellte, bevor ich diese Bemerkung Voit's kannte, sind die Ratten im Laufe des neunten und zehnten Tages gestorben. (Eine Ratte von 138 g lebte $9^1/_2$ Tage und verlor 38 Procent, eine andere von 132 g lebte über acht Tage und verlor 34 Procent des Körpergewichtes; eine dritte Ratte, welche fast neun Tage lebte, wog nach dem Tode 139 g.)

Digitized by Google

durch die Inanition könnte man annehmen wollen, und selbst dieser liesse sich durch künstliche Fütterung nicht entgegentreten; denn der ansehnliche Inhalt des Magens, den man stets findet, und die alkalische Reaction, welche Inhalt und Wandung des Magens meist darbieten, lassen keinen Zweifel, dass die Verdauung infolge des Eingriffes zum Stillstande kommt.[1]

Das Verhalten der enthirnten Thiere will, ehe wir an unsere eigentliche Aufgabe herantreten, erst gewissermaassen im groben gewürdigt sein. Man übersieht es am besten, wenn man von den längstlebigen Thieren ausgeht.

Zunächst nach der Operation bleibt das Thier, bei normaler ruhiger Athmung, in jeder beliebigen Lage, die man ihm ertheilt hat, wofern nur der Körper ausreichend unterstützt ist, unverändert und unbewegt liegen. Dieses Erschöpfungsstadium, wie ich es nennen will, dauert ungefähr eine halbe Stunde, längstens etwa eine Stunde an und findet seinen Abschluss, indem das Thier plötzlich oder auch, wenn es auf der Seite lag, nach einigen Strampelbewegungen die hockende Stellung annimmt, welche es sonst immer bei langem Sitzen oder beim Schlafen hatte. In der Stellung verharrt dann das Thier während des zweiten Stadiums, des Ruhestadiums, durch Stunden und führt nur hin und wieder, im ganzen sehr selten, einzelne Bewegungen aus. Es hebt oder schüttelt einmal den Kopf, es wendet ihn einmal nach rechts oder nach links, es dreht ihn gegen die Brust oder die Flanke, als ob es dort etwas suchte; es blinzelt mit dem einen oder dem anderen Auge; es dreht ein Ohr oder beide Ohren hin und her; es macht Lippen- und Kieferbewegungen; es verstellt das eine oder das andere Bein; es hebt ein Vorderbein und führt es gleichsam wischend das Gesicht entlang; es hebt ein Hinterbein und bringt es wie zum Kratzen an den Bauch; es putzt die Schnauze mit den Vorderfüssen. Hin und wieder kommt es auch einmal vor, dass das Thier sich etwas zeigerartig dreht oder wenige Schritte vorwärts macht, geradeaus oder im Bogen rechts- oder linksum. Die normale ruhige Athmung besteht dabei zuerst unverändert fort, aber später schieben sich vereinzelte rasche active Exspirationen ein,

[1] FERRIER ist es auch einzig und allein, der hier nach »eigenen Experimenten« von Erfolgen künstlicher Fütterung zu berichten hat: »Bleibt das Kaninchen sich selbst überlassen . . . , so verharrt es unbeweglich an derselben Stelle und geht . . an Hunger zu Grunde; wird es aber künstlich gefüttert, so kann das Thier einige Tage am Leben erhalten bleiben.« (The functions of the brain. London 1876. p. 39 — hier heisst es sogar: »the animal may live an indefinite period« —. Übersetzt von OBERSTEINER. Braunschweig 1879. S. 44.) Ein interessanter neuer Beleg für das Vertrauen, welches FERRIER's Versuche und Angaben verdienen! (Hinsichts der Unbeweglichkeit vergl. noch die Folge oben im Text.)

Digitized by Google

mit anfangs langen, dann kürzeren Zwischenzeiten, in der Regel begleitet von einer Art Niesegeräusch, nur äusserst selten statt dessen von einem kurzen hohen Tone. Mit der Zeit werden diese Exspirationen immer heftiger, und dann verbindet sich mit ihnen, am frühesten beim Meerschweinchen, ein Zusammenfahren oder eine Vorwärtsschiebung des ganzen Thieres, bis es endlich zu den Laufbewegungen kommt, welche das dritte Stadium charakterisiren. Jetzt läuft das Thier, nicht unausgesetzt, sondern mit Pausen, während welcher es ruhig dasteht, manchmal geradeaus, meist in Kreisen oder Spiralen. Anfangs ist die Ruhezeit ansehnlich länger als die Laufzeit: grössere Pausen trennen Laufperioden, innerhalb welcher die einzelnen Laufbewegungen mit kürzeren Pausen auf einander folgen; jede Laufbewegung beschränkt sich auf wenige Schritte und erfolgt mit geringer Geschwindigkeit.[1] Aber allmählich nimmt die Laufzeit immer mehr zu, die Ruhezeit immer mehr ab; alle Pausen werden kürzer, die Dauer jeder Laufbewegung und die Geschwindigkeit wachsen. Endlich sind Laufperioden nicht mehr zu erkennen, und längere rasche Laufbewegungen schliessen sich mit nur kurzen Pausen an einander an. Damit ist der Höhepunkt des Laufens erreicht, und wie dieses soweit wuchs, so nimmt es fortan wieder ab. Die Dauer und die Geschwindigkeit der Laufbewegungen werden kleiner, die Pausen grösser, und nach einiger Zeit schieben sich auch vereinzelte besonders grosse Pausen ein, so dass wieder Laufperioden zu unterscheiden sind. Die Pausen vergrössern sich nunmehr rasch, rascher als sie früher sich verkleinert hatten. Plötzlich einmal, zum Schlusse einer Laufperiode, fällt das Thier auf die Seite und bleibt mit ausgestreckten Extremitäten liegen; doch nach einiger Zeit richtet es sich wieder auf, und das Laufen beginnt von neuem. Nach einer Anzahl Laufperioden fällt das Thier wieder um, und wieder erhebt es sich und läuft. Das wiederholt sich mehrmals, bis endlich das umgefallene Thier wohl noch Strampelbewegungen macht, aber nicht mehr sich aufzurichten vermag; auf der Seite liegend, bewegt es nur noch von Zeit zu Zeit den Kopf und die Beine wie zum Laufen. Mittlerweile hat sich die Respiration beschleunigt und sehr verflacht, unter öfterem Auftreten einzelner stark dyspnoïscher Athmungen. Diese Athmungen werden immer

[1] Ich betrachte immer die mittlere Geschwindigkeit einer ganzen Laufbewegung und sehe von den Veränderungen ab, welche die Geschwindigkeit manchmal innerhalb der Laufbewegung erfährt; die letzteren habe ich nicht ausreichend studirt. (Über die Veränderungen der Geschwindigkeit, wenn die Thiere durch mechanische Reizung ihres Körpers zum Laufen gebracht sind [s. unten S. 558], vergl. Schiff, a. a. O. S. 340; ich muss jedoch bemerken, dass ich die Thiere in solchen Fällen, ohne dass sie an ein Hinderniss stiessen, bald früher bald später, je nach der Stärke der Reizung, habe zur Ruhe kommen sehen.)

Digitized by Google

häufiger und krampfhafter, der Rumpf hört zu athmen auf, und mit heftigster Kopfdyspnoë schliesst das Leben des Thieres. Seitdem der Höhepunkt des Laufens erreicht war, ist beim Kaninchen fast ein Tag, sind bei dem Meerschweinchen oder der Ratte etwa zwei Tage verflossen, so dass die Zeit der Zunahme der Laufbewegungen den kleineren, die Zeit ihrer Abnahme den grösseren Theil der Dauer des dritten Stadiums in Anspruch nimmt.

In den Hauptzügen ebenso stellt sich das Verhalten der enthirnten Thiere bei allen ganz gelungenen Versuchen dar, überall finden sich die geschilderten drei Stadien mit ihren charakteristischen Erscheinungen wieder. Mit der Abnahme der Lebensdauer erfahren nur das zweite und das dritte Stadium eine entsprechende Verkürzung und innerhalb des dritten Stadiums insbesondere wiederum die Zeit, während welcher die Laufbewegungen abnehmen, so dass der Tod immer näher an den Höhepunkt des Laufens heranrückt. Weiter drängen sich die Laufbewegungen bei ihrem Anwachsen nicht nur rascher dicht an einander, sondern es steigern sich auch, je kürzer die Lebensdauer ist, desto mehr ihre Dauer und ihre Geschwindigkeit, so dass es zu minutenlangem und viel stürmischerem Laufen kommt, als bei den längstlebigen Thieren, bei welchen selbst auf dem Höhepunkte Dauer und Geschwindigkeit doch immer nur mässige sind. Endlich, wo bei dem Kaninchen noch innerhalb des ersten Tages, bei dem Meerschweinchen oder der Ratte noch innerhalb des zweiten Tages der Tod eintritt, stellen sich neben den Laufbewegungen manchmal noch Zuckungen einzelner Muskelpartien, in seltenen Fällen sogar rasch vorübergehende Krämpfe ein.

Und auch noch bei den nicht ganz gelungenen Versuchen, bei welchen es erst zu einer späteren Zeit zur Blutung kommt, ist bis zum Eintritte der Blutung das entsprechende Verhalten der Thiere zu beobachten; es sind fast ausschliesslich solche Thiere, deren Laufbewegungen rasch und stürmisch sich entwickelt haben. Die Blutung entsteht hier öfters, wie wir es schon von Hrn. Schiff bemerkt fanden, durch das Anprallen der Thiere an Hindernisse, manchmal aber auch ohnedies und überhaupt ohne jeden äusseren Anlass. Plötzlich streckt das Thier wie tetanisch Kopf, Rumpf und Glieder und fällt unmittelbar oder nachdem es einen meterhohen Satz in die Luft oder mehrere gewaltige Sätze nach vorn oder Rollungen um die Längsaxe gemacht hat, auf die Seite; meist erhebt es sich gar nicht mehr, sondern macht höchstens noch Strampelbewegungen und geht bald in grösster Athemnoth zugrunde. In diesen Fällen ist das Blut, wie sich zeigt, in die Ventrikel gedrungen oder hat Pons und Medulla oblongata von aussen umflossen. Wo diese Hirntheile und die Ventrikel nicht betroffen sind, thut sich die Blutung manchmal in krampfhaften Zuckungen und

Digitized by Google

immer in einem plötzlichen abnorm raschen Anwachsen des Laufens kund. Ganz unbrauchbar sind bloss diejenigen Versuche, bei welchen die Nachblutung bald nach der Operation erfolgt oder, was ziemlich häufig vorkommt, die durch die Exstirpation gesetzte Blutung fälschlich vollkommen gestillt erschien und allmählich immer mehr Blut die zurückgebliebenen Hirntheile umfliesst. Dann sind das Erschöpfungs- und das Ruhestadium gar nicht oder doch nur in Spuren bemerkbar, Krämpfe mannigfacher Art und Laufbewegungen stellen sich sehr früh ein, und aus dem Gewirr der von Fall zu Fall wechselnden Erscheinungen ist bloss eine regelmässige Steigerung des Laufens herauszuerkennen.

Das geschilderte Verhalten zeigen die Thiere, ohne dass nach beendeter Operation irgend ein Angriff weiter seitens des Experimentators erfolgt. Ich muss dies hervorheben, weil von den meisten Beobachtern das Laufen der enthirnten Säugethiere nicht anders als für den Fall, dass sie dieselben reizten, angemerkt worden ist. Selbst Hrn. Schiff ist der wahre Sachverhalt entgangen. Allerdings lässt er, wo »die heftigen Bewegungen«, die zu Nachblutungen führen, fehlen, die Exstirpation unvollkommen oder durch zu grossen Blutverlust misslungen sein[1]; aber er fügt nicht bloss sogleich hinzu, dass »die heftigen Bewegungen übrigens nie ganz spontan auftreten«, sondern er sagt auch, nachdem er die durch Reizung herbeigeführten Laufbewegungen behandelt hat: »manchmal sieht man allerdings nach lange angehaltener Ruhe auch scheinbar von selbst solche Bewegungen beginnen, aber diese sind selten«[2]. Erst Hr. Renzi[3] und neuerdings Hr. Christiani[4] haben das Laufen als eine regelmässige Erscheinung bei den Thieren, die sich selbst überlassen bleiben, erkannt; sie haben freilich wiederum seine Charakteristik übersehen und vor allem das, dass das Laufen ein Secundäres im Verhalten der Thiere ist und Ruhe das Primäre.

Ich muss auch noch, die Thiere in der Ruhe zu charakterisiren, etwas hinzufügen. Nach Hrn. Schiff[5] kommt ihnen »die vollkommen passive Biegsamkeit aller Glieder, die Beibehaltung jeder dem Thiere ertheilten nicht schmerzhaften Lage« zu. Hrn. Christiani[4] andererseits »boten die Kaninchen einen Anblick dar, welcher sich von dem nichtenthirnter Thiere im Allgemeinen wenig unterschied. Von Muskelschwäche in den Extremitäten oder von ungewöhnlicher Haltung des Kopfes u. d. m. war in den bestgerathenen Fällen durchaus nichts wahrzunehmen: die Thiere sassen unmittelbar nach der Operation

[1] A. a. O. S. 332.
[2] Ebenda, S. 340.
[3] L. c. p. 133—5.
[4] A. a. O. S. 223—4.
[5] A. a. O. S. 341.

Digitized by Google

da, wie normale Thiere zu sitzen pflegen«. Beide Angaben sind nicht richtig, da, wie es schon einzelne Versuche von Flourens und Hrn. Renzi zeigen, der anfängliche Erschöpfungszustand und die spätere Ruhe der Thiere auseinanderzuhalten sind. Hrn. Schiff's Angabe trifft genau zu für unser Erschöpfungsstadium, das Hrn. Christiani entgangen ist und das nie fehlt, auch wenn die Thiere — infolge der Reizung — »schon beim Losbinden sich sehr ungeberdig benehmen und zu entfliehen suchen«[1]. Im Ruhestadium dagegen sinken wohl die Thiere bei langer Ruhe immer mehr in sich zusammen, und sie halten auch manchmal die Beine abnorm oder lassen sich dieselben verstellen wie Hunde, welche die Extremitätenregionen der Fühlsphären verloren haben; aber sie halten jetzt immer die hockende Stellung fest, sie lassen den Körper nicht mehr in jede beliebige Lage bringen, sie behalten nicht einmal die einfache Seitenlage bei, sondern sie kehren immer wieder zur hockenden Stellung zurück.

Wenn nach diesen Bemerkungen die bisherige Kenntniss vom groben Verhalten, welches die enthirnten Säugethiere ohne jeden weiteren Angriff seitens des Experimentators darbieten, meiner obigen Schilderung gegenüber recht mangelhaft erscheint, wenn in der That in der gesammten Litteratur nur ein einziges Versuchsprotokoll von Hrn. Renzi[2] ein richtiges Bild gewährt, so wäre eine Anklage meiner Vorgänger darum doch ungerecht. Man hatte offenbar mit den so misslichen Versuchen an Säugethieren gerade bloss dem dringendsten Bedürfnisse entsprechen wollen, das nach den viel besseren und vollkommeneren Versuchen an den niedereren Wirbelthieren noch bestand. Wie hier, hatte man dort die Thiere nach der Entfernung des Grosshirns in Ruhe verharren, die willkürliche Bewegung fehlen sehen. Und auch die Laufbewegungen waren, als man auf sie aufmerksam geworden war, nicht unverständlich erschienen: dieselben »sind gewiss ebenfalls nur Reflexe infolge innerer Reize«, hatte schon Hr. Schiff[3] gesagt, und Hr. Renzi[4] hatte auf die verletzten und entzündeten Hirntheile, Hirnhäute u. s. w. als ihre Ursache hingewiesen. Damit hatte man sich begnügen dürfen; und die genauere Untersuchung mit den grösseren Opfern ist erst neuerdings durch Hrn. Christiani's Veröffentlichung nöthig geworden.

Es galt allgemein und bildete gewissermaassen die Grundlage unserer physiologischen Kenntniss des Grosshirns, dass die Wirbelthiere durch den Verlust des Grosshirns die willkürliche Bewegung

[1] Christiani, a. a. O. S. 223.
[2] L. c. p. 133—4.
[3] A. a. O. S. 340.
[4] L. c. p. 134—5.

Digitized by Google

einbüssen, dass sie in einem soporösen, schlafähnlichen Zustande verharren und nur noch insoweit sich bewegen, als Reizungen die erhaltenen Bewegungsmechanismen in Thätigkeit setzen. Das ist indess nach Hrn. CHRISTIANI nicht richtig, wenigstens nicht für die von ihm beobachteten Thiere, die Kaninchen. Die enthirnten Kaninchen schlafen vielmehr wirklich und schlafen nur viel leichter ein als unversehrte Thiere, doch gelegentlich wachen sie auf, dann gehen sie ohne jede Abnormität umher, machen dabei auch mitten in der Bewegung Halt oder erklettern und erspringen Anhöhen, schliesslich begeben sie sich wieder zur Ruhe und schlafen ein[1]. Danach würde nur, was das normale Thier wach erhält, nach der Enthirnung weniger wirksam sein, und es käme auch beim enthirnten Thiere, wie beim normalen, zu Bewegungen, welche nicht durch Reizungen, die unmittelbar oder von der Peripherie her die Bewegungsmechanismen treffen, veranlasst sind, d. h. das enthirnte Thier machte auch andere Bewegungen, als unwillkürliche — Zwangs- oder Reflexbewegungen.

Aber Hr. CHRISTIANI hat sich getäuscht.

Unsere enthirnten Thiere zeigen sich zu den verschiedenen Zeiten ungleich empfindlich gegen die mechanische Reizung ihres Körpers, am wenigsten empfindlich im Erschöpfungsstadium, empfindlicher im Ruhestadium und noch empfindlicher im Laufstadium, besonders um den Höhepunkt des Laufens herum; aber jederzeit sieht man, sobald die Reizung überhaupt wirksam geworden, mit deren Grösse auch die Reaction wachsen. Zuerst kommt ausschliesslich der angegriffene Körpertheil in Bewegung, dann tritt eine ausgedehntere Muskelthätigkeit ein, endlich läuft das Thier, und nun läuft es mit grosser Regel-

[1] »Die Kaninchen«, sagt CHRISTIANI a. a. O. S. 223—4, »sassen unmittelbar nach der Operation da, wie normale Thiere zu sitzen pflegen, und ergriffen, wie solche, die Flucht, wenn man sie, namentlich an den hinteren Extremitäten, festzuhalten suchte... Auch spontane Ortsveränderungen, und dabei keineswegs immer nur fluchtartig ausgeführte, fanden ab und zu statt, wenn die Thiere am Einschlafen verhindert wurden. Diese Bemerkung ist nicht ohne Belang. Es war nämlich zwar eine merkliche Erhöhung der Empfindlichkeit auf Reizung sensibler Nerven, namentlich auch des Acusticus, in den meisten Fällen wahrzunehmen, nichtsdestoweniger verfielen aber die Thiere, wenn man sich nicht mit ihnen beschäftigte und bei Abwesenheit stärkerer äusserer Reize, namentlich bei Fernhaltung aller stärkeren Geräusche und bei Abblendung directen Lichtes, viel leichter in Schlaf, als nichtenthirnte. Aus diesem Schlafe wachten halbe Tage lang beobachtete Thiere wiederholt von selbst auf. Sie gingen dann eine Zeit lang umher, um sich schliesslich wieder zur Ruhe zu begeben und einzuschlafen. Aus diesem Schlafe wurden aber auch die Thiere lebhaft aufgeschreckt, wenn die Stille durch ein plötzliches stärkeres Geräusch unterbrochen wurde... Was das Umhergehen der Thiere nach dem spontanen Erwachen betrifft, so zeigte sich in den bestgelungenen Fällen durchaus nichts Abnormes: die Thiere wichen Hindernissen (z. B. Tischfüssen) aus, ohne dieselben zu berühren; sie machten ohne objectiv nachweisbaren Grund mitten in der Bewegung Halt; sie erkletterten und ersprangen Anhöhen u. s. w.«

Digitized by Google

mässigkeit desto rascher und desto länger, je stärker der Druck oder der Stoss war. Ebensolche Bewegungen und insbesondere die Laufbewegungen lassen sich auch durch Drücken, Stechen u. s. w. der zurückgebliebenen Hirntheile herbeiführen, nur dass sie hier der Natur der Dinge gemäss in Art und Grösse weniger zu beherrschen sind. Die Laufbewegungen der sich selbst überlassenen Thiere können daher unwillkürliche Bewegungen, Reflex- oder Zwangsbewegungen sein, wenn an und in diesen Thieren Vorgänge statthaben, fähig solche centralen Erregungen zu setzen, wie vorhin die mechanischen Reizungen. Und solcher Vorgänge finden sich genug, von anderem abgesehen, in den Blutungen, wo diese auftreten, in den Entzündungsprocessen, welche an den zurückgebliebenen Hirntheilen bei allen ganz gelungenen Versuchen nachweisbar sind, in den Zerrungen, welche der Hirnstiel, infolge der Entfernung der tieferen Grosshirnpartien seiner natürlichen Unterlage beraubt, überall erfahren muss. Danach ist von vorneherein Hrn. Christiani's Auffassung vom Laufen der Thiere als eine ganz und gar willkürliche und die Auffassung von Hrn. Schiff und Hrn. Renzi als die berechtigtere zu erkennen.

Doch unsere genauere Kenntniss des Verhaltens der Thiere führt uns weiter. Ich will die nicht ganz gelungenen Versuche, bei welchen sofort handgreiflich die Blutung als Ursache der Laufbewegungen sich darstellt, beiseitelassen und nur die ganz gelungenen Versuche betrachten. Da treten die Ortsveränderungen durchaus nicht regellos ab und zu ein, und ebensowenig dauern sie regellos in der Zeit an, sondern im Laufen der Thiere thut sich eine grosse Gesetzmässigkeit kund: allemal beginnt das Laufen eine gewisse Zeit nach der Operation und nimmt an Häufigkeit, Intensität und Dauer zuerst bis zu einem Maximum zu und dann wieder ab; und zweitens setzt das Laufen desto eher nach der Operation ein und erfährt an Häufigkeit, Intensität und Dauer eine desto raschere und auch desto beträchtlichere Steigerung bis zum Maximum, je früher der Tod des Thieres erfolgt. Diese Abhängigkeit der Laufbewegungen von der Zeit nach der Operation und von der Dauer des Überlebens beweist, dass wir es mit unwillkürlichen Bewegungen zu thun haben, mit Bewegungen, veranlasst durch Vorgänge im Thiere, welche die Operation stets zur Folge hat, und welche von einer gewissen Zeit an sich allmählich weiter entwickeln, bis das Thier erliegt, die einen Male rascher und mächtiger, die anderen Male langsamer und schwächer.

Ja, die Sectionsergebnisse lehren uns sogar noch die Vorgänge näher kennen. Bei den längstlebigen Thieren zeigen sich die blossgelegten Hirntheile umhüllt vorn — wo vor der Schnittfläche geronnenes Blut verblieben war — von einer etwas consistenteren und

Digitized by Google

braunrothen, sonst überall von einer rahmigen gelben Eitermasse und darunter von einer membranartigen, fibrinös organisirten Schicht, welche an der Schnittfläche und an der Oberfläche der Thalami optici, manchmal auch an der Oberfläche der Corpora quadrigemina festhaftet; an ebendiesen Flächen ist die Hirnsubstanz grauröthlich und weicher als normal, sonst erscheint sie nur etwas ödematös. Bei den Thieren von mittlerer Lebensdauer findet man die eiterige und membranöse Deckschicht weniger ausgebildet, die Thalami und manchmal auch die Corpora quadrigemina entweder in ihrer ganzen Masse rosenroth und stark ödematös oder weniger gleichmässig roth, aber dafür mit äusserst zahlreichen feinen Capillarapoplexien versehen; nicht selten kommen auch hier oder da im Innern circumscripte Heerde rother Erweichung vor. Endlich bei den Thieren, deren Tod schon früh, bis etwa 18 Stunden nach der Operation eingetreten, sind die Thalami und manchmal auch die Corpora quadrigemina — natürlich hier, wie überall, öfters die Gebilde der einen Seite mehr als die der anderen — von hämorrhagischen Heerden in Form grober Punkte durchsetzt. Dass alle diese Veränderungen nicht durch den mechanischen Eingriff herbeigeführt sind, sondern erst mit der Zeit nach der Operation sich ausbilden, davon überzeugt man sich nebenher leicht an den durch Blutungen misslungenen Versuchen, welche reichlich dazu Gelegenheit geben. Das Laufen der Thiere und die Entzündung der stehengebliebenen Hirntheile bieten demgemäss in Zeit und Grösse den zu verlangenden Parallelismus dar; und wenn auch einzelne Laufbewegungen durch reflectorische Erregungen oder durch Zerrungen des Hirnstieles bedingt sein mögen, jedenfalls ist die grosse Masse der Laufbewegungen, sind die für das Laufstadium charakteristischen Bewegungen nichts anderes als Zwangsbewegungen infolge der entzündlichen Vorgänge, welche in den Thalami optici und den Corpora quadrigemina statthaben.[1]

Der Täuschung, welcher Hr. Christiani verfallen ist, liegt übrigens noch ein Irrthum zugrunde, den offenbar Alle begingen, welche das Laufen der enthirnten Säugethiere bemerkten, wenn auch Renzi allein ihn zum Ausdrucke brachte[2]: der Irrthum, dass solches Laufen nach der Enthirnung den Säugethieren eigenthümlich sei und bei den übrigen

[1] Die dem Laufstadium voraufgehenden activen Exspirationen (s. oben S. 553) sind, wie es scheint, mit einer Erfahrung von Schiff in Verbindung zu bringen. Nach Schiff (a. a. O. S. 349) »liegt vor dem Sehhügel, zwischen ihm und dem gestreiften Körper, eine Stelle, deren Reizung bei Kaninchen eine kurz angehaltene starke Exspirationsbewegung mit eigenthümlicher Erzitterung im Larynx bewirkt... Schon Magendie hatte bei Kaninchen nach gewissen Verletzungen, die, wie er glaubt, den Sehhügel trafen, diesen Ton gehört...« So würden die activen Exspirationen als das erste Anzeichen der Vorgänge an den stehengebliebenen Hirntheilen zu verstehen sein.

[2] L. c. p. 135.

Digitized by Google

Wirbelthieren nicht vorkomme. Ich habe im Laufe der Jahre unter den vielen Fröschen, welchen ich das Grosshirn ohne Nebenverletzungen exstirpirt hatte, mehrfach solche gesehen, welche noch an demselben oder an dem folgenden Tage wiederholt zeiger- oder reitbahnartige Bewegungen machten, ohne dass ich sie reizte, und deren Verhalten später erwies, dass hinter dem Grosshirn gelegene Hirntheile zugrundegegangen waren. Die Bewegungen dieser Frösche bin ich geneigt, auch hinsichts der ursächlichen Momente, den Bewegungen der Säugethiere gleichzustellen; es zu beweisen, sind meine bloss gelegentlichen Beobachtungen allerdings unzureichend. Besseres kann ich für die Vögel beibringen. Gerade in Rücksicht auf die vorliegende Frage habe ich schon oben[1] enthirnte Tauben beschrieben, welche nach einem Ruhestadium ein ebenso charakteristisches Laufstadium zeigten, wie unsere Säugethiere. Bei anderen Tauben habe ich erst mehrere Stunden nach der Operation oder gar erst am folgenden Tage, nachdem sie bis dahin in der normalen Ruhe verblieben waren, das Laufen (oder Fliegen) beginnen und mit der Zeit sich verstärken sehen: sie flatterten mehrmals gegen die Decke des Käfigs oder kletterten an den Gitterstäben empor, darauf folgte eine kürzere oder längere Pause, dann kehrten die Bewegungen wieder, von neuem trat eine Pause ein, und so wiederholte es sich vielfach. Die Section dieser Tauben, welche in den nächsten Tagen starben, ergab in einzelnen Fällen ausschliesslich eine Erweichung der Pedunculi und Thalami optici, in der Regel aber auch eine Blutung, welche die Befunde trübte. Eben weil die Blutungen so häufig sich einmischten, habe ich hier von den reinen Erscheinungen des Laufstadiums ein so klares Bild, wie bei den Säugethieren, nicht zu gewinnen vermocht. Immerhin kann darüber kein Zweifel sein, dass das Laufen oft auch bei den Tauben das Primäre, die Blutung erst das Secundäre gewesen ist, und dass in anderen Fällen die nur geringe Blutung keineswegs für sich allein das langandauernde Laufen veranlasst hat. Vögel und Säugethiere unterscheiden sich mithin in der fraglichen Hinsicht bloss dadurch von einander, dass bei den Vögeln das Laufen nicht eine so regelmässige Erscheinung nach der Enthirnung ist, wie bei den Säugethieren. Was daraus nach unseren obigen Ermittelungen folgt, dass bei den Vögeln die Entfernung des Grosshirns öfters nicht so deletär auf die niedereren Hirntheile wirkt, wie immer, selbst in den glücklichsten Fällen, bei den Säugethieren, das ist ja auch schon einfach daraus geschlossen worden, dass Vögel von der Enthirnung ohne weitere Schädigungen genesen können, Säugethiere aber infolge der-

[1] I. S. 812—3.

Digitized by Google

selben Verstümmelung stets zugrundegehen. Offenbar hat man nur bei den Vögeln, indem man bestrebt war, in Thieren, welche die Exstirpation lange überlebten, das beste Material für das Studium der Functionen des Grosshirns zu gewinnen, die weniger glücklichen Versuche verworfen oder zu wenig beachtet und darum übersehen, dass bei gleich frühem Tode nach der Enthirnung die Vögel ebensowohl laufen wie die Säugethiere.

Der Ausfall der Grosshirnfunctionen tritt nach alledem bei den Säugethieren bloss rein hervor in deren Ruhestadium nach der Enthirnung, nur dann können dieselben in Vergleich kommen mit den Vögeln, welche wochen- und monatelang die Enthirnung überlebt haben, und dann stimmen sie auch, wie die obigen Schilderungen[1] zeigen, in Haltung und Verhalten mit den letzteren überein. Die willkürliche Bewegung fehlt ihnen durchaus; und wie sie unbewegt in der Ruhestellung verharren, stellen sie sich in einem soporösen, schlafähnlichen Zustande dar, — von einem wirklichen Schlafen kann natürlich nicht die Rede sein, wo die Möglichkeit des Träumens wie des Wachens fehlt. Nur hin und wieder einmal tritt eine unwillkürliche Bewegung infolge peripherischer Reizung ein. Hat sich eine Fliege auf das Ohr gesetzt, wird das Ohr gedreht; läuft eine Fliege über die Nase, wird der Kopf hin und her geschüttelt; fliesst ein Blutstropfen von der Hautwunde aus über das Nasenloch, wird der Kopf hastig gebeugt, und es erfolgt eine starke active Exspiration mit lautem Niesegeräusche; ist ein Bein weit nach aussen abgeglitten, wird es angezogen; hat sich der Rumpf über einem nach innen verschobenen Beine zu sehr seitwärts geneigt, wird er wieder in die richtige Lage gebracht; u. dgl. m. Derart in jedem einzelnen Falle, für jedes Kratzen, Wischen, Putzen u. s. w. den Reiz an der Peripherie nachgewiesen sehen zu wollen, würde begreiflich ein unbilliges Verlangen sein und um so mehr, als schon der Fortgang der vegetativen Vorgänge für sich allein mancherlei Reizungen zu setzen vermag. So führt z. B. ganz regelmässig die Defäcation Bewegungen herbei, und zwar Dreh- oder Progressivbewegungen. Ich habe einmal ein Kaninchen in den ersten acht Stunden nach der Operation zu drei Zeiten, jedesmal bei der Defäcation, wenige Schritte geradeaus oder im Bogen gehen sehen, im übrigen aber regungslos verharren; und die Beobachtungen des anderen Tages haben es sogar wahrscheinlich gemacht, dass das Thier in den ersten 23 Stunden nichts weiter als sechs solche Progressivbewegungen ausführte. Genug offenbar, dass im Ruhestadium immer nur höchst selten und dazu noch in der Zeit ganz unregelmässig

[1] Vergl. oben S. 553 und I. S. 814.

Digitized by Google

vereinzelte Bewegungen auftreten, dass diese Bewegungen alle den Charakter der Reflexbewegungen zeigen, und dass in vielen Fällen auch die peripherischen Reizungen nachweisbar sind, welche die Bewegungen veranlassen: man wird solche Reflexbewegungen bei einem Thiere, welchem bloss das Grosshirn fehlt, nur natürlich finden, und man wird sie auch streng unterscheiden von den Zwangsbewegungen, welche dem Laufstadium eigenthümlich sind und auf dem unmittelbaren Angriffe der stehengebliebenen Hirntheile beruhen.

Die Übereinstimmung zwischen den niederen Säugethieren und den Vögeln hinsichts der Folgen der Grosshirnexstirpation beschränkt sich indess nicht auf das Verhalten der Thiere, das wir soweit betrachteten, sie erstreckt sich auch — und damit kommen wir zu unserer eigentlichen Aufgabe — auf das Sehen. Die enthirnten Kaninchen, Meerschweinchen, Ratten zeigen wohl den Pupillarreflex, ausser dass er im Erschöpfungsstadium schwächer und träger sich vollzieht, nicht merklich anders als in der Norm; sonst aber werden sie durch Licht in keiner Form und keiner Weise mehr beeinflusst. Nichts sichtbares vor ihren Augen in Ruhe oder Bewegung, selbst nicht der Wechsel der tiefsten Finsterniss mit dem grellsten Lichte, des grellsten Lichtes mit der tiefsten Finsterniss führt zu irgend einer Zeit nach der Operation die mindeste andere Reaction herbei, als dass die Pupillen sich verengen oder erweitern Und wenn die Thiere sich bewegen, so stossen sie an alle Hindernisse auf ihrem Wege an, gehen geradezu in die Objecte hinein, streben an der glatten Zimmerwand in die Höhe, fallen vom Tische u. dgl. m. Auch bei den niederen Säugethieren ist also mit dem Verluste des Grosshirns die völlige Einbusse des Gesichtssinnes verbunden.

Und das stellt sich im Grunde auch als das Ergebniss heraus, welches alle die früheren Untersuchungen bis auf die neueste Zeit ganz gleichmässig geliefert haben. Denn andere Beobachtungen, als ich eben anführte, hatte man nicht gemacht; höchstens sollte noch nach einzelnen Erfahrungen[1] auf grelles Licht das Auge sich schliessen, — was in der Wirklichkeit nicht zutrifft, und was vielleicht die unvollkommene Exstirpation bei den bezüglichen Versuchen, vielleicht die unzureichende Vorsicht bei den Prüfungen[2] vorgetäuscht hat. Man hatte nur, seitdem die enthirnten Vögel für sehend galten, den Pupillarreflex und das Blinzeln bei den enthirnten Säugethieren als

[1] Magendie, Leçons sur les fonctions et les maladies du système nerveux. Paris 1841. T. II. p. 334—5. — Longet, Anatomie und Physiologie des Nervensystems (1842). Übersetzt von Hein. Leipzig 1847. Bd. I. S. 525. — Schiff, a. a. O. S. 332.

[2] Nicht bloss das S. 553 besprochene Blinzeln kann die Täuschungen veranlasst haben, zumal wenn nur in einzelnen Fällen geprüft worden ist, sondern auch noch ein anderer Umstand, von welchem später die Rede sein wird.

Digitized by Google

Beweise für deren Sehen genommen: Beweise, welche, weil eine Sonderstellung der Säugethiere allen anderen Wirbelthieren gegenüber äusserst unwahrscheinlich dünkte, so willkommen waren, dass man den offenbaren Widerspruch, welchen das ganze sonstige Verhalten der Thiere darbot, leichthin übersah. Aber jetzt, wo wir wissen, dass der Pupillarreflex nicht auf ein Sehen schliessen lässt, und dass es ebenso um das Blinzeln stehen würde, selbst wenn es damit seine Richtigkeit hätte — ich komme später noch darauf zurück —, lassen die früheren Beobachtungen ohne jede Ausnahme nur den einen Schluss zu, dass die grosshirnlosen Säugethiere blind sind. Demgemäss würde alles in schönster Übereinstimmung sein, hätte nicht die neueste Zeit noch zu Abweichungen geführt. Da war es Hrn. Christiani[1] vorbehalten, ganz andere Erfahrungen zu machen: ihm »zeigte sich beim Umhergehen der enthirnten Kaninchen in den bestgelungenen Fällen durchaus nichts Abnormes: die Thiere wichen Hindernissen (z. B. Tischfüssen) aus, ohne dieselben zu berühren; sie erkletterten und ersprangen Anhöhen u. s. w.« Und der Strassburger Berichterstatter über Hrn. Christiani's Veröffentlichung hat hinzugefügt,[2] dass »die Christiani'schen Angaben sehr bald eine umfassende Bestätigung erfahren« würden, indem »eine noch bedeutend grössere Versuchsreihe am Kaninchengehirn der Hauptsache nach mit ganz denselben Resultaten ausgeführt wurde«; die angekündigte Mittheilung ist in den drei seitdem verflossenen Jahren nicht erschienen.

Doch wiederum hat Hr. Christiani sich getäuscht und diesmal unter Umständen, wo schon eine einfache Überlegung die Täuschung hätte verhüten sollen. Was so zahlreiche Forscher immer wieder angegeben hatten, was man sogar dort, wo man entschieden das Sehen der enthirnten Kaninchen vertrat, ausdrücklich hervorgehoben hatte, dass die Thiere in die Hindernisse stiessen,[3] das waren nackte Beobachtungen, bei welchen ein Irrthum unmöglich war. Dagegen war, was Hr. Christiani wollte, dass seine Thiere Hindernissen auswichen, ein Schluss, der falsch sein konnte; und er musste falsch sein, wenn nicht eine Abweichung in der Verstümmelung der Thiere zu einem abweichenden Verhalten derselben Anlass bot. Aber nach

[1] S. oben S. 558 Anm.

[2] Deutsche medicin. Wochenschrift, 7. Jahrg. 1881, No. 21. S. 302.

[3] Desmoulins (et Magendie), Anatomie des systèmes nerveux etc. Paris 1825. T. II. p. 628. — H. Hertwig. Experimenta quaedam de effectibus laesionum in partibus encephali singularibus etc. Diss. inaug. Berolin. 1826. p. 9. — Schöps, Meckel's Archiv für Anatomie und Physiologie, 1827. S. 373. — Bouillaud, Journ. de Physiologie expér. T. X. 1830. p. 43. — Magendie, l. c. T. I. p. 200; 280—1. T. II. p. 334. — Schiff, a. a. O. S. 334; 340. — Ferrier, The functions of the brain. London 1876. p. 39. (Übersetzt von Obersteiner. Braunschweig 1879. S. 44.)

Digitized by Google

den Schilderungen waren ebensowohl, wie Hrn. CHRISTIANI, auch früheren Forschern und insbesondere zweifellos Hrn. SCHIFF Versuche mit totaler Exstirpation des Grosshirns gelungen. Zudem liessen sich mit Verletzungen der hinter dem Grosshirn gelegenen Hirntheile die früheren Versuche nicht verdächtigen, weil in solchen Fällen, wie man lange weiss und wie Hr. CHRISTIANI selber es durch Versuche erfuhr, die Thiere nicht hätten sich ruhig in der hockenden Stellung halten und in normaler Weise laufen können. Bloss daran war zu denken, dass einzelne Vorgänger die Exstirpationen unvollkommen ausgeführt hätten; aber dann hätten ihre Thiere erst recht nicht in die Hindernisse stossen dürfen, wenn nach der Fortnahme des ganzen Grosshirns dergleichen nicht geschehen sollte. Das hätte Hr. CHRISTIANI erwägen müssen, und er wäre damit zur Erkenntniss gelangt, dass, wo seine Versuchsthiere nicht in Hindernisse stiessen, einfach ihr Weg sie nicht auf solche führte.

Wer die enthirnten Thiere beobachtet, wer sie so oft und immer wieder die Objecte, welche auf ihrem Wege liegen, streifen und in dieselben hineingehen sieht, wird denn auch Hrn. CHRISTIANI's Angabe ganz unbegreiflich finden; und rathlos wird er vor der Frage stehen, wie es möglich war, dass die Angabe entstand. Ich will die Antwort geben, zu welcher das ausgedehnte Studium der Thiere mich befähigt hat. Hrn. CHRISTIANI's »bestgelungene Fälle«, in welchen die Thiere »Hindernissen (z. B. Tischfüssen) auswichen«, sind Versuche gewesen, wie ich sie oben als ganz gelungene bezeichnet habe, mit einer mittleren oder noch grösseren Lebensdauer der Thiere; und Hrn. CHRISTIANI's Beobachtungszeit — er hebt hervor, dass er werthvolle Versuchsthiere »halbe Tage lang« beobachtete — hat höchstens das Ruhestadium und einen ersten Theil des Laufstadiums gedeckt, so dass er bloss mässige Progressivbewegungen dieser Thiere zu sehen bekam. Bei solchen mässigen Bewegungen kommt es hin und wieder vor, dass die Thiere, wenn sie in die Mitte des Zimmers gesetzt waren, nicht an die Wand und die dort befindlichen Schränke u. s. w. gerathen, sondern, natürlich in Absätzen, mehr oder weniger regelmässige Kreise inmitten des Zimmers beschreiben, immer wieder in ungefähr derselben Weise, und dabei, wenn nur spärliche Objecte in der Nähe sich befinden, zumal von so geringer Breite wie Tischfüsse, wiederholt an den Objecten vorüberkommen, ohne dass sie ihr Weg in Berührung mit den Objecten bringt. So habe ich Kaninchen die Füsse eines inmitten des Zimmers befindlichen Tisches, die einen Male alle vier Füsse, die anderen Male nur zwei Füsse, manchmal sogar zuerst die einen und dann andere zwei Füsse, wiederholt umkreisen sehen, ohne anzustossen; so habe ich ein Kaninchen zu Anfang

Digitized by Google

des Laufstadiums zwei Stunden lang rings um eine ansehnliche Kiste herumlaufen sehen, in $^1/_2$—$1\,^1/_2$ Fuss Entfernung von ihr, ohne je die Kiste zu berühren; und dergl. mehr. Derartige Beobachtungen waren es, welche Hrn. CHRISTIANI zu der Meinung verleiteten, dass die Thiere Hindernissen auswichen; und er ist bei dem Irrthume verblieben, obwohl das Auskunftsmittel so nahe lag: er brauchte nur in die hier genügend vorgegebene Bahn der Thiere einigermaassen breite Objecte zu stellen oder die Thiere in die Nähe der Wand zu versetzen, und er hätte gesehen, wie die Hindernisse nicht vermieden wurden. Um seine Meinung festhalten zu können, hat aber Hr. CHRISTIANI weiter alle die Versuchsthiere, welche er an Hindernisse stossen sah, kurzweg ausser Berücksichtigung gestellt, indem er sie ganz und gar willkürlich nicht zu den »bestgelungenen Fällen« zählte; und er hat dabei noch übersehen, dass, wenn die Enthirnung nicht Blindheit mit sich brachte, die Kaninchen nicht bloss bei den vermeintlichen »spontanen« Bewegungen, sondern auch, wie der grosshirnlose Frosch, bei unwillkürlichen Bewegungen und insbesondere wenn er sie reizte, die Hindernisse hätten vermeiden müssen. Endlich, um das Maass voll zu machen, hat Hr. CHRISTIANI das Anstossen der Thiere an Hindernisse sogar da vernachlässigt, wo es ihm nach seiner eigenen Angabe bei den »bestgelungenen Fällen« ganz deutlich zur Beobachtung gekommen sein muss, dort nämlich, wo die Thiere »Anhöhen erkletterten«.

Denn mit dem »Erklettern und Erspringen von Anhöhen« seitens der enthirnten Kaninchen hat es folgende Bewandtniss. Wie wir sahen, werden durch gewisse Blutungen Zwangsbewegungen in Form gewaltiger Sätze nach oben und vorn herbeigeführt; und dann gelangen die Thiere günstigenfalls mit ihren Sprüngen vom Fussboden auf höhere Objecte, aus der Kiste oder dem Käfig über die hohe Wand hinweg. Sonst kommt es zum »Erklettern und Erspringen« nie anders, als nachdem die Thiere bei ihren Laufbewegungen an Hindernisse gestossen sind, welche sie nicht ohne weiteres im Laufe stolpernd überwinden können, und auch dann nur unter besonderen Umständen. Im Ruhestadium und im Anfange des Laufstadiums bringt das Anstossen jedesmal das Thier zur Ruhe; die Bewegung erlischt unmittelbar, so dass alle Körpertheile in der Stellung verbleiben, welche sie beim Anstossen innehatten, und erst nach einer Pause sammelt sich das Thier, indem es den Kopf zurück- und die Hinterbeine vorzieht, kurz wieder die hockende Stellung annimmt. Später im Laufstadium dagegen kommt das Thier nur zur Ruhe, wenn das Anstossen zu einer Zeit erfolgt, zu welcher die Laufbewegung bereits ihrem natürlichen Ende nahe ist, oder wenn der Stoss so heftig ist, dass das Thier weit zurückprallt; anderenfalls setzt sich die Bewegung

Digitized by Google

in der einen oder der anderen Weise fort. Entweder ist nun das Thier, wie es am häufigsten vorkommt, durch das Hinderniss zur Seite abgelenkt, und die Laufbewegung geht in der neuen Richtung zu Ende; oder das Thier, das nicht ferner laufen kann, erhebt sich auf den Hinterfüssen und strebt strampelnd mit den Vorderfüssen in die Höhe, zuerst nur wenig, dann immer mehr, bis die Zeit der Zwangsbewegung abgelaufen ist. Um den Höhepunkt des Laufens herum, wenn der Bewegungsantrieb sehr mächtig ist, und zumal wenn das Anstossen sogleich nach dem Beginne einer Laufbewegung erfolgt, geschieht es dann zuweilen, dass das Thier unter dem andauernden Strampeln endlich mit den Vorderfüssen das obere Ende des Hindernisses erreicht und mit den nächsten Beugungen der Vorder- und Streckungen der Hinterbeine sich auf das Hinderniss hinauf- oder über dasselbe hinwegschwingt. So habe ich Kaninchen auf Kästen und Ofen-Unterbauten gerathen, in Töpfe und Kisten, welche auf dem Fussboden standen, hinein- und auch aus ihnen herausgelangen sehen u. dgl. m. Aber dafür muss eben das zu überwindende Hinderniss nicht zu hoch sein und das Thier, indem es sich auf den Hinterbeinen mehr und mehr erhebt, mit den Vorderfüssen das obere Ende des Hindernisses erreichen. Wo dies nicht geschieht oder überhaupt nicht möglich ist, wiederholen sich nur, durch Ruhepausen getrennt, wie sonst die Laufbewegungen, so hier die Kletter- und Strampelbewegungen, bis endlich einmal das Thier eine Ablenkung zur Seite erfährt und fortan wieder Laufbewegungen folgen.

Bei diesen Ausführungen, welche die Angaben und die Beobachtungsweise kennzeichnen, deren man sich auf unserem Gebiete zu erwehren hat, braucht es aber nicht einmal zu bleiben. Denn um über das Sehen der Thiere zu entscheiden, bietet sich noch ein ganz einfaches Hülfsmittel darin dar, dass man neben unseren bisherigen Versuchsthieren solche prüft, welchen man nach der Enthirnung noch die Augen eröffnet und den Augeninhalt entleert hat. Vom Pupillarreflexe abgesehen, zeigen beiderlei Thiere nicht den mindesten Unterschied in ihrem Verhalten und gilt, was ich für die einen beschrieb, genau ebenso für die anderen.

Die niederen Säugethiere, unter ihnen trotz Hrn. CHRISTIANI das Kaninchen, sind also nach dem Verluste des Grosshirns vollkommen blind, und dabei wird es bleiben, auch wenn die angekündigte Strassburger Mittheilung noch erscheinen sollte. In Hinsicht auf unsere Bestrebungen will aber das Ergebniss noch näher gewürdigt sein. Bei den Vögeln, da sie von der Enthirnung genasen und für ihre weitere lange Lebensdauer blind blieben, erwiesen unmittelbar die Versuche, dass alle centralen Vorgänge des Gesichtssinnes an das

Digitized by Google

Grosshirn gebunden sind. Einen solchen Erfolg hat bei den Säugethieren deren Kurzlebigkeit nach der Enthirnung von vorneherein ausgeschlossen: hier ist unmittelbar durch die Versuche der Nachweis einer andauernden Blindheit nicht erbracht. Indess ist nicht daran zu denken, dass unsere enthirnten Säugethiere, hätten sie länger gelebt, nach mehr Tagen oder nach Wochen doch noch Reste des Gesichtssinnes würden haben erkennen lassen. Man müsste dafür die Annahme machen, dass durch den operativen Eingriff überall und immer in gleicher Weise die stehengebliebenen Hirntheile intensiv geschädigt worden wären; und solche Annahme wird durch das Verhalten der Thiere, wie durch die Sectionsbefunde durchaus widerlegt. Aber auch schon mit unseren unmittelbaren Versuchsergebnissen dürfen wir uns zufrieden geben. Denn soviel auch die Leistungen des Grosshirns in der Wirbelthierreihe variiren mögen, das war von Anfang an nicht zu glauben, dass die gröbsten und niedersten Leistungen des Grosshirns beim niederen Säugethiere andere sein sollten, als beim höheren Säugethiere, vollends als bei diesem und beim Vogel; und nur die so bestimmt auftretenden Angaben, dass an den niederen Säugethieren nach der Enthirnung ein Rest des Gesichtssinnes erhalten sei, haben zu der im Grunde überflüssigen Untersuchung genöthigt. Jetzt, da diese Angaben als falsch erwiesen sind, da die niederen Säugethiere nach der Enthirnung, so lange sie nur leben, sich als vollkommen blind herausgestellt haben, tritt das einzig Natürliche in sein volles Recht: dass, wie bei den höheren Säugethieren und den Vögeln, so auch bei den niederen Säugethieren alle centralen Vorgänge des Gesichtssinnes an das Grosshirn geknüpft sind.

Hrn. Moeli's[1] Versuche mit partieller Zerstörung der Grosshirnrinde, Hrn. von Monakow's[2] Erfahrungen über die secundären Degenerationen nach partiellen Grosshirn-Exstirpationen und Hrn. von Gudden's[3] Ermittelungen über die partielle Sehnervenkreuzung lassen darüber hinaus noch erkennen, dass beim Kaninchen auch die Lage der Sehsphären und ihre Verbindung mit beiden Retinae derart, wie beim Hunde, wiederkehren. Entsprechende Beobachtungen habe ich beiläufig nach totalen und partiellen Exstirpationen einer Hemisphäre gemacht; doch ist es nicht lohnend erschienen, die Untersuchungen in der Richtung auszudehnen.

[1] Virchow's Archiv, Bd. 76. 1879. S. 481—3. — (Vergl. auch Renzi's unvollkommene Exstirpationen beim Meerschweinchen; s. oben S. 551 Anm. 1.)

[2] Archiv für Psychiatrie, Bd. 12. 1882. S. 150—3; 535 ff. — Bd. 14. 1883. S. 699 ff.

[3] von Gräfe's Archiv für Ophthalmologie, Bd. 25. Abth. I. 1879. S. 13—7.

Digitized by Google

23. Über den Blüthenbau der Zingiberaceen.

Von A. W. Eichler.

(Vorgetragen am 15. Mai; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXVI]; — ausgegeben am 22. Mai.)

Hierzu Taf. II.

Nachdem ich in einer grösseren Abhandlung »Beiträge zur Morphologie und Systematik der *Marantaceen*«, welche in den Sitzungen der mathematisch-physikalischen Classe vom 23. November 1882 und 19. Juli 1883 gelesen und sodann in den Abhandlungen dieser Akademie vom Jahre 1883 veröffentlicht worden ist, den Blüthenbau der *Marantaceen* einer eingehenden Erörterung unterzogen habe, sei es gestattet, heute die nächstverwandte Familie der *Zingiberaceen* nach gleicher Richtung hin zur Sprache zu bringen. Es bietet nämlich auch in dieser Familie der Blüthenbau einige Schwierigkeiten und Besonderheiten, die zu abweichenden Meinungen Anlass gegeben und bis jetzt noch keine definitive Erledigung gefunden haben.[1]

Die Blüthen der *Zingiberaceen* sind stets seitlichen Ursprungs in den Winkeln von Hochblättern. Sie bilden bald einfach botrytische (meist ähren- oder kopfförmige) Inflorescenzen oder durch Verzweigung der Nebenaxen Wickel in botrytischer Anordnung. Jede Blüthe hat ausser dem Deckblatt noch ein Vorblatt von bald schuppen-, bald scheiden- oder sackförmiger Beschaffenheit; bei einfachem Blüthenstande bleibt dasselbe steril, bei zusammengesetztem fungirt es als Deckblatt für die neue Verzweigung. Lässt sich seine Mediane sicher bestimmen, was in Fällen letzterer Art immer, bei sterilen Vorblättern aber nicht überall thunlich ist, so erscheint es in seitlicher Stellung, bald mehr, bald weniger nach hinten gerückt, doch nirgends wirklich adossirt.[2] In den successiven Gliedern der Wickel, wo solche

[1] Auch in meinen Blüthendiagrammen I. S. 169 ff. wurde hierüber ein abschliessendes Ergebniss nicht erzielt.

[2] Danach sind die Angaben in meinen Blüthendiagrammen l. c. sowohl für *Renealmia* (wo das Vorblatt steril und scheidenartig geschlossen ist), als für *Hedychium* (wo die Vorblätter fertil sind und einseitig offen) zu berichtigen. Auch ist die Partial-

Digitized by Google

vorkommen, fällt es natürlich abwechselnd nach rechts und links; in den einfachen Blüthenköpfen von *Costus Malortieanus* Wendl., deren Brakteen nach $^1/_7$ oder $^1/_8$ gestellt sind, finde ich es constant auf der anodischen Blüthenseite, bei anderen scheinen derartig feste Verhältnisse nicht zu bestehen.

Die Einzelblüthe (cf. Fig. 1 und 14) ist median-zygomorph, was sich besonders im Androeceum, minder prononcirt auch in der Blüthenhülle ausspricht. Letztere, epigynisch, wie im ganzen Verwandtschaftskreise der Familie, besteht aus zwei dreizähligen Cyklen, die wir als Kelch und als Krone bezeichnen wollen, obwohl sie häufig in der Färbung keine entsprechende Differenz zeigen und gleichmässig kronenartig ausgebildet erscheinen; beide sind bis zum Grunde von einander frei. Der Kelch (*k* in den Figuren) steht nach $\frac{2}{1}$, die Krone nach $\frac{1}{2}$ zur Abstammungsaxe, jener stellt sich gewöhnlich als eine dreizähnige Röhre oder einseitig (meist vorn) geschlitzte Scheide dar, die Krone ist unterwärts röhrig und geht dann in drei freie Abschnitte auseinander. Von diesen deckt regelmässig das unpaarig-hintere die beiden vorderen, von denen wieder der eine, gewöhnlich der, welcher dem Vorblatte gegenüberliegt, über den anderen hinweggreift; der hintere Abschnitt pflegt zugleich die beiden vorderen, unter sich gleichen, an Grösse, namentlich an Breite, mehr oder weniger, oft erheblich, zu übertreffen. Wir wollen denselben als Petalum 1 bezeichnen und von den beiden vorderen denjenigen, welcher dem Vorblatt gegenüberliegt und gewöhnlich, wie wir sahen, auch der äussere ist, als Petalum 2, den andern als Petalum 3 (in den Figuren mit p_1, p_2, p_3 bezeichnet).

Das Androeceum entspringt im Kronenschlunde, mit bald freien, bald am Grunde in verschiedener Art verwachsenen Theilen. Nur eins seiner Glieder ist fruchtbar ausgebildet, die übrigen stellen petaloide Staminodien dar. Früher hat man letztere wohl auch als Innenkrone bezeichnet; doch wollen wir uns nicht damit aufhalten, die schon vor mehr als fünfzig Jahren dargelegten Gründe zu wiederholen, welche ihren Staminalcharakter darthun. Das fruchtbare Staubblatt (*st* in den Figuren) steht vor Petalum 1 und hat eine introrse, im Unterschied von den Marantaceen symmetrisch-dithecische Anthere, die mit kräftigem, zuweilen petaloid verbreitertem (*Costus*, *Kaempferia*, Fig. 1) oder, wie bei *Zingiber*, *Cyphostigma*, *Curcuma*-Arten und ander-

---

Inflorescenz von *Hedychium* nicht als Fächel, sondern als Wickel aufzufassen; überdies ist durch ein Versehen das Diagramm Fig. 100 für *Hedychium Gardnerianum* Wall. angegeben, während es für *H. coronarium* Koen. gilt (bei *H. Gardnerianum* sind die Wickel nur zweiblüthig).

Digitized by Google

wärts, in ein blumenblattartiges Anhängsel auslaufendem Connectiv versehen ist. Von Staminodien ist überall mindestens eins vorhanden, das sogenannte Labellum (*lab* in den Figuren), das median nach vorn, zwischen die Petalen 2 und 3 gestellt, dem Kronenschlunde aber mit derart breiter Basis inserirt erscheint, dass letztere auch noch den Raum vor jenen Petalen selbst einnimmt. Dies Labell ist gewöhnlich der ansehnlichste Theil der ganzen Blüthe, gross und breit, zuweilen von eigenartiger Färbung, oft ausgerandet oder zweilappig (Fig. 1), wohl auch dreilappig mit grösserem, abermals ausgerandetem Mittelstück (*Zingiber officinale* u. a.), nicht selten am Rande wellig und gekerbt und dergl. mehr; in der Knospe greifen seine Ränder stets um das fertile Stamen und gewöhnlich auch noch um einander herum (cf. Fig. 2—4), bei *Globba* und *Mantisia* ist es mit dem Filament ein Stück verwachsen und sub anthesi an demselben heruntergeschlagen.

Auf diese beiden Gebilde, Stamen und Labell, bleibt in manchen Fällen das Androeceum beschränkt (*Costus, Amomum* u. a., Fig. 4); in andern kommen dazu noch zwei Staminodien, die wir wegen ihrer Stellung rechts und links zu den beiden ersteren, als »Flügel« bezeichnen wollen (*fl* in den Figuren). Ihre genaue Insertion ist über den beiden hintern Kelchtheilen; doch zeigen sie insofern Verschiedenheit, als sie bei einem Theil der Gattungen ausserhalb von Labell und Stamen eingefügt sind und diese beiden Theile in der Knospe bedecken (*Curcuma, Kaempferia* u. a., Fig. 2), während sie bei *Hedychium* zwar mit ihren Hinterrändern um das Stamen herumgreifen, mit ihren Vorderrändern jedoch sich vor das Labellum schieben und also von diesem bedeckt werden, ein Verhalten, das sich schon an der Insertionsstelle wahrnehmen lässt (Fig. 3). Im Übrigen sind die Flügel bald von ansehnlicher petaloider Entwickelung (*Curcuma, Kaempferia, Hedychium* u. s. w., Fig. 1), bald auf kleine Zähne reducirt, wie bei *Zingiber, Alpinia* u. a.[1]; bei *Mantisia* stellen sie schmale, lange, fast rankenartige Zipfel dar, welche dem Filament des fruchtbaren Stamens noch über das Labellum hinaus angewachsen erscheinen, während sie bei der nächstverwandten *Globba* in Form ovaler Lappen am Kronenschlunde stehen bleiben, wo sie auch bei *Hedychium, Kaempferia* u. a. ihre Stelle haben.

Es bleibt noch das Gynoeceum zu betrachten. Der Regel nach besteht dasselbe aus drei Carpellen, die in normaler Art mit den drei Kelchtheilen gleichgestellt sind; nur bei *Tapeinocheilus* kommt nach MIQUEL's Abbildung (Ann. Mus. Lugd. bat. IV. t. 4) ein dimeres Ovar bei sonst dreizähliger Blüthe vor. Einige wenige Gattungen haben

[1] Derartige Zähne zeigen keine regelmässige, oft gar keine Deckung mit den Nachbartheilen.

Digitized by Google

Parietalplacenta (*Globba, Mantisia* und die mir nicht aus Autopsie bekannten monotypischen Genera *Guillainia* Vieill. und *Hemiorchis* Kurz, nach Bentham-Hooker); die meisten bilden complete Scheidewände mit axiler Placentation. Ovula immer zahlreich in zwei oder mehreren Längsreihen pro Placenta (Fig. 1, *ov.*), ana- oder hemitrop, mit zwei Integumenten. — Der Scheitel des Ovars wird zunächst von einem einfachen Griffel gekrönt, der sich meist nach rückwärts biegend dem Filament des fruchtbaren Stamens anlegt, in eine Rinne zwischen den beiden Antherentheken aufgenommen wird und hiernach mit einer Narbe endigt, deren verschiedene Gestalten sowohl morphologisch wie systematisch nicht ohne Interesse, doch hier nicht weiter zu verfolgen sind. Ausserdem trägt der Ovarscheitel für gewöhnlich noch einen Nektarienapparat, der bald ein hohes, die Griffelbasis rundum einschliessendes, unregelmässig gelapptes Drüsenpolster darstellt, bald in Gestalt zweier distincter, kürzerer oder längerer, mitunter fast fädlicher Drüsen entwickelt ist, welche alsdann immer rechts und links nach vorn stehen und den Griffel, den sie jedoch dabei nicht selten halb umfassen, nach hinten drängen (Fig. 1, *dr*). Fehlen der epigynen Drüsen begegnet nur bei *Costus* und den Abbildungen nach auch bei *Tapeinocheilus* und *Cienkowskia*; bei ersterer Gattung erscheint hierfür der Blüthengrund mit einem dichten Haarpelz erfüllt, in welchen sich der Nektar aus einem Complex grosser, vielfach gewundener Septaldrüsen ergiesst, die bei den andern Gattungen fehlen.[1]

Die Abweichungen der *Zingiberaceen*blüthe von dem gewöhnlichen 3 + 3zähligen Monocotylen-Schema betreffen nach dem Vorstehenden wesentlich nur das Androeceum, alles übrige ist normal. Vom Androeceum sind es aber wieder nur die petaloid verbildeten Theile, welche zu Meinungsverschiedenheiten Anlass geben können und gegeben haben; beim fruchtbaren Stamen ist gemäss seiner Lage vor Petalum 1 niemals Zweifel gewesen, dass es dem inneren Kreise eines ursprünglich 3 + 3 zähligen Grundplans angehöre.

Die älteste, mir bekannte Erklärung rührt von Rob. Brown her[2]. Derselbe nahm an, Labellum und Flügel bildeten den äussern Kreis,

[1] Der Ovardurchschnitt von *Cienkowskia aethiopica* Schwf., in Schweinfurth's Beitrag zur Flora Aethiopiens Tab. I Fig. 7, zeigt oberhalb der Fächer ein circumscriptes eiförmiges Gebilde, das möglicherweise eine innere Drüse vorstellt, die dann freilich von den Septaldrüsen bei *Costus* und den *Marantaceen* sehr verschieden wäre.

[2] Rob. Brown, Prodr. Fl. Nov. Holl. (1810) p. 305; desgl. Notes and observations of Indian plants, London 1830—2 (Miscell. bot. works vol. II. p. 550). — In der erstgenannten Schrift wurden allerdings Labell und Flügel noch als innere Krone bezeichnet.

Digitized by Google

das fruchtbare Stamen und die beiden epigynischen Drüsen den innern; letztere wären somit als verkümmerte Staubgefässe anzusehen, das Labellum als ein einfaches Blatt (Fig. 5). Derselben Ansicht begegnen wir dann späterhin auch bei KÖRNICKE, HORANINOW, LE MAOUT et DECAISNE[1] u. a., nur dass man theilweise, wie z. B. KÖRNICKE, die epigynen Drüsen nicht für verbildete Staubgefässe, sondern eher für verbildete Griffel halten wollte, wonach denn vom innern Staminalkreis nur das fertile Staubblatt entwickelt wäre.

Zu einer andern Auffassung wurde LESTIBOUDOIS geführt, dem wir sehr eingehende Untersuchungen über die ganze Scitamineengruppe verdanken. Nachdem er zuerst in einer Abhandlung über *Hedychium* vom Jahre 1829 und in einer zweiten über *Globba* (richtiger *Alpinia*) vom Jahre 1830[2] zu demonstriren gesucht hatte, dass der äussere Staminalkreis durch das Labell, der innere durch das Stamen und die Flügelblätter repräsentirt werde, äusserte er sich elf Jahre später, in einer Abhandlung über den Blüthenbau der gesammten Scitamineen, wie auch der Orchideen[3], dahin, dass der innere Kreis gebildet werde vom Stamen und dem Labell, das seinerseits aus den beiden vorderen Gliedern dieses Kreises zusammengesetzt sei (Fig. 6), während der äussere Kreis entweder völlig unterdrückt oder nur mit den beiden Flügelblättern entwickelt werde, das dritte Glied könnte indess vielleicht auch im Labell stecken. — Dieselbe Ansicht reproducirte später VAN HALL auf vergleichende Beobachtungen hin[4]; PAYER und BAILLON fanden sie durch die Entwickelungsgeschichte, VAN TIEGHEM durch das Verhalten der Gefässbündel bestätigt.[5]

Der Angelpunkt der ganzen Frage liegt offenbar im Labell, ob dasselbe ein einfaches Blatt ist, wie R. BROWN wollte, oder aus zweien zusammengesetzt, wie LESTIBOUDOIS annimmt. Ist es einfach, so muss es wegen seiner Alternanz mit den Petalen 2 und 3 dem äussern Kreise angehören, der dann durch die beiden Flügelblätter, wo solche vorhanden sind, completirt würde (Fig. 5); ist es doppelt, so gehört es dem innern Kreise an, der dadurch vollzählig wird, während der äussere auf die beiden Flügelblätter beschränkt bleibt (Fig. 6).

Nach dem äussern Ansehen ist die Frage nicht schlechthin zu entscheiden. Zwar spricht die Breite des Labells, seine häufig zwei-

[1] KÖRNICKE, Monographiae Marantacearum Prodromus, Moskau 1859 und 1862; HORANINOW, Prodromus Monographiae Scitaminearum, St. Petersburg 1862; Le MAOUT et DECAISNE, Traité général de botanique (Paris 1865) p. 556, nach dem Diagramm.

[2] Annales des sciences natur. I. Ser. vol. 17 p. 113 ff. und vol. 20 p. 302 ff.

[3] Ann. Sc. nat. II. Ser. vol. 15 p. 305 ff. und vol. 17 p. 205 ff. (1841 und 1843).

[4] VAN HALL, Observationes de Zingiberaceis, Leiden 1858.

[5] PAYER, Organog. comp. de la fleur (1857) p. 674 t. 144; BAILLON, Adansonia XI p. 204 ff. tab. 12 (1876); VAN TIEGHEM, Anat. comp. de la fleur (1871) p. 138.

Digitized by Google

lappige Beschaffenheit, mit welcher sich oft auch eine zweiseitige Nervatur verbindet, und seine breite, vor den Petalen 2 und 3 sich hinziehende Insertion zu Gunsten der Duplicität; allein man weiss und kann speciell am Labellum der benachbarten *Orchideen* sehen, wie sehr auch ein einzelnes Blatt sich zu compliciren vermag. Von grösserem Gewicht erscheinen die von PAYER und BAILLON beigebrachten Daten der Entwickelungsgeschichte[1]; nachdem Kelch und Krone angelegt wurden, erscheint zuerst das fertile Staubblatt als Höcker vor Petalum 1, und sodann zwei Anlagen von Pet. 2 und 3, simultan unter einander, die anfangs völlig getrennt, nachher mitsammen verwachsen und das Labellum bilden[2].

Hiernach könnte man eigentlich die Sache für entschieden halten, PAYER's und BAILLON's Beobachtungen als correct vorausgesetzt[3]; doch sind gleichwohl noch einige Punkte vorher in's Reine zu bringen, welche der Entwickelungsgeschichte zum Trotz Zweifel an der Richtigkeit der Auffassung erwecken.

Zunächst kommen hier gewisse teratologische Fälle in Betracht, wie sie von ARTH. GRIS, KÖRNICKE und auch von BERG beschrieben worden sind. GRIS[4] fand bei *Zingiber Zerumbet* Rosc. halb oder ganz pelorische Blüthen, bei welchen im Falle grösster Regelmässigkeit drei fruchtbare Stamina über den Petalen, und drei blumenblattartige Staminodien in einem äussern episepalen Kreis entwickelt waren (Fig. 7, 8). Indem nun GRIS das median-vordere Staminodium des äussern Kreises mit dem Labellum gleich setzt, muss er die beiden accessorischen Stamina des innern Kreises für Neubildungen ansehen, ebenso wie im äussern Kreise die beiden Flügelstaminodien, die in der normalen Blüthe jener Art nicht entwickelt sind. Es ist jedoch auch eine andere Deutung möglich. Wenn nämlich das Labell ein Doppelorgan vorstellt und dem innern Kreise angehört, so wird dadurch, dass sich in der Pelorie jede seiner Hälften fruchtbar und zugleich selbständig entwickelt, das Verhalten der Fig. 7 und 8 bezüglich des innern Kreises zu Stande gebracht werden; der äussere Kreis aber wäre in allen Theilen eine Neubildung. Dafür kann geltend gemacht werden, dass, wie GRIS selbst hervorhebt, das vermeintliche Labell

---

[1] PAYER studirte *Alpinia nutans*, BAILLON hauptsächlich *Zingiber officinale*.

[2] Es ist dies also eine Bestätigung der Deutung von LESTIBOUDOIS, und wenn sich BAILLON in entgegengesetztem Sinne äussert, so kann er nur die älteren Publicationen jenes Autors gemeint haben.

[3] Zur Nachuntersuchung hatte ich leider noch keine Gelegenheit, einestheils, weil die Zingiberaceen in unseren Gewächshäusern zu spärlich blühen, und sodann, weil die Blüthenknospen gewöhnlich schon zu weit entwickelt sind, wenn man sie überhaupt an der Pflanze bemerkt.

[4] Ann. des sc. nat. IV. Ser. vol. 11 (1859) p. 265 ff. tab. 3.

Digitized by Google

der Pelorie dem der normalen Blüthe durchaus nicht gleicht, sondern vielmehr den beiden (neugebildeten) Flügeln, nur dass es noch schmäler ist als diese (Fig. 7, 8); es erscheint dadurch als ein reducirtes Glied des äusseren Kreises, was damit übereinstimmt, dass es in der normalen Zingiberaceenblüthe stets unterdrückt ist, während die beiden Flügel doch häufig zur Ausbildung gelangen.

Ein zweiter, in Fig. 10 dargestellter Fall von *Zingiber Zerumbet*, in welchem zwei Flügelstaminodien entwickelt waren, ohne sonstige Veränderung der Blüthe, beweist für die Natur des Labells so wenig, wie diejenigen Zingiberaceenblüthen, bei welchen jene Staminodien normal vorhanden sind; der Fall Fig. 9 aber, in welchem auf der einen Seite des Labells ein fertiles Stamen und zugleich ein petaloides Flügelblatt sichtbar sind, die in der normalen Blüthe fehlen, lässt sich dahin auffassen, dass nur die eine Hälfte des Labells fertil ausgebildet wurde, die andere in gewöhnlicher Form. Die Figur allerdings, welche das Labell im Grundriss zeigt, scheint dieser Deutung zu widersprechen; allein sie ist wohl nicht ganz correct, resp. durch vorgefasste Meinungen beeinflusst. Eine solche Beeinflussung zeigt deutlich auch das Diagramm einer halbpelorischen Blüthe von *Zingiber roseum* Rosc. auf der Tafel von *Zingiber officinale* in BERG und SCHMIDT's »Darstellung u. s. w. der officinellen Gewächse«; im Grundriss wird ebenfalls, wie bei GRIS, ein Staubblatt innerhalb des unveränderten Labellums dargestellt, die nichtschematische Zeichnung des Androeceums aber (Fig. 11) zeigt das Stamen am einen Rande des bedeutend reducirten Labells und lässt sich ohne Weiteres durch fertile Umbildung der einen Hälfte jenes Organs verstehen. — Diese Bildungsabweichungen insgesammt lassen sich also nicht zur Unterstützung der R. BROWN'schen Theorie von der Zingiberaceenblüthe verwenden; sie können vielmehr, oder doch mindestens ebenso wohl, für die LESTIBOUDOIS'sche Deutung geltend gemacht werden.

Ein Punkt in dem BERG'schen Falle bedarf noch einer besonderen Besprechung. Von den in der normalen Blüthe zu zweien vorhandenen epigynen Drüsen war in jener Halbpelorie nur eine entwickelt, die andere — angeblich die mit dem neuen Stamen correspondirende — fehlte. BERG urtheilt hieraus, diese Drüse sei zu einem Stamen umgebildet worden, die Drüsen hätten daher wirklich, wie R. BROWN wollte, die Bedeutung von Staminodien. Trotzdem halte ich eine solche Auffassung für unzulässig. Die Theile des Androeceums, ob fruchtbar oder staminodial, stehen bei den *Zingiberaceen*, wie schon VAN HALL hervorgehoben (l. c. p. 25), stets im Schlunde der Blumenkrone, weit vom Blüthengrunde entfernt; die Drüsen haben hingegen auf dem Ovarscheitel ihren Platz und sind ohne allen Zusammenhang

Digitized by Google

mit der Blumenkrone; das neue Stamen in dem Berg'schen Falle steht aber ebenfalls im Kronenschlunde (s. Fig. 11). Dass gleichzeitig die correspondirende Drüse fehlt, erscheint daher als ein irrelevantes, wenngleich eigenthümliches Zusammentreffen; es ist im Übrigen die einzige Beobachtung dieser Art. — Was nun die Drüsen eigentlich vorstellen, darauf werden wir unten nochmals zu sprechen kommen.

Auch bei *Hedychium* sind Bildungsabweichungen in der Blüthe beobachtet worden, welche gegen die Lestiboudois'sche Auffassung Verwerthung fanden. Sie kommen nicht selten bei den in unsern Gärten cultivirten Arten *Hedychium Gardnerianum* Wall. und *H. thyrsiforme* Sm. vor; die genauere Beschreibung eines einschlägigen Falles findet sich bei Körnicke.[1] Das Labell theilt sich tiefer, als in der normalen Blüthe, zuletzt bis zum Grunde, und dabei tritt zwischen den beiden Hälften, innerhalb derselben, ein besonderes, schmäleres Blättchen auf. In einem besonders hübschen Falle dieser Art, den ich unter A. Braun's nachgelassenen Manuscripten finde, stellt sich die Blüthe dar wie in Fig. 12. Das Labell ist in zwei völlig gesonderte Stücke zerlegt, das neue Blättchen zwischen ihnen zeigt die Beschaffenheit der Flügel. Körnicke, der das Labell für ein einfaches Glied des äussern Kreises hält, sieht hierin (resp. in dem von ihm dargestellten ähnlichen Falle) eine Dreitheilung dieses Blatts; man wird dem aber schwerlich beipflichten, wenn man die völlige Selbständigkeit, die Insertions- und Gestaltverhältnisse der drei bezüglichen Theile, wie sie Fig. 12 zeigt, in's Auge fasst. Plausibler ist hier jedenfalls die Vorstellung, dass das Labell, ursprünglich doppelt, in seine zwei Hälften auseinander gegangen und das Mittelblatt als Neubildung hinzugekommen sei. Es besteht aber darin eine Schwierigkeit, dass das Mittelblättchen (das in der normalen Blüthe nicht entwickelt ist) nach jener Vorstellung im äusseren Kreise angenommen werden muss, während es hier in Fig. 12, wie auch in dem von Körnicke dargestellten Falle, innerhalb der Labellhälften steht.

Über diese Schwierigkeit lässt sich nicht anders hinauskommen, als durch die Annahme einer Verschiebung. Das scheint freilich recht willkürlich, wird sich auch ontogenetisch nicht beweisen lassen. Denn erstens handelt es sich um Ausnahmsvorkommnisse, die sich der entwickelungsgeschichtlichen Beobachtung entziehen; zweitens dürfte, von andern Erfahrungen aus zu urtheilen, die Stellung auch bei Anlage der Organe nicht anders sein, als im fertigen Zustand. Wir werden uns daher mit einem blossen Wahrscheinlichkeitsbeweise begnügen müssen. Ein solcher aber wird durch *Hedychium* selbst

[1] Monogr. Marantac. Prodr. II. Theil S. 9.

Digitized by Google

geliefert; die Flügelstaminodien nämlich, welche unbestritten dem äussern Kreise angehören und bei den übrigen Gattungen, in denen sie überhaupt vorkommen, in der Knospe auch Stamen sowohl als Labell bedecken, greifen hier bei *Hedychium* nur um ersteres herum, werden hiergegen vom Labell gedeckt (s. Fig. 3, auch Fig. 12 bei fl_1 und fl_2). Sie sind also, so zu sagen, nur mit den Hinterrändern im äusseren Kreise geblieben, mit den Vorderrändern haben sie sich nach innen geschoben. Denken wir uns die Ursache, welche diese Verschiebung bewirkte, in derselben Richtung (also nach vorn hin) weiterschreitend, so wird das accessorische Blatt, das in der Mediane der Blüthe steht, gänzlich nach innen gelangen. In den oben beschriebenen Pelorien von *Zingiber*, wo die Flügelstaminodien mit beiden Rändern im äusseren Kreise blieben, kam auch das sechste (median-vordere) Staminalblatt ausserhalb des Labells, resp. aussen von dessen Umwandlungsproducten zur Entwickelung (Fig. 7, 8).

Das Verhalten von *Hedychium* wäre hiernach eine Art Obdiplostemonie.[1] Bekanntlich ist solche bei den Dicotylen häufig; bei den Monocotylen würde sie hier zum erstenmale constatirt werden. Da sie sich bei *Hedychium* kaum anders als durch Verschiebung der beiden Staminalkreise erklären lässt, so kann dies eine Unterstützung für die gleiche Annahme auch bei den Dicotylen liefern, eine Annahme, die bereits ČELAKOVSKY gemacht und der ich in meinen Blüthendiagrammen II. S. XVIII ebenfalls das Wort geredet habe.

Es lässt sich noch fragen, ob jenes sechste Staminalblatt, das wir in den Antholysen von *Hedychium* sowohl, als in den Pelorien von *Zingiber* zur Entwickelung gelangen sahen, nicht etwa auch in der normalen Blüthe vorhanden, nur mit dem Labell völlig verschmolzen sein möchte. Hierüber könnte wesentlich nur die Entwickelungsgeschichte Auskunft geben; in den von PAYER und BAILLON beschriebenen Fällen aber war von diesem Blatte nichts in der Anlage wahrzunehmen. Da auch äusserlich gewöhnlich nichts bemerkt wird, was auf dasselbe hindeutete — gelegentlich findet sich jedoch in der Ausrandung des Labells ein Mittelzahn, nicht selten z. B. gerade bei *Hedychium Gardnerianum*, dem auch die Fig. 12 angehört — so dürfte in der Mehrzahl der Fälle völlige Unterdrückung jenes Blattes anzunehmen sein.

---

[1] »Eine Art« insofern, als die beiden Flügelstaminodien doch mit den Hinterrändern noch im äusseren Kreise stehen.

[2] Die von ČELAKOVSKY (Flora 1875 S. 502) hervorgehobenen Beispiele von *Asphodelus* und *Triglochin* sind insofern nicht ganz gleichartig, als hier nicht die beiden Staminalkreise, sondern die beiden Kreise der Petalen und äusseren Stamina die Verschiebung erfahren; doch wäre es dem Wesen nach dieselbe Erscheinung.

Digitized by Google

Wir halten nach allem Vorstehenden die Bedenken und Einwände, welche gegen Lestiboudois' (zweite) Auffassung der Zingiberaceenblüthe erhoben worden sind, oder nach dem Stand unseres Wissens in diesem Gebiete erhoben werden könnten, für beseitigt und betrachten als festgestellt, dass der innere Kreis des Androeceums sich zusammensetzt aus dem fertilen Stamen und dem aus den zwei andern Gliedern des Quirls verwachsenen Labell, während der äussere Kreis entweder völlig fehlt oder nur mit den beiden hinteren Gliedern (den Flügeln) entwickelt ist. —

Von Theilen der Blüthe, über welche die Ansichten auseinandergingen, wurden oben noch die epigynen Drüsen namhaft gemacht. Dass sie keine rudimentären Staubgefässe sein können, wie R. Brown wollte, habe ich bereits gezeigt; sie sind aber auch für Stylodien, d. i. verkümmerte Griffel angesprochen worden (Lestiboudois, Körnicke u. a.). Dies ist aber ebenfalls nicht zulässig. Der Griffel bildet sich, wie die Entwickelungsgeschichte zeigt (conf. Payer und Baillon), aus den Gipfeln aller drei Carpelle, hat auch drei mit diesen correspondirende Gefässbündel, einen dreischenkligen Längscanal (conf. Fig. 2—4 bei *gr*) und mitunter eine dreilappige Narbe; die Drüsen können daher nicht aus den Endtheilen zweier der drei Fruchtblätter hervorgegangen sein. Sie sind vielmehr nichts weiter, als Gewebewucherungen des Ovarscheitels zum Zweck der Nektarsecretion. Wie bei solchen Apparaten gewöhnlich, entstehen sie (nach Payer und Baillon) erst spät, lange nach Anlegung aller übrigen Theile. Stellen sie, wie es häufig der Fall, zwei distincte Körper dar, so befinden sie sich über den beiden vordern Scheidewänden des Ovars; hierin zeigen sie eine gewisse Beziehung zu den sogenannten Septaldrüsen. Dieselbe äussert sich denn auch darin, dass bei *Costus* statt epigyner Drüsen solche in den Septen (im obern Theil des Ovars) auftreten; die Drüsen werden gewissermaassen in die Scheidewände zurückgezogen, ein Verhalten, das bei den nächstverwandten *Cannaceen* und *Marantaceen* constant wird. Hier sind sie allerdings, wie auch bei *Costus*, in sämmtlichen drei Scheidewänden des Ovars vorhanden; dass sie bei Epigynie nur über den beiden vordern Scheidewänden stehen, mag daher rühren, dass der Platz über dem dritten Septum von dem, über der Basis sich nach hinten biegenden oder auch gleich an seiner Ursprungsstelle excentrisch nach hinten gerückten Griffel eingenommen wird.

Die Drüsen erreichen bei manchen Arten die Länge eines halben Zolls und darüber; in dem schon oben nach anderer Richtung hin besprochenen Ausnahmsfall von *Hedychium thyrsiforme*, den Körnicke beschrieben hat, war eine derselben sogar über den Kronenschlund

Digitized by Google

hinaus zu einem langen, fädlich-keuligen Körper vorgezogen. Für eine Drüse allerdings ungewöhnlich; doch wird sie dadurch weder als Staminodium, noch als Stylodium legitimirt.

Vergleichen wir nunmehr die Structur der Zingiberaceenblüthen, wie wir sie im Vorstehenden erkannt haben, mit den nächstverwandten Familien, zuvörderst den *Marantaceen*. Dazu ist vor allem erforderlich, dass wir die Blüthen zu ihren Abstammungsaxen richtig orientiren. Hierin ist vordem allgemein gefehlt worden und sowohl die vergleichenden Diagramme von LESTIBOUDOIS, als von LINDLEY, VAN HALL und selbst dem genauen KÖRNICKE sind in dieser Hinsicht — von sonstigen Differenzen in der Construction der Blüthe abgesehen — irrthümlich. Bei den *Zingiberaceen* nun stehen die Blüthen einzeln in den Achseln der Hochblätter; bei ihnen ist daher die Orientirung ohne Weiteres so gegeben, wie Fig. 14 es zeigt. Die *Marantaceen* hiergegen tragen die Blüthen paarweise in den Hochblattachseln (Fig. 15), und jedes Paar stellt, wie ich in meinen »Beiträgen zur Morphologie und Systematik der *Marantaceen*« dargethan habe, eine Cyma vor mit steriler (dabei häufig unentwickelter) Primanaxe. Gegen letztere müssen demnach die Einzelblüthen orientirt werden, um sie mit denen der *Zingiberaceen* vergleichen zu können; in Fig. 13 ist die linke Blüthe eines Paares von *Maranta arundinacea* auf diese Art dargestellt. Alsdann aber ergiebt der Vergleich mit Fig. 14 eine auffallende Übereinstimmung. Nicht nur, dass Vorblatt und Blüthenhülle sich beiderseits in der nämlichen Orientirung darstellen, sowie dass von der Corolle der erste Abschnitt median nach hinten, der zweite dem Vorblatt gegenüber steht (dies bei den *Marantaceen* constant, bei den *Zingiberaceen* als Regel), sondern es zeigt auch das fruchtbare Stamen beiderseits die nämliche Position median nach rückwärts; es entsprachen den beiden Hälften des *Zingiberaceen*-Labells bei den *Marantaceen* jene zwei Staminodien, die wir l. c. als Kapuzenblatt (*k*) und Schwielenblatt (*sw*) bezeichnet haben, und den beiden Flügelstaminodien in der *Zingiberaceen*blüthe zwei eben solche in der gleichen Orientirung bei *Maranta*; das sechste Stamen aber, median nach vorn im äusseren Kreise, ist in beiden Familien unterdrückt. Und weiter: wie bei den *Zingiberaceen* Stamen und Labell, also die Glieder des inneren Kreises stets vorhanden sind, so ist dies auch, mutatis mutandis, bei den *Marantaceen* der Fall; und wie die Flügelstaminodien des äusseren Kreises bei vielen *Zingiberaceen* verkümmern oder ganz ausbleiben, so begegnet das Gleiche unter den *Marantaceen* bei *Stromanthe* und gewissen *Calatheen* (aus der Gruppe von *Monostiche*) mit beiden Flügeln, bei

Digitized by Google

Thalia, *Ischnosiphon* und der grösseren Hälfte von *Calathea* nur mit einem. Die Übereinstimmung ist somit eine sehr vollkommene; die Differenzen bestehen im Wesentlichen nur darin, dass bei den *Marantaceen* das fertile Stamen blos halbseitig fruchtbar und demnach mit einer halbirten Anthere ausgestattet, auf der anderen Seite dagegen petaloid verbildet ist, sowie, dass die beiden anderen Glieder des inneren Staminalkreises frei bleiben und in ihrer Gestalt sehr von einander verschieden sind.

Auch in der Entwickelungsgeschichte besteht eine grosse Ähnlichkeit. In beiden Familien bildet sich vom Androeceum der innere Kreis zuerst, da er die grössere Constanz und ansehnlichere Entwickelung besitzt, und von seinen drei Gliedern erscheint wieder das fertile Stamen als das vollkommenere am frühesten. Während aber bei den *Zingiberaceen* die beiden Labellhälften gleichzeitig unter sich in die Erscheinung treten, wird bei den *Marantaceen* das mit Petalum 2 correspondirende Kapuzenblatt früher angelegt, das Schwielenstaminodium über Petalum 3 zuletzt.

Es ist einleuchtend, dass diese nahe Übereinstimmung sehr zu Gunsten der Deutung spricht, welche wir mit Lestiboudois vom Androeceum der *Zingiberaceen* gegeben haben. Allerdings bestanden auch bezüglich der *Marantaceen* Zweifel, insbesondere von Seiten der Entwickelungsgeschichte; doch sind dieselben durch meine neuerlichen Untersuchungen beseitigt worden, so dass man von den *Marantaceen* als von einer sicheren Basis ausgehen kann. Wollte man bei den *Zingiberaceen* R. Brown's Deutung acceptiren, so würde zwischen beiden, so nahe verwandten Familien eine grosse Kluft entstehen; der innere Staminalkreis, der bei den *Marantaceen* stets vollzählig ist, würde bei den *Zingiberaceen* stets reducirt sein und dafür der äussere Kreis bevorzugt, der bei den *Marantaceen* eine constante Reduction zeigt, bis zum völligen Fehlen.

Die hervorgehobenen Differenzen in der Blüthenorganisation der beiden Familien stehen nun in augenscheinlichem Zusammenhang mit den Unterschieden der Inflorescenz. Bei den *Zingiberaceen* haben wir in den Hochblattachseln Einzelblüthen, bei den *Marantaceen* Blüthen-Paare; hier wie dort besteht, jedenfalls aus biologischen Gründen, eine »Tendenz« zu medianer Zygomorphie; somit wird bei den *Zingiberaceen* die Einzelblüthe median zygomorph, bei den *Marantaceen* das Blüthenpaar. Die Einzelblüthen der Paare geben hiernach ihre Eigensymmetrie auf, zu Gunsten einer gemeinsamen. Dabei wird, soweit als thunlich, in der Doppelblüthe der *Marantaceen* wieder die Organisation der Einzelblüthe der *Zingiberaceen* zu erreichen getrachtet. Die Halbantheren im Blüthenpaare der *Marantaceen* vereinigt gedacht, geben eine median

Digitized by Google

nach hinten gestellte vollständige Anthere; die petaloide Umbildung und grössere Ausladung des Androeceums erfolgt hauptsächlich nach der gemeinsamen Vorderseite, in der Einzelblüthe also auf der vom Vorblatt abgekehrten. Dorthin richtet sich die Petalisation der zweiten Staminalhälfte, dort erscheint das erste der beiden innern Staminodien (das Kapuzenblatt), dort hat das Flügelstaminodium des äusseren Kreises, wenn nur eins entwickelt wird, seine Stelle. Einer weitergehenden Verähnlichung der Blüthenpaare der *Marantaceen* mit den Einzelblüthen der *Zingiberaceen* steht die sonstige Organisation im Wege; doch kann vielleicht noch hervorgehoben werden, dass, wo bei den *Marantaceen* auch die oberen Flügelblätter entwickelt werden, dieselben vereinigt gedacht eine Figur zu Stande bringen würden, welche das grosse obere Petalum der *Zingiberaceen* oder in gewissen Gattungen das petaloide Connectivanhängsel im Ungefähren nachahmt.

Diese ganze »Mimicry« kann allerdings blos da biologisch wirksam sein, wo bei den *Marantaceen* beide Blüthen der Paare sich gleichzeitig entfalten. Dies ist nun zwar häufig, aber doch nicht immer der Fall; wo letzteres zutrifft, erscheint die Einrichtung zwecklos. Im Übrigen ist sie gegenüber den Zingiberaceen als eine Complication, eine gesteigerte Theilung der Arbeit zu betrachten; es sind daher, wenigstens in Bezug auf die Blüthenorganisation, die *Marantaceen* phylogenetisch höher zu stellen, als jene erstere Familie, die ihnen sonst allerdings zunächst anzureihen ist.

Eine Mittelstufe zwischen *Zingiberaceen* und *Marantaceen* bildet, wie in anderer Hinsicht,[1] so auch bezüglich des Blüthenbaues, die Gattung *Canna*. Ihre Blüthen stehen gewöhnlich zu zweien in den Hochblattachseln, bilden aber nicht Paare von der Art der *Marantaceen*, sondern zweiblüthige Wickel, wie sie auch bei manchen *Zingiberaceen* (z. B. *Hedychium Gardnerianum*) vorkommen. Die Orientirung der Blüthen ist aber eine andere, als bei den *Zingiberaceen*. Betrachten wir zunächst die Primanblüthe.[2] Sie hat ihren Kelch nicht nach $\frac{2}{1}$ gestellt, sondern nach $2|1$; das unpaare ist das genetisch erste Kelchblatt und fällt constant nach rechts, dem stets links befindlichen Vorblatt diametral gegenüber. Somit kommen die Petala, sowie die Glieder des inneren Staminalkreises nach $1|2$ zu stehen; das ge-

[1] So z. B. in den Blättern, denen die Articulation unter der Spreite fehlt, welche den *Marantaceen* eigenthümlich, den *Zingiberaceen* fremd ist, während die constante Rechtsrollung der Spreiten in der Knospe, wodurch *Canna* charakterisirt wird, wohl bei vielen *Marantaceen*, doch nirgends unter den *Zingiberaceen* vorkommt. Auch im Ovar zeigt sich eine Mittelstellung: die vieleiigen Fächer hat *Canna* mit den *Zingiberaceen*, die Septaldrüsen mit den *Marantaceen* gemeinsam.

[2] Vergl. dazu meine Blüthendiagramme I S. 172, sowie den Aufsatz über *Canna* in der Botan. Zeitung 1873 No. 12 ff.

Digitized by Google

netisch erste Petalum sowie das ihm superponirte fruchtbare Staubblatt liegen rechts nach hinten. Man erhält die ganze Orientirung, wenn man sich das Diagramm Fig. 14 um $^1/_6$ rechts herum gedreht denkt. Eine Medianzygomorphie ist nunmehr in der Blüthe nicht zu Stande zu bringen; es tritt eine ähnliche Veränderung ein, wie bei den *Marantaceen*. Die nach abwärts gerichtete Hälfte des fertilen Staubblatts wird petaloid und die beiden andern Glieder des inneren Kreises, die nun nicht mehr symmetrisch einander gegenüberstehen, bilden sich ungleich aus. Das vordere wird dabei labellartig, wenn auch nicht so breit wie das, ja aus zwei Gliedern bestehende Labell der Zingiberaceen; das links seitliche wird flügelförmig. Das Schema des innern Staminalkreises gestaltet sich also wie hier: $fl \lessdot \overset{st}{\underset{lab}{|}}$, wenn wir die in den Figuren unserer Tafel gebrauchten Buchstaben anwenden. Vom äussern Kreise wird oftmals nur ein Glied entwickelt und zwar zwischen Stamen und Labell, wo es auch bei den *Marantaceen* auftritt, wenn nur eins entwickelt wird. Hier bei *Canna* steht es nunmehr dem Flügelblatt des innern Kreises symmetrisch gegenüber und nimmt denn auch dieselbe flügelartige Beschaffenheit an wie dies $\left(fl \lessdot \overset{st}{\underset{lab}{|}} fl\right)$. Bei manchen Arten kommt dazu noch das zweite Staminodium, das wir bei den *Zingiberaceen* im äusseren Kreise sahen; es liegt, wie dort, auf der dem ersten gegenüberliegenden Seite des Stamens und nimmt bei *Canna* ebenfalls die Gestalt eines Flügelblattes an $\left(\begin{matrix} fl \\ fl \lessdot \overset{st}{\underset{lab}{|}} fl \end{matrix}\right)$. Das sechste Glied des Androeceums jedoch, das dem fertilen Stamen diametral gegenüber befindliche des äusseren Kreises, kommt auch bei *Canna*, ebenso wie bei den *Zingiberaceen*, normal nicht zur Ausbildung.

Denken wir uns jetzt das Labell von *Canna*, kapuzenförmig, das Flügelblatt des inneren Kreises schwielenartig ausgebildet, so ist die *Marantaceen*blüthe gegeben. Nur wird die Orientirung der Einzelblüthe wieder wie bei den *Zingiberaceen* (cf. Fig. 13), unter Vergesellschaftung der Blüthen zu Paaren in der oben geschilderten Weise.

Die gepaarten Blüthen der *Marantaceen* sind, wie wir wissen, antidrom und daher symmetrisch zu einander; in den Wickeln von *Canna* sind sie homodrom und ebenbildlich gleich. Doch sollte man hier zufolge des Wickelwuchses, wie er sich aus der Vorblattstellung ergibt, ebenfalls Antidromie erwarten. Worin mag diese so auffallende und geradezu ohne Analogon dastehende Abweichung ihren Grund haben? Vielleicht darin, dass sich bei *Canna* die zweite Blüthe

Digitized by Google

sehr viel später öffnet, als die erste, während bei den *Marantaceen* die Entfaltung in den einzelnen Blüthenpaaren ganz oder nahezu gleichzeitig erfolgt. Es fällt unter diesen Umständen der Grund zu einer symmetrischen Ausbildung mit der ersten Blüthe hinweg und es mag für die zweite Blüthe vortheilhafter erscheinen, ihre Theile den besuchenden Insecten in der nämlichen Lage darzubieten, wie es bei der ersten, nunmehr verwelkten, der Fall war. Für mehr als eine blosse Idee (die ich übrigens schon früher einmal angedeutet habe, s. Botan. Zeitung 1873 S. 231) will ich dies jedoch nicht ausgeben; eine sachgemässere Erklärung kann ich zur Zeit nicht liefern.

Erscheinen nach allem Vorstehenden die drei Gruppen: *Zingiberaceen, Cannaceen* und *Marantaceen,* so nahe mit einander verwandt, dass man sie ohne sonderlichen Zwang in die nämliche Familie stellen, die *Marantaceen* als modificirte *Zingiberaceen* betrachten könnte und die *Cannaceen* als Übergang, so ergiebt der Vergleich mit der letzten Abtheilung der Scitamineenreihe, den *Musaceen,* eine tiefere Kluft. Wenigstens im Baue des Androeceums. Gerade das median hintere Staubblatt, das bei jenen ersteren Gruppen stets fertil entwickelt ist, wird bei den *Musaceen* fast ausnahmslos steril oder ganz unterdrückt; und die fünf vorderen Stamina, die bei den *Zingiberaceen, Cannaceen, Marantaceen* stets steril und theilweise unterdrückt werden, sind bei den *Musaceen* überall vollzählig und fruchtbar. Hierbei zeigt sich im Kreise der *Musaceen* noch die Besonderheit, dass das median hintere, sterile oder abortirte Staubblatt bei *Heliconia* dem äussern, bei den übrigen Gattungen dem innern Kreise angehört, während in den drei andern Gruppen, wie wir sahen, das fertile Stamen stets in dem innern Kreise, vor dem genetisch ersten Petalum gelegen ist. Es lassen sich aus diesem allem Anhalte zu einer schärferen systematischen Umgrenzung und Charakteristik der einzelnen Scitamineen-Abtheilungen gewinnen; doch verzichte ich für jetzt darauf einzugehen.

Digitized by Google

Figurenerklärung.

Fig. 1. Blüthe von *Kaempferia ovalifolia* Rosc., zergliedert (nach Roxburgh, Plants of the coast of Coromandel t. 278; an andern, lebend untersuchten Arten bestätigt).

Fig. 2. Querschnitt durch den obern Theil der Blüthenknospe von *Curcuma Roscoeana* Wall.; Flügelblätter ausserhalb des Labells.

Fig. 3. Querschnitt durch die Blüthenknospe von *Hedychium coronarium* Koen., dicht oberhalb des Schlundes; Flügelblätter innerhalb des Labells.

Fig. 4. Querschnitt durch den obern Theil der Blüthenknospe von einer *Renealmia* aus Caracas (leg. Gollmer), Flügelblätter auf kurze, in dem Schnitt nicht sichtbare Zähnchen reducirt.

Fig. 5. Grundriss des *Zingiberaceen*-Androeceums nach R. Brown's Auffassung.

Fig. 6. Das nämliche nach der (spätern) Auffassung von Lestiboudois.

Fig. 7. Pelorie von *Zingiber Zerumbet* Rosc.

Fig. 8. Diagramm des Androeceums aus derselben.

Fig. 9 und 10. Diagramme des Androeceums von andern abnormalen Blüthen des *Zingiber Zerumbet*, Erklärung im Text S. 591.

(Fig. 7—10 nach Gris in Ann. sc. nat. IV. Ser. vol. 11 t. 3).

Fig. 11. Abnormales Androeceum von *Zingiber roseum* Rosc., ausgebreitet, von innen. Die eine Hälfte des Labells hat sich fruchtbar ausgebildet. Nach Berg und Schmidt, Darstellung etc. der officinellen Gewächse t. XXXIV b. Fig. V).

Fig. 12. Blüthe von *Hedychium Gardnerianum* Wall., bei welcher das Labell in seine zwei Componenten zerlegt ist, mit einem dritten Flügelblättchen zwischen denselben. (Nach einer Handzeichnung von A. Braun.)

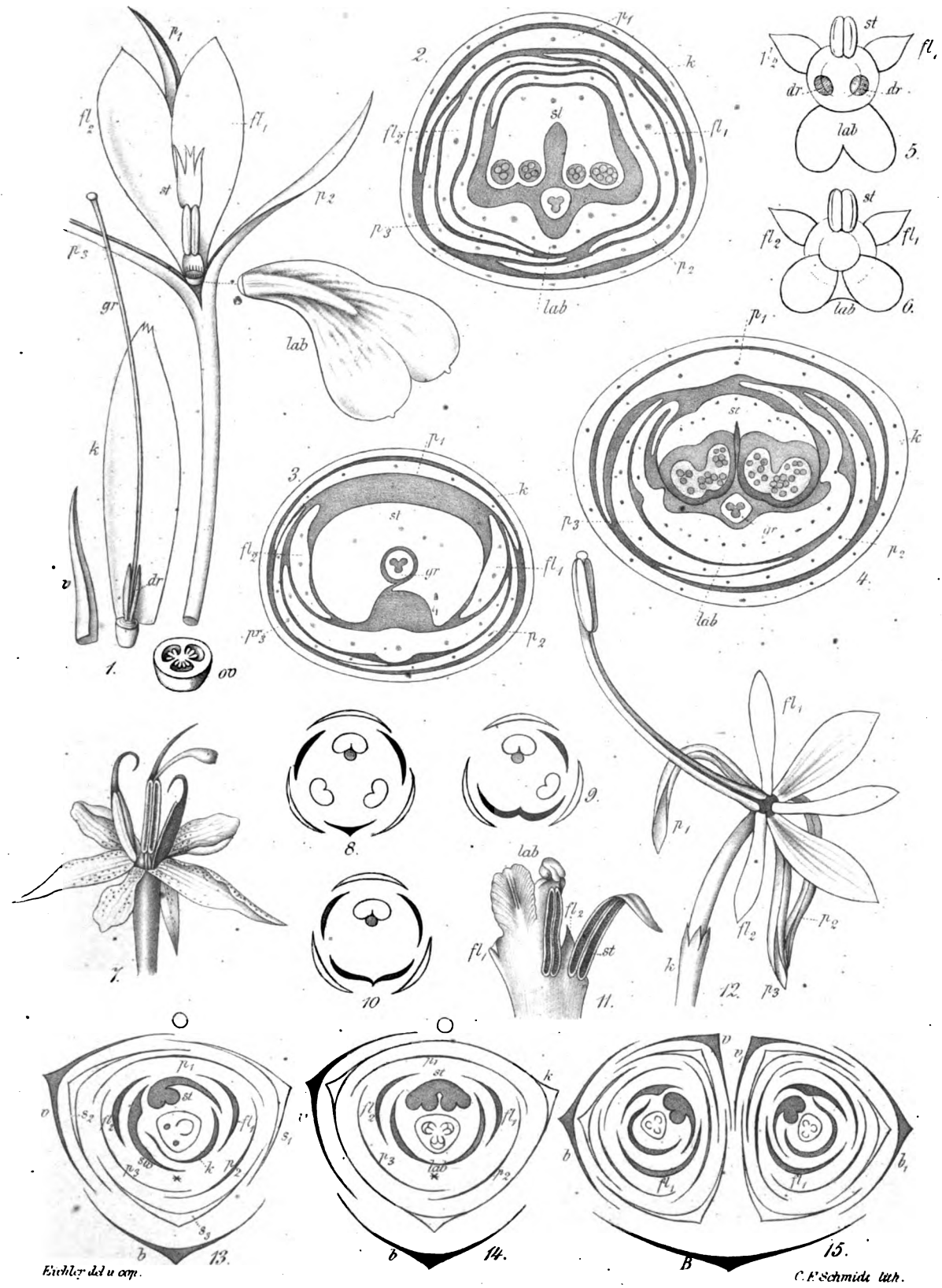
Fig. 13. Diagramm einer linken Einzelblüthe von *Maranta*; Specialbraktee *b* (die bei *Maranta* selbst nicht ausgebildet wird) ergänzt, Vorblatt *v* nach *Maranta arundinacea*.

Fig. 14. Diagramm der Blüthe von *Kaempferia* (s. Fig. 1); passt auch für *Curcuma* (Fig. 2), und andere *Zingiberaceen*.

Fig. 15. Diagramm eines Blüthenpaars von *Calathea* (in der Hauptsache auch für andere *Marantaceen* gültig). Specialbrakteen und Specialvorblätter der einzelnen Blüthen nach *Calathea Baraquiniana* Rgl.

Bedeutung der Buchstaben: *K* Kelch im Ganzen; s_1 s_2 s_3 die einzelnen Sepala in ihrer genetischen Folge; p_1 p_2 p_3 die drei Petala (Kronlappen), ebenfalls nach ihrer genetischen Folge; *st* fruchtbares Staubgefäss; *lab* Labellum; fl_1 fl_2 die beiden Flügelstaminodien; *k* in Fig. 13 das kapuzenförmige, *sw* das schwielige Staminodium; *ov* Ovarium; *dr* epigyne Drüsen; *gr* Griffel; *b* Deckblatt, *v* Vorblatt von Einzelblüthen; *B* in Fig. 15 Deckblatt eines Blüthenpaares.

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

24. Über eine Einrichtung zur Darstellung der von der Pariser Conferenz zur Bestimmung der elektrischen Einheit angenommenen Lichteinheit.

Von Werner Siemens.

(Vorgetragen am 15. Mai; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXVI]; — ausgegeben am 22. Mai.)

Die internationale Conferenz zur Bestimmung der elektrischen Einheiten, welche kürzlich in Paris tagte, hat unter Anderem auch beschlossen, als Lichteinheit die Menge des Lichtes anzunehmen, welche von einer Fläche von 1 □cm geschmolzenen Platins ausgeht, welches in Erstarrung begriffen ist. Sollte diese Einheit eine praktische Bedeutung erhalten, so war es nöthig, eine einfache, leicht verwendbare Einrichtung zu treffen, um vergleichende Messungen mit ihr an beliebigen Orten ausführen zu können. Es schien diese Aufgabe besonders durch den Umstand sehr erschwert, dass das Platin beim Schmelzen leicht Kohle, Silicium und andere Stoffe aufnimmt, wodurch seine Schmelztemperatur wesentlich erniedrigt wird.

Der kleine Apparat, welchen ich der Akademie hier vorlege, entspricht eigentlich der Definition der Lichteinheit, wie sie in Paris festgesetzt ist, nicht ganz, da er die Lichtmenge, die von schmelzendem, und nicht die, welche von erstarrendem Platin ausgeht, angiebt. Es ist aber wahrscheinlich, dass diese Differenz bei chemisch reinem Platin sehr klein ist. Die Einrichtung basirt auf der Schmelzung eines sehr dünnen Platinbleches durch den galvanischen Strom. Das Blech ist in einem Metallkasten eingeschlossen, welcher dem vom glühenden Bleche ausgehenden Lichte nur den Austritt durch ein Loch von 0.1 □cm Querschnitt gestattet, welches demselben nahe gegenübersteht. Die Wände des Loches sind conisch und das Platinblech überragt dasselbe nach allen Seiten. Im Augenblicke des Schmelzens des Platinbleches tritt daher aus dem Loche eine Lichtmenge von 0.1 der Lichteinheit.

Digitized by Google

Durch langsame Vermehrung der Stromstärke kann man bewirken, dass der Augenblick des Schmelzens des Bleches erst eintritt, nachdem man das Gleichgewicht der Beleuchtung mit der zu messenden Lichtquelle genau festgestellt hat. Nach vorläufigen Messungen ist die Lichtmenge, welche im Augenblick des Schmelzens vom Apparate ausgeht, nahe gleich 1.5 englischen Normalkerzen.

Digitized by Google

25. Zur Kenntniss der Functionen des Grosshirns beim Kaninchen.

Von Prof. Arthur Christiani
in Berlin.

(Vorgelegt von Hrn. du Bois-Reymond am 29. Mai; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXVIII]; — ausgegeben am 5. Juni.)

In einer vor Kurzem in diesen Berichten gedruckten Mittheilung[1] hat Hr. H. Munk über die Folgen der Entfernung des Grosshirns bei Kaninchen Behauptungen aufgestellt, welche den Befunden und Ansichten direct zuwiderlaufen, die ich früher über denselben Gegenstand in einer der Akademie eingereichten Abhandlung mitgetheilt habe.[2] Es ist meine Absicht nicht, mich hier in eine ausführliche Widerlegung jener Behauptungen einzulassen; ich behalte mir dies für die Gelegenheit einer anderen Mittheilung und für ein Feld vor, auf welchem ich ihm mit gleichen Vortheilen entgegentreten kann. Doch glaube ich es der Akademie sowohl wie mir selber schuldig zu sein, auch an dieser Stelle Einiges zur Klärung der Sachlage zu bemerken. Dazu sei es mir vergönnt, zwei Punkte hervorzuheben, welche allein genügen um zu zeigen, dass Hr. Munk bei seiner Kritik meiner Untersuchungen wichtige, ja entscheidende Umstände theils nicht gekannt, theils übersehen, jedenfalls nicht richtig dargestellt hat.

I.

Da Hr. Munk zu verstehen giebt, dass meine Beobachtungen wegen der relativen Unvollkommenheit meines Operationsverfahrens weniger tauglich waren, so halte ich es zunächst für nothwendig, das von mir geübte Enthirnungsverfahren und seine nächsten Folgen zu beschreiben. Ich habe dies mir eigenthümliche Verfahren, jedoch ohne es durch den Druck zu veröffentlichen, schon am 14. Mai 1880

[1] S. oben S. 549 ff.
[2] Monatsberichte der Akademie, 17. Februar 1881.

Digitized by Google

der physiologischen Gesellschaft demonstrirt,[1] wie auch seitdem zahlreichen Fachgenossen vorgeführt.

Das Verfahren gestattet günstigen Falles, die Thiere ohne nennenswerthen Blutverlust und, was besonders hervorzuheben ist, ohne initialen Erschöpfungszustand zu erhalten: die Thiere können unmittelbar nach der Operation sitzen, stehen und gehen. Hierzu dürfen die Thiere aber weder durch Narcotica oder sonst irgendwie künstlich vorbereitet, noch in ihrer normalen Lebensweise gestört sein. Der Hauptkunstgriff besteht darin, die grossen Hemisphären unter Heraushebung aus dem oben geöffneten Schädel von Hinten nach Vorn hin so umzuklappen, dass die innere Fläche derselben, welche den Hirnstock umhüllte, nach Oben sieht und die Striae corneae zu Tage treten, worauf man dann jederseits mit einem einzigen sehr schnell, aber mehr drückend als ziehend, geführten Schnitt mittels eines zugeschärften, sieben Millimeter breiten, hölzernen Scalpellstieles die Trennung vom Hirnstock vollzieht. Ist der Schnitt tadellos ausgefallen, so läuft er, oben genau der Stria cornea entsprechend, unten hart am vorderen Rande des Tractus opticus bis zum Winkel des Chiasma nervorum opticorum hin sich erstreckend und ohne den Sehnerven in seinem Verlauf getroffen zu haben. Ferner dürfen nach Vollendung der beiden in beschriebener Weise rechts und links ausgeführten Schnitte keine arteriellen Blutungen auftreten, sondern es müssen sich unter dem leichten, quetschenden Drucke des Messerstieles die kleinen durchtrennten Arterien bereits geschlossen haben.

Wie man sieht, liegt in der Ausführung der so vorgeschriebenen Schnitte die letzte, aber auch die Hauptschwierigkeit des ganzen Unternehmens. Freilich drohen schon vorher dem guten Gelingen desselben mancherlei Gefahren. Die am meisten zu fürchtende unter ihnen ist ein plötzlich eintretender Stillstand der Athmung in angestrengter Exspiration, deren unmittelbare Folgen eine starke venöse Blutung aus dem eröffneten Sinus, heftige allgemeine Krämpfe und rascher Tod zu sein pflegen. Günstigsten Falles geht eine länger andauernde Erschöpfung des Thieres nach beendeter Operation hervor, wenn es gelungen ist durch schleunige Fortnahme des venösen, schwärzlichen Blutes von dem Schädelgrunde das Thier am Leben zu erhalten. Aber mit der Reinheit der Beobachtungen nach der Enthirnung ist es unbedingt vorbei: haben sich die Thiere im besten Falle nach ungefähr einer Viertelstunde erholt, können sie wieder sitzen, später auch stehen und gehen, so zeigen sie doch immer Schwäche und schlechte Haltung in den Extremitäten, Schiefstellung

[1] E. du Bois-Reymond's Archiv 1880 S. 295.

Digitized by Google

des Kopfes, Zwangsbewegungen, wiederholte Blutungen, tetanische Sätze und Krämpfe, vorwärtsstürmende Bewegungen und dergl. mehr.

Nichtsdestoweniger können solche Thiere noch längere Zeit leben. Meine längste Beobachtungszeit in dergleichen Fällen beträgt zwölf Stunden. Man hat nur dafür zu sorgen, dass die Blutcoagula entfernt werden, welche sich immer wieder ausbilden und durch Druck namentlich auf die von mir an der Basis cranii beschriebenen Centren[1] schädlich einwirken.

Was kann man aber überhaupt thun, um so üble Erfolge der Operation zu vermeiden?

Zunächst gilt es, und hierauf ist ein ganz besonderes Gewicht zu legen, die ganze Operation so schnell wie möglich auszuführen. Namentlich darf die das Thier erfahrungsgemäss am meisten aufregende Eröffnung des Schädels nicht lange dauern. Nachdem das Thier sich von der Aufregung, die das Aufbinden hervorrief, erholt hat, führe man genau in der Mittellinie über der Sutura sagittalis einen scharfen bis auf den Schädel dringenden Schnitt von vier bis fünf Centimeter Länge, ziehe unter sorgfältiger Schonung der Musculatur die Weichtheile zur Seite und dringe mit einer kleinen Knochenzange oberhalb des Kiefergelenkes am Ende der Sutura coronalis durch den Knochen bis auf die Dura ein, um sofort durch Pronation der die Zange führenden Hand die vordere Hälfte des zugewandten Os parietale nach Aussen hin abzubrechen. Hierauf wende man sich, unter schonender Umgehung des Tuberculum interparietale und des Os interparietale mit den darunter liegendem Sinus confluens[2], dem hinteren Theile des Schädeldaches zu, um wieder zur Sutura coronalis zu gelangen. Der Sinus longitudinalis anterior ist sobald als möglich von hinten nach vorn hin ergiebig zu eröffnen: hierbei fliesst in günstigen Fällen das einzige Blut ab. Schliesslich bricht man die hinteren Theile des Stirnbeines ab und hat damit eine ovale mit der Spitze nach vorn sehende Öffnung im Schädeldache von genügender Grösse erhalten um die Enthirnung vorzunehmen. Zu letzterem Zwecke gehe man nach Spaltung der Dura mit einem Schielhäckchen von Innen Oben und Hinten nach Aussen Unten und Vorn etwa unter 45° gegen die Medianebene in die Hemisphäre ein um sie aus dem Schädel herauszuheben und die Umklappung vorzunehmen. Mit der anderen Hand vollzieht man dabei den trennenden Schnitt durch die Stria cornea.

Die Gesammtdauer der Operation betrug in günstigen Fällen etwa zwei Minuten.

---

[1] A. a. O. S. 227 und vorher.

[2] s. KRAUSE: die Anatomie des Kaninchens, Leipzig 1868, S. 45 u. 203.

Digitized by Google

Nähte werden nicht angelegt. Den Hirnstock vor Trockniss zu schützen, genügt Einführung eines neutralen flüssigen Fettes (Hundefett). Ein Wattebausch, leicht über die Öffnung des Schädels gelegt, stellt den Verband dar, der jederzeit leicht abnehmbar Einblick in die Schädelhöhle gewährt.

Als Kriterien für eine gelungene Operation galten mir stets folgende Dinge.

1. Normale, höchstens etwas vertiefte Athmung.

2. Eine normale, höchstens etwas erweiterte Pupille.

3. Das Fehlen jeder venösen Blutung und jedweder Krämpfe während und nach der Operation.

4. Die vollständige Erhaltung der Coordination für Stand und Locomotion unmittelbar nach der Operation und in der Folge.

5. Die Abwesenheit aller Zwangsbewegungen und Zwangsstellungen unmittelbar nach der Operation und während der Beobachtungszeit von (in maximo) zwölf Stunden.

6. Die sehr bald nach der Operation nachweisbare Erhöhung der Reflexerregbarkeit, namentlich für Sinnesreize.

Das von Hrn. Munk enthirnte Kaninchen ermangelte »nie«[1] ein »Erschöpfungsstadium« von »ungefähr einer halben« bis »längstens »etwa einer Stunde« Dauer[2] zu zeigen. »Zunächst nach der Operation«, sagt Hr. Munk, »bleibt das Thier, bei normaler ruhiger Athmung, in »jeder beliebigen Lage, die man ihm ertheilt hat, wofern nur der »Körper ausreichend unterstützt ist, unverändert und unbewegt liegen«.[2] Dann erholt sich das Thier, sitzt, macht auch hin und wieder »zeigerartige«[2] Drehbewegungen. Es folgen Veränderungen in der Athmung, Laufbewegungen. »Jetzt läuft das Thier, nicht unausgesetzt, sondern mit »Pausen, während welcher es ruhig dasteht, manchmal geradeaus, »meist in Kreisen oder Spiralen«. Dann fällt das Thier plötzlich um, richtet sich wieder auf und läuft u. s. w.[3]

Es ist nach Vorstehendem ersichtlich, dass die Beobachtung der von Hrn. Munk operirten Thiere, und die Beobachtung der von mir enthirnten Thiere zu ganz unvergleichbaren Resultaten führen musste.

---

[1] A. a. O. S. 557.
[2] A. a. O. S. 553.
[3] A. a. O. S. 553—555.

Digitized by Google

II.

Im zweiten Theile meiner oben erwähnten Abhandlung, dem Theile, welcher von Hrn. MUNK beanstandet wird, sage ich von dem des Grosshirns und der Streifenhügel beraubten Kaninchen:

»Was das Umhergehen der Thiere nach dem spontanen Erwachen »betrifft, so zeigte sich in den bestgelungenen Fällen durchaus nichts »Abnormes: die Thiere wichen Hindernissen (z. B. Tischfüssen) aus, »ohne dieselben zu berühren; sie machten ohne objectiv nachweisbaren »Grund mitten in der Bewegung Halt; sie erkletterten und ersprangen »Anhöhen u. s. w.«[1]

Hr. MUNK, befangen in der für ihn fast zum Dogma gewordenen Meinung, dass Kaninchen nach »dem Verluste des Grosshirns voll»kommen blind« seien[2], stellt diese meine thatsächlichen Angaben über das Ausweichen der enthirnten Thiere vor Hindernissen als unbegreiflich hin. Doch sucht er, auf Grund seiner eigenen Beobachtungen, sich Rechenschaft davon zu geben, wie ich wohl zu einer der seinigen so widersprechenden Auffassung habe kommen können. Seine Antwort auf diese Frage läuft darauf hinaus, dass, wenn enthirnte Thiere nicht an Hindernisse stossen, entweder der Zufall im Spiel ist, oder die Thiere Zwangsbewegungen machen, bei welchen sie nicht in der Bahn liegende Gegenstände nicht berühren. »Derartige Beobachtungen,« behauptet Hr. MUNK, »waren es, welche Hrn. CHRISTIANI zu der Meinung »verleiteten, dass die Thiere Hindernissen auswichen; und er ist bei »dem Irrthume verblieben, obwohl das Auskunftsmittel so nahe lag: »er brauchte nur in die hier genügend vorgegebene Bahn der Thiere »einigermaassen breite Objecte zu stellen oder die Thiere in die Nähe »der Wand zu versetzen, und er hätte gesehen, wie die Hindernisse »nicht vermieden wurden«[3].

Zwangsbewegungen, bei welchen die Thiere eine gegebene kleinere oder grössere Kreisbahn immer wieder durchlaufen, nennt man bekanntlich seit MAGENDIE Reitbahnbewegungen. Bei der Beschreibung der Bewegungen seiner Versuchsthiere vermeidet Hr. MUNK den Gebrauch dieses jedem Hirnphysiologen geläufigen Kunstausdruckes. Es liegt mir fern ihm terminologische Vorschriften machen zu wollen. Eins aber sei mir gestattet, ihn zu fragen: Warum lässt er auch bei der sonst wörtlichen Anführung[4] aus meiner Abhandlung: »Von »Muskelschwäche in den Extremitäten oder von ungewönlicher Haltung

---

[1] A. a. O. S. 224.
[2] Oben S. 567 (im Separatabdr. S. 19).
[3] A. a. O. S. 566.
[4] A. a. O. S. 556.

Digitized by Google

»des Kopfes, Reitbahnbewegung u. d. m. war nach besagter Ope»ration in den bestgerathenen (zur Zeit neunzehn) Fällen durchaus »nichts wahrzunehmen«[1] — das Wort: Reitbahnbewegung aus, auf welches doch, wie er sich sagen musste, bei seiner Art die Sache anzusehen hier Alles ankommt? Denn es beweist, dass ich auf die Quelle des Irrthumes, in welchen verfallen zu sein Hr. Munk mir vorwirft, wohl achtete; es beweist mit Einem Wort, dass die Auskunft, mit deren Hülfe er meine ihm unerklärlichen Versuchsergebnisse hinweg zu erklären versucht, eine unzutreffende ist.

[1] A. a. O. S. 223.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

Digitized by Google

26. Über den dritten Gauss'schen Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste.

Von L. Kronecker.

(Vorgetragen am 12. Juni; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXIX]; — ausgegeben am 19. Juni.)

Die Bemerkungen III, IV, V im *art.* 4 der Gauss'schen Abhandlung vom Jan. 1808[1] können mit Hülfe der Bezeichnungen, welche ich in meinem neulich mitgetheilten Beweise des Reciprocitätsgesetzes[2] angewendet habe, durch die einfache Formel:

$$\text{(A)} \qquad \text{sgn. R}(a) = (-1)^{[2a]} = (-1)^{[n-2a]} \qquad (n \text{ ungrade})$$

dargestellt werden. Die Richtigkeit dieser Formel ergiebt sich — ebenso wie in der citirten Gauss'schen Abhandlung — daraus, dass erstens die durch die Bedingung:

$$2a - 1 < [2a] \leqq 2a$$

definirte ganze Zahl $[2a]$ gleich $2[a]$ oder gleich $2[a] + 1$ wird, je nachdem der Rest $\text{R}(a)$, welcher verbleibt, wenn von der reellen Grösse a die ihr nächste ganze Zahl subtrahirt wird, positiv oder negativ ist, und dass zweitens die Summe:

$$[2a] + [n - 2a]$$

gleich $n - 1$, also gleich einer graden Zahl wird, wenn n ungrade ist.

Ist $0 < \alpha_0 < \frac{1}{2}$ und $\alpha = 2\alpha_0$ oder $\alpha = 1 - 2\alpha_0$, je nachdem $2\alpha_0$ kleiner oder grösser als $\frac{1}{2}$ ist, so ist auch $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, und es wird vermöge der Gleichung (A):

$$\text{(A°)} \qquad \text{sgn. R}(n\alpha_0) = (-1)^{[n\alpha]}.$$

Diese Bestimmung des Vorzeichens von $\text{R}(n\alpha_0)$ geht also unmittelbar aus den erwähnten vorbereitenden Bemerkungen im dritten Gauss'schen Beweise des Reciprocitätsgesetzes hervor; nun bedarf es aber nur noch der weiteren Bemerkung, dass offenbar;

$$(-1)^{[n\alpha]} = \text{sgn.} \prod_k \left(\frac{k}{n} - \alpha \right) \qquad \left(\begin{matrix} 0 < \alpha < \frac{1}{2} \\ k = 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(n-1) \end{matrix} \right)$$

[1] Theorematis arithmetici demonstratio nova. Gauss' Werke, Bd. II, S. 5.

[2] Sitzungsberichte von 1884, XXIII, S. 519 und folgende.

Digitized by Google

ist, um aus der alsdann resultirenden Bestimmung des Vorzeichens von $R(n\alpha_0)$:

$$(\bar{A}) \qquad \operatorname{sgn.} R(n\alpha_0) = \operatorname{sgn.} \prod_{k=1}^{k=\frac{1}{2}(n-1)} \left(\frac{k}{n} - \alpha\right) \quad \begin{pmatrix} 0<\alpha_0<\frac{1}{2}; 0<\alpha<\frac{1}{2} \\ \alpha = 2\alpha_0 \text{ oder } 1-2\alpha_0 \end{pmatrix}$$

das Reciprocitätsgesetz selbst zu erschliessen und also alle in der citirten Gauss'schen Abhandlung weiterhin vorkommenden, in VI bis IX des *art.* 4 und in *art.* 5 bis 7 enthaltenen Entwickelungen entbehrlich zu machen.

Ist nämlich m eine positive ungrade Zahl und bedeuten h, h_0, h_0' positive Zahlen, die kleiner als $\frac{1}{2}m$ sind, so wird vermöge der Gleichung $(\bar{A})$:

$$(B) \qquad \operatorname{sgn.} R\left(\frac{nh_0}{m}\right) = \operatorname{sgn.} \prod_k \left(\frac{k}{n} - \frac{h}{m}\right) \quad \left(k=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(n-1)\right),$$

wenn $h = 2h_0$ oder $h = m - 2h_0$ genommen wird, je nachdem $2h_0$ oder $m - 2h_0$ kleiner als $\frac{1}{2}m$ ist; es besteht daher für jede Zahl h_0 eine Congruenz:

$$(C) \qquad nh_0 \equiv h_0' \operatorname{sgn.} \prod_k \left(\frac{k}{n} - \frac{h}{m}\right) \pmod{m} \quad \left(k=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(n-1)\right).$$

Setzt man hierin der Reihe nach $h_0 = 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(m-1)$ und multiplicirt die dadurch entstehenden Congruenzen mit einander, so erhält man, falls m Primzahl ist, für das Legendre'sche Zeichen $\left(\frac{n}{m}\right)$ die Bestimmung:

$$(D) \qquad \left(\frac{n}{m}\right) = \operatorname{sgn.} \prod_{h,k} \left(\frac{k}{n} - \frac{h}{m}\right) \quad \begin{pmatrix} h=1,2,\ldots\frac{1}{2}(m-1) \\ k=1,2,\ldots\frac{1}{2}(n-1) \end{pmatrix},$$

aus welcher das Reciprocitätsgesetz unmittelbar erhellt.

Vorstehende Vereinfachung des dritten Gauss'schen Beweises enthält zugleich die naturgemässe Herleitung jener bemerkenswerthen Bestimmung des Legendre'schen Zeichens, welche durch die Gleichung (D) ausgedrückt wird. Ich habe zwar schon in meiner Mittheilung vom 22. Juni 1876 eben diese Bestimmung angegeben und auch durch eine kurze und einfache Deduction begründet;[1] aber ihre wahre Quelle habe ich erst jetzt in den oben angeführten Gauss'schen Bemerkungen aufgefunden.[2]

---

[1] Monatsbericht vom Juni 1876, S. 335 und 336.

[2] Vergl. *art.* III meiner Mittheilung vom 7. Februar d. J., Sitzungsberichte 1884, XXIII, S. 523 und 524.

Digitized by Google

Die zunächst aus diesen Bemerkungen resultirende Bestimmung des Vorzeichens von $R(n\alpha_0)$:

$$(\bar{A}) \qquad \operatorname{sgn} R(n\alpha_0) = \operatorname{sgn} \prod_k \left(\frac{k}{n} - \alpha\right) \quad \left(k = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

führt in Verbindung mit jener anderen Bestimmung:[1]

$$(\bar{\mathfrak{A}}) \quad \operatorname{sgn} R(n\alpha_0) = \operatorname{sgn} \prod_k \left(\alpha_0 - \frac{k}{n}\right)\left(\alpha_0 + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) \quad \left(k = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1)\right),$$

welche ich im *art.* I meiner Mittheilung vom 7. Februar d. J. entwickelt habe, zu der Relation:

$$(E) \quad \operatorname{sgn} \prod_{k_0} \left(\alpha_0 - \frac{k_0}{n}\right)\left(\alpha_0 + \frac{k_0}{n} - \frac{1}{2}\right) = \operatorname{sgn} \prod_k \left(\frac{k}{n} - \alpha\right) \left(k_0, k = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1)\right).$$

Diese Relation kann aber auch direct hergeleitet werden. Da nämlich

$$\text{für} \quad 2\alpha_0 < \frac{1}{2}, \ \alpha = 2\alpha_0 \quad \text{und für} \quad 2\alpha_0 > \frac{1}{2}, \ \alpha = 1 - 2\alpha_0$$

ist, so wird, wenn man

$$\text{für} \quad 2k_0 < \frac{1}{2}n, \ k = 2k_0 \quad \text{und für} \quad 2k_0 > \frac{1}{2}n, \ k = n - 2k_0$$

setzt, in jedem Falle:

$$\left(\alpha_0 - \frac{k_0}{n}\right)\left(\alpha_0 + \frac{k_0}{n} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{k}{n} - \alpha\right)\left(1 - \frac{k}{n} - \alpha\right),$$

und da der zweite Factor rechts stets positiv ist:

$$\operatorname{sgn}\left(\alpha_0 - \frac{k_0}{n}\right)\left(\alpha_0 + \frac{k_0}{n} - \frac{1}{2}\right) = \operatorname{sgn}\left(\frac{k}{n} - \alpha\right).$$

Diese Gleichung führt aber unmittelbar zur Relation (E) und enthält also den directen Nachweis der Übereinstimmung jener beiden Bestimmungsweisen für das Vorzeichen von $R(n\alpha)$, welche durch die beiden Gleichungen $(\bar{A})$ und $(\bar{\mathfrak{A}})$ ausgedrückt sind.

[1] Sitzungsberichte 1884, XXIII, S. 520.

Digitized by Google

Digitized by Google

27. Bemerkung zu der Abhandlung: Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenem Ausdruck des Linearelements.

Von R. Lipschitz
in Bonn.

(Vorgelegt von Hrn. Kronecker am 12. Juni; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXIX]; — ausgegeben am 19. Juni.)

In dem letzten Artikel der genannten Abhandlung, die im Sitzungsbericht der Akademie vom 10. Mai v. J. enthalten ist, habe ich zwei allgemeine Sätze aus der Theorie der Mannigfaltigkeiten von beliebig vielen Dimensionen ausgesprochen. Der erste derselben hat den Inhalt, dass, wenn ein System von reellen Functionen $x_1', x_2', \ldots x_n'$ der unabhängigen reellen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Gleichung

$$dx_1'^2 + dx_2'^2 + \ldots + dx_n'^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2$$

befriedigt, die zwischen denselben bestehende Abhängigkeit immer durch ein System von Gleichungen ausgedrückt werden kann

$$\begin{aligned} x_1' + a_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n \\ x_2' + a_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x_n' + a_n &= c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \ldots + c_{nn}x_n, \end{aligned}$$

wo die sämmtlichen Grössen $c_{11}, c_{12}, \ldots c_{nn}$ und $a_1, a_2, \ldots a_n$ Constanten sind; dieser Satz ist daselbst ausführlich bewiesen. Der zweite Satz, welcher sich auf den ersten zurückführen lässt, sagt aus, dass, wenn zwei Systeme von reellen Variabeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ und $\xi_1', \xi_2', \ldots \xi_n'$ in einer Beziehung zu einander stehen, vermöge deren die Gleichungen

$$\begin{aligned} \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2 &= 1, \quad \xi_1'^2 + \xi_2'^2 + \ldots \xi_n'^2 = 1, \\ d\xi_1'^2 + d\xi_2'^2 + \ldots + d\xi_n'^2 &= d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + \ldots + d\xi_n^2 \end{aligned}$$

erfüllt sind, die Variabeln $\xi_1', \xi_2', \ldots \xi_n'$ gleich linearen homogenen Functionen der Variabeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ mit constanten Coefficienten sein müssen. Da an der betreffenden Stelle die Gründe für die Zurückführung nicht vollständig entwickelt sind, so erlaube ich mir, dieselben gegenwärtig hervorzuheben.

Digitized by Google

Man multiplicire die Variabeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ und $\xi'_1, \xi'_2, \ldots \xi'_n$ mit einer beliebig veränderlichen reellen von Null verschiedenen Grösse t, und setze

$$t\xi_1 = x_1, \; t\xi_2 = x_2, \ldots t\xi_n = x_n,$$
$$t\xi'_1 = x'_1, \; t\xi'_2 = x'_2, \ldots t\xi'_n = x'_n.$$

Dann folgen aus den Voraussetzungen des zweiten Satzes die Gleichungen

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = t^2, \; x_1'^2 + x_2'^2 + \ldots + x_n'^2 = t^2,$$

$$d\xi_1^2 + \ldots + d\xi_n^2 = \frac{1}{t^2}(dx_1^2 + \ldots + dx_n^2 - dt^2), \; d\xi_1'^2 + \ldots + d\xi_n'^2 = \frac{1}{t^2}(dx_1'^2 + \ldots + dx_n'^2 - dt^2),$$

mithin gilt nothwendig die Gleichung

$$dx_1'^2 + dx_2'^2 + \ldots + dx_n'^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2.$$

Hier sind die n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ von einander unabhängig, und es treffen somit die Voraussetzungen zu, auf denen die Beweisführung des ersten Satzes beruht. Man schliesst daher, wie dort, dass die Variabeln $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$ von den Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch ein System von Gleichungen abhängen, wie es oben angegeben ist. Weil aber die Gleichung

$$x_1'^2 + x_2'^2 + \ldots + x_n'^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

gilt, so müssen die Constanten $a_1, a_2, \ldots a_n$ sämmtlich gleich Null sein. Aus dem betreffenden System folgt aber, indem auf beiden Seiten mit t dividirt wird, gerade das System von homogenen linearen Gleichungen zwischen den Variabeln $\xi'_1, \xi'_2, \ldots \xi'_n$ und $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, dessen Bestehen nachgewiesen werden sollte.

Noch habe ich hinzuzufügen, dass der erste der beiden Sätze für den Fall $n = 3$ zuerst von J. Liouville aufgestellt ist. In dem Aufsatze: *Théorème sur l'équation* $dx^2 + dy^2 + dz^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2)$ (Journal de Mathématiques, T. XV, p. 103) findet sich die Angabe, und die Ausführung in der sechsten Note zu der von demselben Verfasser herrührenden fünften Ausgabe der *Application de l'analyse à la géométrie* von Monge.

Digitized by Google

28. Zur Kenntniss der Functionen des Grosshirns beim Kaninchen.

Von Hermann Munk.

(Vorgetragen am 19. Juni: — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXX:] — ausgegeben am 26. Juni.)

Meine letzte Mittheilung über die centralen Organe für das Sehen der Wirbelthiere[1] hat unter anderem Hrn. Christiani's Angaben, das grosshirnlose Kaninchen sehe und mache noch andere Bewegungen als unwillkürliche — Reflex- oder Zwangsbewegungen, als unrichtig nachgewiesen. Darauf hat Hr. Prof. Christiani in der am 29. Mai vorgelegten Mittheilung[2] eine »ausführliche Widerlegung« meiner »Behauptungen« sich für einen anderen Ort vorbehalten, doch hier »Einiges zur Klärung der Sachlage bemerken« zu müssen geglaubt. Er hat zwei Punkte hervorheben wollen, wie er sagt, welche allein genügen um zu zeigen, dass ich bei meiner Kritik seiner Untersuchungen »wichtige, ja entscheidende Umstände theils nicht gekannt, theils übersehen, jedenfalls nicht richtig dargestellt« habe. Dass dem nicht so ist, und dass es auch mit den kurzen Widerlegungen, welche Hr. Christiani angeknüpft hat, nicht seine Richtigkeit hat, wird das Folgende darthun.

I.

Eine Stelle, an welcher ich es »zu verstehen geben« soll, dass Hrn. Christiani's Beobachtungen »wegen der relativen Unvollkommenheit seines Operationsverfahrens weniger tauglich waren«[3], existirt gar nicht. Man wird nicht nur danach vergeblich suchen, sondern sogar gerade das Gegentheil finden; denn ganz ausdrücklich sagte ich[4]:

[1] S. oben S. 549—68.
[2] S. oben S. 635—40.
[3] S. oben S. 635.
[4] S. oben S. 565.

Digitized by Google

1. »Nach den Schilderungen waren ebensowohl, wie Hrn. CHRISTIANI, auch früheren Forschern und insbesondere zweifellos Hrn. SCHIFF Versuche mit totaler Exstirpation des Grosshirns gelungen.«

2. »Bloss daran war (sc. von Hrn. CHRISTIANI) zu denken, dass einzelne Vorgänger die Exstirpationen unvollkommen ausgeführt hätten; aber dann hätten ihre Thiere erst recht nicht in die Hindernisse stossen dürfen, wenn nach der Fortnahme des ganzen Grosshirns (sc. bei Hrn. CHRISTIANI) dergleichen nicht geschehen sollte.«

3. »Hrn. CHRISTIANI's »»bestgelungene Fälle««, in welchen die Thiere »»Hindernissen (z. B. Tischfüssen) auswichen««, sind Versuche gewesen, wie ich sie oben als ganz gelungene bezeichnet habe, mit einer mittleren oder noch grösseren Lebensdauer der Thiere; und Hrn. CHRISTIANI's Beobachtungszeit hat höchstens das Ruhestadium und einen ersten Theil des Laufstadiums gedeckt, so dass er bloss mässige Progressivbewegungen dieser Thiere zu sehen bekam.«

Sehr gut also und, wie ich nach den neuerdings von Hrn. CHRISTIANI gemachten Angaben meine, sogar zu gut war das Urtheil, das ich über die CHRISTIANI'schen Versuche aussprach. Auch ist es mir, wie man sieht, nicht eingefallen zu verlangen — was jetzt die CHRISTIANI'schen Bemerkungen glauben lassen[1] —: dass Hrn. CHRISTIANI's Beobachtungen in den bestgerathenen Fällen während der ersten wenigen, »in maximo zwölf«[2] Stunden sich decken sollten mit meinen Beobachtungen der gut enthirnten Thiere bis zum Tode, der erst nach 30, 40 und sogar 50 Stunden eintrat. Dass das dem Tode voraufgehende viele Laufen ganz unvergleichbar ist mit der nur durch seltene Laufbewegungen unterbrochenen Ruhe, welche nach einer kurzen Erschöpfung durch viele Stunden der Enthirnung folgt, hätte man wohl auch für selbstverständlich erachten sollen.

II.

Unter meinen Erklärungen, wie Hrn. CHRISTIANI's Angabe, das grosshirnlose Kaninchen weiche Hindernissen aus, hat entstehen können, führe ich als erste, im Anschlusse an die sub 3. citirte Stelle, aus: »Bei solchen mässigen Bewegungen (Progressivbewegungen) kommt

[1] S. oben S. 638.
[2] S. ebenda.

Digitized by Google

es hin und wieder vor, dass die Thiere, wenn sie in die Mitte des Zimmers gesetzt waren, nicht an die Wand gerathen, sondern, natürlich in Absätzen, mehr oder weniger regelmässige Kreise inmitten des Zimmers beschreiben und dabei wiederholt an den Objecten vorüberkommen, ohne dass sie ihr Weg in Berührung mit diesen bringt. (Es folgen Beispiele.) Derartige Beobachtungen waren es, welche Hrn. Christiani zu der Meinung verleiteten, dass die Thiere Hindernissen auswichen.«[1] Hr. Christiani bemerkt dazu, dass ich den »jedem Hirnphysiologen geläufigen Kunstausdruck«: Reitbahnbewegung vermeide, und will mir nicht terminologische Vorschriften machen; aber er fragt mich: »warum ich auch bei der sonst wörtlichen Anführung aus seiner Abhandlung: »»Von Muskelschwäche in den Extremitäten oder von ungewöhnlicher Haltung des Kopfes, Reitbahnbewegung u. d. m. war nach besagter Operation in den bestgerathenen (zur Zeit neunzehn) Fällen durchaus nichts wahrzunehmen«« — das Wort: Reitbahnbewegung auslasse, auf welches doch, wie ich mir sagen musste, bei meiner Art die Sache anzusehen hier Alles ankommt?«[2]

Die Antwort, die ich zunächst zu geben habe, ist einfach die, dass das Citat sich gar nicht da findet, wo von den Bewegungen der Thiere oder vom Sehen oder vom Vermeiden von Hindernissen die Rede ist, sondern dass ich es S. 556 gegeben habe, wo es sich ausgesprochenermaassen — es steht an der Spitze des Absatzes — bloss darum handelte, »die Thiere in der Ruhe zu charakterisiren«, wo für die erste Zeit nach der Operation die Angaben von Hrn. Schiff und Hrn. Christiani einander gegenübergestellt wurden — dort die vollkommen passive Biegsamkeit aller Glieder und die Beibehaltung jeder dem Thiere ertheilten Lage, hier das Fehlen von Muskelschwäche in den Extremitäten oder von ungewöhnlicher Haltung des Kopfes und das normale Sitzen. Da war offenbar »Reitbahnbewegung« ebenso überflüssig wie »nach besagter Operation« und »zur Zeit neunzehn«, welche Wörter gleichfalls ausgelassen sind. Dass die grosshirnlosen Kaninchen nach Hrn. Christiani weit entfernt davon sind, Reitbahnbewegungen zu machen, dass sie vielmehr, gelegentlich aus dem Schlafe erwacht, ohne jede Abnormität umhergehen, mitten in der Bewegung Halt machen, klettern, springen, schliesslich sich wieder zur Ruhe begeben und einschlafen, das ist doch, sollte ich meinen, S. 558, wo ich mich mit den Dingen zu beschäftigen anfange, also am rechten Platze eindringlich genug nicht nur im Texte, sondern

[1] S. oben S. 565—6.
[2] S. oben S. 639—40.

Digitized by Google

ausserdem noch durch ein langes Citat in der Anmerkung von mir hervorgehoben worden.

Sodann aber kommt gar nicht bei meiner Art die Sache anzusehen, sondern nur bei Hrn. CHRISTIANI's Art meine Mittheilung zu lesen, dort Alles auf das Wort »Reitbahnbewegung« an. Hr. CHRISTIANI argumentirt[1]: wird in meiner letztcitirten Ausführung an die Stelle dessen, dass die Thiere »Kreise beschreiben«, gesetzt, dass sie »Reitbahnbewegungen machen«, so ist meine Erklärung unzutreffend, da von ihm ja angegeben worden ist, dass in seinen bestgerathenen Fällen von Reitbahnbewegung durchaus nichts wahrzunehmen war. Den mir zugemutheten Missgriff habe ich indess nicht begangen, und nicht auf meiner Seite ist der Irrthum. Wenn Hr. CHRISTIANI sagt, dass man Zwangsbewegungen in Kreisbahnen »bekanntlich seit MAGENDIE Reitbahnbewegungen nennt«[2], so hat er hinzuzufügen unterlassen, dass den Namen die Zwangsbewegungen erhalten haben, welche infolge gewisser Verletzungen niederer Hirntheile, des Thalamus, des Pedunculus u. s. w., auftreten. Darum brauchen denn auch nicht alle unwillkürlichen — Reflex-, oder Zwangsbewegungen in Kreisbahnen Reitbahnbewegungen zu sein. Menschen, welche nicht sehen, gehen oft oder vielleicht sogar in der Regel, infolge der nicht ganz gleichen Länge oder der nicht ganz gleichen Action der Beine u. s. w., statt in der beabsichtigten Weise geradeaus, im Bogen und damit weiter in Kreisen oder Spiralen, ebenso blinde Thiere; und so können erst recht grosshirnlose Thiere bei ihren unwillkürlichen Bewegungen, wofern nur überhaupt ein Antrieb zu Progressivbewegungen gegeben ist, im Bogen gehen und wenn sich das wiederholt, Kreise beschreiben, ohne dass es Reitbahnbewegungen sind. Nun mögen die Laufbewegungen der enthirnten Kaninchen in der späteren Zeit des Laufstadiums Reitbahnbewegungen sein, durch die entzündlichen Vorgänge in den Thalami bedingt: die spärlichen Laufbewegungen im Ruhestadium und im Anfange des Laufstadiums sind es jedoch durchaus nicht, und darüber hätte, von meinen ausgedehnten Schilderungen und Erläuterungen ganz abgesehen, schon der Wortlaut jener Stelle selbst Hrn. CHRISTIANI aufklären sollen, da ich doch nur hin und wieder bei solchen mässigen Progressivbewegungen es vorkommen lasse, dass die Thiere Kreise beschreiben. Gerade aber einzig und allein die Laufbewegungen im Ruhestadium und im ersten Theile des Laufstadiums waren es, wie ich es ja ausdrücklich sagte[3], welche ich für die Erklärung von Hrn. CHRISTIANI's Angabe heranzog. Ich hätte also nicht bloss mit

[1] Vergl. oben S. 640.
[2] S. oben S. 639.
[3] S. die Citate oben S. 656 und 657.

Digitized by Google

allen meinen sonstigen Darlegungen mich in Widerspruch gesetzt, sondern auch geradezu einen Fehler begangen, wenn ich dort das Wort »Reitbahnbewegung« gebraucht hätte. Und auf der anderen Seite hatte Hr. CHRISTIANI kein Recht, dort das Wort »Reitbahnbewegung« zu substituiren: womit seine Argumentation in sich zusammenfällt.

Schliesslich, nachdem so das Formale erledigt, das allein mich zu dieser Mittheilung bewogen hat, will meine Erklärung auch noch von einer anderen Seite betrachtet sein. Indem Hr. CHRISTIANI angeführt hatte, dass in seinen »bestgerathenen Fällen« von Muskelschwäche in den Extremitäten, ungewöhnlicher Haltung des Kopfes, Reitbahnbewegung und dergl. mehr nichts wahrzunehmen war, musste man annehmen, dass damit die Unversehrtheit der niedereren Hirntheile, deren Verletzung jene Störungen mit sich bringt, verbürgt sein sollte, wie es die Untersuchung erfordert, und voll angegeben, was Hr. CHRISTIANI unter den »bestgerathenen Fällen« verstand. Jetzt belehrt uns Hr. CHRISTIANI S. 638 kurzweg, dass ihm »als Kriterien für eine gelungene Operation« stets noch eine Anzahl anderer Dinge galten; und er bemerkt gar nicht, dass er mit manchen Kriterien anticipirt, was erst das Ergebniss der Untersuchung sein musste. Solcher Willkür in der Forschung gegenüber haben Erklärungsversuche abweichender Angaben natürlich einen schweren Stand. Trotzdem behält meine angegriffene Erklärung ihre Gültigkeit. Um das, worauf es ankommt, recht hervortreten zu lassen, habe ich mit den extremen Fällen, wie sie sich hin und wieder darbieten, exemplificirt, mit Thieren, welche mit ihren wiederholten, jedesmal nur kurzen und auch durch lange Pausen von einander getrennten Laufbewegungen sich in mehr oder weniger regelmässigen Kreisen bewegten. Dieses Beschreiben von Kreisen nun hat Hr. CHRISTIANI, wenn er es sah, für Reitbahnbewegungen genommen, so dass er die Thiere nicht zu den »bestgerathenen Fällen« zählte. Aber »derartige Beobachtungen«, wie es S. 566 heisst, muss Hr. CHRISTIANI in seinen »bestgerathenen Fällen« gemacht haben: er muss gesehen haben, dass die Thiere im Bogen gingen — sonst hätte er gar nicht zu der Meinung verleitet werden können, dass sie Hindernissen auswichen —, und dass sie bei wiederholtem Gehen in der Regel den Bogen nach derselben Seite beschrieben — das kommt gar zu häufig bei den gelungenen Versuchen vor. Dann ist er eben, wie ich sagte,[1] »bei dem Irrthume verblieben, obwohl das Auskunftsmittel so nahe lag: er brauchte nur in die hier genügend vorgegebene Bahn der Thiere einigermaassen breite Objecte zu stellen oder die

[1] S. oben S. 566 und 639.

Digitized by Google

Thiere in die Nähe der Wand zu versetzen, und er hätte gesehen, wie die Hindernisse nicht vermieden wurden«.

Ich werde nicht zu bemerken brauchen, dass ich selber der vielbesprochenen Erklärung nicht im entferntesten die Bedeutung beigemessen habe, welche ihr Hrn. CHRISTIANI's Angriff zugewiesen hat. Aber ich kann, wie ich zeigte, meine neuliche Mittheilung in allen Stücken aufrecht erhalten; und Wort für Wort bleibt gültig, was sie enthielt.

Digitized by Google

29. Über Idunium, ein neues Element.

Von Mart. Websky.

(Vorgetragen am 19. Juni; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXX]; — ausgegeben am 26. Juni.)

In einem derben, hellgelben, im Wesentlichen aus zinkhaltigen Bleivanadat bestehenden, von der Grube Aquadita, Provinz Cordoba, Laplata, herstammenden Erze, welches sich unter den von Professor Brackebusch in Cordoba nach Europa gebrachten Mineralien befindet, habe ich die Anwesenheit eines neuen, dem Vanadin verwandten Elementes wahrgenommen.

Legt man die durch Quecksilbernitrat fixirte und durch Glühen isolirte rothe Metallsäure in Ätzammoniak, so löst sich dieselbe unter anfänglicher Zurücklassung eines hochgelben Rückstandes auf, der auch, wenn auch langsamer, in Lösung übergeht.

Die erste Fraction der Lösung enthält fast nur Vanadinsäure und lässt, mit wenig Schwefelammon versetzt, nach einiger Zeit schwarze Flocken von Vanadoxyd fallen.

Die späteren Fractionen geben, mit wenig Schwefelammon versetzt, viel schneller purpurrothe Flocken.

Veranlassung zu diesem Versuch gaben allerhand ungewohnte Erscheinungen bei der Bildung eines dem Chlorsilber gleichenden, auch wohl dieses enthaltenden Niederschlages, der bei der behufs Chlorbestimmung angestellten Behandlung des wässrigen Auszuges einer Sodaschmelze des Erzes mit Silbernitrat und Salpetersäure und in noch grösserer Menge beim Eindampfen des zweiten Filtrats mit Chlorwasserstoffsäure erhalten wurde. Nach Vornahme einer Reihe geeigneter und, wie sich später herausstellte, ungeeigneter Proceduren ergab sich, dass der Niederschlag das Silbersalz einer neuen Metallsäure enthalte, die auch schliesslich in der gelben höheren Oxydationsstufe, als auch in der rothen niederen in kleinen Mengen zum Vorschein kam.

Der neue Körper, dem ich den Namen Idunium beilegen möchte, zeichnet sich besonders durch die Widerstandsfähigkeit des Silbersalzes

Digitized by Google

der höher oxydirten Säure gegen Reagentien aus, folgt sonst im Allgemeinen im analytischen Gang der Vanadinsäure; wird die letztere als vanadinsaures Ammoniak in Salmiaklösung abgeschieden, so bleibt die Idunsäure in der Mutterlauge, die sich alsbald auf Zusatz von etwas Schwefelammon röthet und rothes Idunoxyd fallen lässt, wie es scheint mit grosser Empfindlichkeit.

Digitized by Google

30. Über die zur Erklärung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie dienenden mechanischen Gleichungen.

Von R. Clausius
in Bonn.

(Vorgelegt am 19. Juni; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXX]; — ausgegeben am 26. Juni.)

Hr. von Helmholtz hat in den Sitzungsberichten der Königlichen Akademie zwei Abhandlungen unter dem Titel »Studien zur Statik monocyklischer Systeme« veröffentlicht,[1] in welchen er eine Gleichung aufstellt, die äusserlich der den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie darstellenden Gleichung ähnlich ist, und daher eine Erklärung dieses Hauptsatzes zu geben scheint. Zur Erklärung desselben Satzes ist schon im Jahre 1866 von Boltzmann eine mathematische Untersuchung angestellt,[2] und im Jahre 1870 habe ich selbst, ohne damals die Boltzmann'sche Arbeit zu kennen, eine mathematische Entwickelung ausgeführt,[3] welche von demselben Grundgedanken ausgeht, wie die Boltzmann'sche, aber in der Art der Ausführung von ihr verschieden ist, und auch eine grössere Allgemeinheit besitzt, indem sie auf einen dort nicht erwähnten wesentlichen Umstand Rücksicht nimmt. Sie betrachtet nämlich bei der Änderung der Bewegung des gegebenen Systems von materiellen Punkten die Kräftefunction nicht als gleich bleibend, sondern nimmt eine Veränderlichkeit derselben an, welche ihren Grund darin hat, dass sie eine oder mehrere Grössen enthält, die zwar während jeder stationären Bewegung constant sind, aber beim Übergange aus einer stationären Bewegung in eine andere ihre Werthe ändern können. Im Anschlusse an diese erste von mir über diesen Gegenstand veröffentlichte Arbeit habe ich dann noch einige weitere folgen lassen, welche theils Anwendungen, theils Verallgemeinerungen der betreffenden Gleichungen enthalten.[4]

[1] Hefte vom 6. und 27. März 1884.
[2] Sitzungsberichte der Wiener Akademie vom Februar 1866.
[3] Poggendorff's Annalen Bd. 142, S. 433.
[4] Mathematische Annalen Bd. IV, S. 231 und Bd. VI, S. 390; Poggendorff's Annalen Bd. 150, S. 106 und Ergänzungsbd. VII, S. 215.

Digitized by Google

Da nun die von Helmholtz'schen Gleichungen einfacher sind, als die von Boltzmann und mir aufgestellten, so könnte es scheinen, als ob unsere Entwickelungen unnöthig weitläufig wären. Dieses kann ich aber nicht zugeben, sondern glaube, dass die Vereinfachung der von Helmholtz'schen Gleichungen nur auf Kosten ihrer Anwendbarkeit stattgefunden hat. Auch unsere Gleichungen sind noch nicht ausreichend, um den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie in voller Allgemeinheit zu erklären, aber sie kommen diesem Ziele doch näher, als die von Helmholtz'schen, indem sie sich auf ausgedehnte Kategorien von Bewegungen anwenden lassen, für welche die von Helmholtz'schen Gleichungen nicht mehr gelten, worunter sich gerade solche Bewegungen befinden, die denjenigen, welche wir Wärme nennen, besonders nahe stehen.

Der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie wird bekanntlich am einfachsten durch folgende Gleichung dargestellt:

$$(1) \qquad dQ = T dS.$$

Hierin bedeutet dQ die Wärmemenge, welche einem Körper bei einer unendlich kleinen, in umkehrbarer Weise vor sich gehenden Zustandsänderung mitgetheilt wird, dS die dabei stattfindende Veränderung einer Grösse, welche durch den augenblicklichen Zustand des Körpers vollkommen bestimmt ist, und seine Entropie genannt wird, und endlich T seine absolute Temperatur.

Um einen mechanisch analogen Fall zu erhalten, denken wir uns ein System von materiellen Punkten gegeben, welche sich unter dem Einflusse von Kräften, die sie theils gegenseitig auf einander ausüben, theils von Aussen her erleiden, in stationärer Bewegung befinden. Diese Bewegung soll eine unendlich kleine Änderung erleiden, welche einerseits dadurch veranlasst sein kann, dass die äusseren Kräfte sich ändern, andererseits dadurch, dass durch eine vorübergehende äussere Einwirkung den bewegten Punkten lebendige Kraft mitgetheilt oder entzogen wird. Unter diesen veränderten Umständen soll dann wieder ein stationärer Bewegungszustand eintreten, welcher mit dem ursprünglich gegebenen verglichen werden kann. Um die zuletzt erwähnte Einwirkung mathematisch auszudrücken, wollen wir sagen, es werde dem Systeme ein unendlich kleines (positives oder negatives) Quantum lebendiger Kraft dQ zugeführt. Ferner möge die in dem Systeme während eines stationären Zustandes vorhandene lebendige Kraft mit L bezeichnet werden. In Bezug auf diese beiden Grössen ist zu bemerken, dass man die zugeführte lebendige Kraft nicht einfach als Vermehrung der vorhandenen lebendigen Kraft betrachten und demgemäss $dQ = dL$ setzen darf, sondern dass ein Theil von dQ

Digitized by Google

zu der bei der Änderung des Bewegungszustandes geleisteten Arbeit verbraucht werden kann. Man muss sich nun, wenn man die Temperatur als eine der lebendigen Kraft proportionale Grösse betrachtet, die Frage stellen, ob und unter welchen Umständen eine Gleichung von folgender Form gültig ist:

$$dQ = LdS, \tag{2}$$

worin S eine nur von dem augenblicklich bestehenden stationären Bewegungszustande des Systemes von Punkten abhängige Grösse ist.

Was nun die von Herrn VON HELMHOLTZ angewandte Behandlungsweise des Gegenstandes anbetrifft, so kommt es hier nur darauf an, die Annahmen, auf welchen sie beruht, näher in's Auge zu fassen.

Er betrachtet ein beliebig zusammengesetztes mechanisches System. Die augenblickliche Lage desselben soll durch eine Anzahl allgemeiner Coordinaten bestimmbar sein, welche er durch den Buchstaben p mit hinzugefügten Indices bezeichnet, wobei er zugleich für den nach der Zeit genommenen Differentialcoefficienten $\frac{dp}{dt}$ den Buchstaben q einführt, welchen er mit den entsprechenden Indices versieht. Eine besondere Gruppe von Coordinaten, welche er durch den Index $\mathfrak{b}$ unterscheidet, betrachtet er als schnell veränderlich und nimmt an, dass die ihrer Veränderung entsprechende Bewegung eine in sich zurücklaufende sei, und dass sich während dieser Bewegung die ganze potentielle Energie ϕ und die ganze lebendige Kraft L des Systemes nicht merklich ändere.

Wegen dieses letzteren Umstandes nimmt VON HELMHOLTZ nun weiter an, dass ϕ und L als Grössen zu behandeln seien, die zwar von $q_\mathfrak{b}$, aber nicht von $p_\mathfrak{b}$ abhängen, und benutzt dieses zur Vereinfachung der Gleichung, mittelst deren die auf Vergrösserung der Coordinate $p_\mathfrak{b}$ hinwirkende äussere Kraft, welche er mit $-P_\mathfrak{b}$ bezeichnet, bestimmt wird. Die betreffende Gleichung lautet nämlich vollständig:

$$P_\mathfrak{b} = -\frac{\partial}{dp_\mathfrak{b}}(\phi - L) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\mathfrak{b}}\right). \tag{3}$$

Hierin vernachlässigt aber VON HELMHOLTZ das erste an der rechten Seite stehende Glied, weil es ein nach $p_\mathfrak{b}$ genommener Differentialcoefficient ist, und schreibt:

$$P_\mathfrak{b} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\mathfrak{b}}\right). \tag{4}$$

Führt man noch das abgekürzte Zeichen $s_\mathfrak{b}$ ein, mit der Bedeutung:

Digitized by Google

$$s_b = \frac{\partial L}{\partial q_b}, \tag{5}$$

so lautet die vereinfachte Gleichung:

$$P_b = -\frac{ds_b}{dt}. \tag{6}$$

Mit Hülfe dieser Gleichung leitet von Helmholtz die folgende Gleichung ab:

$$dQ = \sum_b (q_b \cdot ds_b), \tag{7}$$

und aus dieser Gleichung zieht er seine weiteren Schlüsse, wobei er noch die Annahme macht, dass die Änderungen der Grössen q_b mit verschwindender Geschwindigkeit erfolgen, so dass alle mit $\frac{dq_b}{dt}$ multiplicirten Ausdrücke als verschwindende Grössen zu behandeln sind.

Annahmen dieser Art kann man natürlich nur für bestimmte Bewegungsarten machen. Dahin gehören z. B. Rotationsbewegungen, wenn man die Winkelgeschwindigkeiten der rotirenden Körper als die Grössen q_b wählt, und in der That beziehen sich auch die von Hrn. von Helmholtz angeführten speciellen Beispiele auf Rotationsbewegungen und solche Bewegungen, die ihnen ähnlich behandelt werden können. Anders aber verhält es sich mit den jedenfalls sehr mannigfaltigen Atombewegungen, welche wir unter dem Namen Wärme zusammenfassen, und insbesondere mit der in der kinetischen Gastheorie angenommenen Bewegungsart.

Bei dieser Bewegung kommen sehr viele und grosse Geschwindigkeitsänderungen vor, und es ist daher, wenn man die auf irgend ein Coordinatensystem bezogenen Geschwindigkeitscomponenten als die Grössen q_b wählt, nicht zulässig, die Differentialcoefficienten $\frac{dq_b}{dt}$ als verschwindend klein zu behandeln. Ferner kommen bei diesen vielfachen Änderungen der Geschwindigkeiten Kräfte in Thätigkeit, welche nicht vernachlässigt werden dürfen, und welche daher die oben erwähnte Vereinfachung der Gleichung (3) unmöglich machen. Man kann allerdings sagen, dass die ganze potentielle Energie und die ganze lebendige Kraft eines aus bewegten Atomen bestehenden Körpers von den Coordinaten der einzelnen Atome nicht merklich abhänge, aber das liegt nur daran, dass die Masse eines Atoms gegen die Masse des ganzen Körpers ausserordentlich klein ist. Wenn aus den Grössen, welche sich auf die einzelnen Atome beziehen, Summen gebildet werden, welche alle Atome umfassen, so brauchen die Werthe dieser Summen nicht mehr verschwindend klein zu sein. Ausserdem

Digitized by Google

ist noch ganz besonders hervorzuheben, dass die beiden an der rechten Seite der Gleichung (3) stehenden Glieder

$$\frac{\partial}{\partial p_b}(\phi - L) \text{ und } \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_b}\right)$$

im Allgemeinen Grössen von gleicher Ordnung sind, von denen keine gegen die andere vernachlässigt werden darf. Nur in speciellen Fällen darf dieses geschehen, und in solchen Fällen muss natürlich die Berechtigung dazu besonders nachgewiesen werden.

Um an einem Beispiele zu zeigen, was für Resultate man erhalten würde, wenn man die VON HELMHOLTZ'sche Gleichung auf Bewegungen der eben erwähnten Art anwenden wollte, und wie sich in dieser Beziehung die VON HELMHOLTZ'sche Gleichung von den schon früher von BOLTZMANN und mir aufgestellten Gleichungen unterscheidet, möge sie im Folgenden auf ein Bewegungssystem angewandt werden, welches dem in der kinetischen Gastheorie angenommenen ähnlich, aber insofern einfacher ist, als es nur aus vollkommen periodischen Bewegungen nach einer bestimmten Richtung besteht.

Wir wollen nämlich annehmen, dass eine sehr grosse Anzahl von gleichen materiellen Punkten zwischen zwei parallelen ebenen Wänden befindlich sei. Die Wände sollen in der auf ihren Ebenen senkrechten Richtung Kräfte auf die Punkte ausüben, welche in grösseren Entfernungen abstossend oder anziehend wirken können, in kleinen Entfernungen aber jedenfalls in Abstossungen bestehen sollen, deren Grösse mit abnehmender Entfernung wächst. Unter dem Einflusse dieser Kräfte sollen die Punkte sich in senkrechter Richtung zwischen den Wänden hin- und herbewegen, und zwar mit gleichen mittleren Geschwindigkeiten, aber so, dass die verschiedenen Punkte sich zu einer gegebenen Zeit in verschiedenen Bewegungsphasen befinden.

Dieses stationäre Bewegungssystem soll dann in ein anderes übergehen, welches von derselben Art ist, aber in Bezug auf Geschwindigkeit und Ausdehnung etwas von ihm abweicht, was dadurch veranlasst werden kann, dass dem Systeme von Punkten eine unendlich kleine lebendige Kraft dQ mitgetheilt wird, welche wir uns gleichmässig über alle Punkte vertheilt denken wollen, und dass gleichzeitig die Wände um unendlich kleine Strecken weiter auseinander oder näher zusammenrücken. Es fragt sich nun, wie sich in diesem Falle die von Hrn. VON HELMHOLTZ für dQ aufgestellte Gleichung gestaltet.

Wir wählen die auf den Wandebenen senkrechte Richtung als eine der Coordinatenrichtungen und stellen die auf diese Richtung bezüglichen, schnell veränderlichen Coordinaten der Punkte, gemäss der VON HELMHOLTZ'schen Bezeichnungsweise, durch p_b dar. Dann

Digitized by Google

lautet die zur Bestimmung der lebendigen Kraft L dienende Gleichung:

$$L = \sum_b \frac{m}{2}\left(\frac{dp_b}{dt}\right)^2, \tag{8}$$

worin das Summenzeichen sich auf alle beweglichen Punkte bezieht. Führen wir hierin noch, wie es von Helmholtz gethan hat, für den Differentialcoefficienten $\frac{dp_b}{dt}$ das vereinfachte Zeichen q_b ein, so geht die Gleichung über in:

$$L = \sum_b \frac{m}{2} q_b^2. \tag{9}$$

Hieraus erhält man weiter zur Bestimmung der Grösse, welche von Helmholtz mit s_b bezeichnet hat, die Gleichung

$$s_b = \frac{\partial L}{\partial q_b} = m q_b. \tag{10}$$

Setzt man diesen Ausdruck von s_b in die von Helmholtz'sche Gleichung (7) ein, so kommt:

$$dQ = \sum_b [q_b \cdot d(m q_b)]. \tag{11}$$

welche Gleichung sich auch in folgender Form schreiben lässt:

$$dQ = d\sum_b \frac{m}{2} q_b^2 \tag{12}$$

oder, gemäss (9), in der einfachen Form:

$$dQ = dL. \tag{13}$$

Dieses ist die Gleichung, zu welcher man gelangen würde, wenn man die von Helmholtz'sche Gleichung auf die hier zur Betrachtung ausgewählte Bewegungsart anwenden wollte.

Von dieser Gleichung ist diejenige, welche sich aus den von Boltzmann und mir ausgeführten Entwickelungen ergiebt, sehr verschieden. Sie lautet nämlich:

$$dQ = \Sigma\left[m\overline{v^2} \cdot d\log(i\overline{v^2})\right]. \tag{14}$$

Hierin stellt i die Zeit dar, welche die beweglichen Punkte zu einem Hin- und Hergange zwischen den beiden Wänden gebrauchen. v bedeutet die augenblickliche Geschwindigkeit eines Punktes, und der über v^2 stehende wagrechte Strich deutet an, dass der auf einen ganzen Hin- und Hergang bezügliche Mittelwerth von v^2 zu nehmen ist.

Digitized by Google

Da die Grössen i und $\overline{v^2}$, unserer Annahme gemäss, für alle Punkte gleich sind, so hat auch das Differential $d\log(i\overline{v^2})$ für alle Punkte einen und denselben Werth, und kann daher als gemeinsamer Factor aus dem Summenzeichen herausgenommen werden, wodurch man, wenn man noch das Differential mit 2 multiplicirt und dafür die Summe durch 2 dividirt, erhält:

$$(15) \qquad dQ = \left(\sum \frac{m}{2}\overline{v^2}\right) d\left[2\log(i\overline{v^2})\right].$$

In der hierin vorkommenden Summe können wir den wagrechten Strich über v^2 auch fortlassen, weil die Summe, welche sich auf sehr viele Punkte bezieht, die sich in verschiedenen Bewegungsphasen befinden, schon an sich einen nur noch unmerklichen Veränderungen unterworfenen Mittelwerth darstellt. Da dieser Werth die lebendige Kraft des Systems von Punkten ist, so können wir die Gleichung kürzer so schreiben:

$$(16) \qquad dQ = Ld\left[2\log(i\overline{v^2})\right],$$

und sie hat somit die Form der Gleichung (2), wie es zur Übereinstimmung mit dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie nöthig ist.

Um den Unterschied zwischen der aus der VON HELMHOLTZ'schen Gleichung hervorgegangenen Gleichung (13) und der Gleichung (14) recht deutlich hervortreten zu lassen, wollen wir in der letzteren folgende Umformung machen:

$$d\log(i\overline{v^2}) = d\log\sqrt{\overline{v^2}} + d\log\left(i\sqrt{\overline{v^2}}\right) = \frac{1}{2}\frac{d\overline{v^2}}{\overline{v^2}} + \frac{1}{2}d\log(i^2\overline{v^2}),$$

wodurch sie übergeht in:

$$(17) \qquad dQ = d\sum\frac{m}{2}\overline{v^2} + \sum\left[\frac{m}{2}\overline{v^2}\,d\log(i^2\overline{v^2})\right].$$

Wenn wir mit dieser Gleichung dann noch dieselbe Umgestaltung vornehmen, wie die, durch welche oben die Gleichung (14) in (16) verwandelt wurde, so erhalten wir:

$$(18) \qquad dQ = dL + Ld\log(i^2\overline{v^2}).$$

Das erste in dieser Gleichung an der rechten Seite stehende Glied ist dieselbe Grösse, wie die, welche die rechte Seite der Gleichung (13) bildet. Das zweite an der rechten Seite unserer Gleichung stehende Glied, welches die bei der Änderung des Bewegungszustandes geleistete Arbeit darstellt, fehlt aber in der Gleichung (13), woraus ohne Weiteres

Digitized by Google

ersichtlich ist, dass diese Gleichung nicht richtig sein kann, und dass somit die Anwendung der von Helmholtz'schen Gleichung (7) auf Bewegungen der hier betrachteten Art unzulässig ist.

Wenn aber schon auf Bewegungen so einfacher Art, wie diese, die Anwendung der von Helmholtz'schen Gleichung nicht mehr zulässig ist, so ist man um so weniger berechtigt, sie auf die jedenfalls sehr complicirten Bewegungen der Molecüle und Atome, welche wir als Wärme bezeichnen, in Anwendung zu bringen.

Digitized by Google

31. Über Differentialgleichungen, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen.

Von L. Fuchs.

(Vorgetragen am 26. Juni: — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXXII]; — ausgegeben am 3. Juli.)

Ist eine Differentialgleichung gegeben, so kann man nach einem bekannten Satze von Cauchy ein und nur **ein Integral** finden von der Beschaffenheit, dass für einen willkürlich angenommenen Werth z_0 der unabhängigen Variabeln z das Integral y und seine $n-1$ ersten Ableitungen y', $y^{(2)}$, ... $y^{(n-1)}$ willkürlich vorgeschriebene Werthe $y = \eta_0$, $y' = \eta_1$, $y^{(2)} = \eta_2$, ... $y^{(n-1)} = \eta_{n-1}$ erhalten, wenn zugleich festgesetzt wird, welchen von den aus der Differentialgleichung sich ergebenden diesen Werthen zugehörigen Werthen der n^{ten} Ableitung $y^{(n)}$ man gewählt hat. Wir wollen der Kürze halber diese Bestimmungsstücke eines Integrals der Differentialgleichung nach der Analogie der in der Mechanik gebräuchlichen Bezeichnung die Anfangswerthe des Integrals nennen. Diejenigen Werthe von z, für welche sich das Integral y verzweigt, wollen wir als die Verzweigungspunkte desselben bezeichnen. Es ergiebt sich nun, dass im Allgemeinen diese Punkte in zwei Kategorien zerfallen, nämlich in solche, welche von den Anfangswerthen abhängen und sich mit der stetigen Änderung der letzteren stetig verschieben, und in solche, welche feste Lagen in der z-Ebene haben. Man kann es als eines der wesentlichsten Merkmale einer linearen Differentialgleichung bezeichnen, dass die Verzweigungspunkte ihrer Integrale sämmtlich zur zweiten Kategorie gehören, und eben diese Eigenschaft ist es, welche den Verlauf der Integrale bei den linearen Differentialgleichungen übersichtlicher macht als bei den nicht linearen. Ich habe mir daher die Aufgabe gestellt, diejenigen Differentialgleichungen überhaupt zu charakterisiren, deren Integrale nur Verzweigungspunkte der zweiten Kategorie besitzen. Im Folgenden erlaube ich mir, die Resultate meiner Untersuchung zunächst für den Fall der Differentialgleichungen erster Ordnung zu entwickeln. Aber man wird aus der Darstellung erkennen, dass im Wesentlichen dieselbe Methode für die Differentialgleichungen höherer Ordnung ihre Gültigkeit behält.

Digitized by Google

Eine weitere Eigenschaft der linearen Differentialgleichungen, welche sich aus dem Verhalten ihrer Integrale in der Umgebung eines singulären Punktes ergiebt, ist die, dass die Grössen, welche die Art der daselbst erfolgenden Verzweigung des Integrals bestimmen, ebenfalls von den Anfangswerthen desselben unabhängig sind, in dem Sinne, dass jene Grössen sich nicht stetig mit diesen Anfangswerthen ändern. Um daher diejenigen Classen von Differentialgleichungen zu finden, welche den linearen Differentialgleichungen am nächsten stehen, muss die Aufgabe behandelt werden: Es soll angegeben werden, welche unter den Differentialgleichungen mit nicht verschiebbaren Verzweigungspunkten der Integrale die Eigenschaft haben, dass auch die Grössen, welche die Art der in festen Punkten stattfindenden Verzweigungen der Integrale bestimmen, sich nicht mit den Anfangswerthen derselben stetig ändern. Die Resultate der auf diese Aufgabe gerichteten Untersuchung hoffe ich bei anderer Gelegenheit vorlegen zu können.

1.

Es seien drei Grössen x, y, z durch eine Gleichung

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

mit einander verbunden von der Beschaffenheit, dass F eine ganze rationale Function von y und z mit von x abhängigen Coefficienten darstellt. Ferner sei $D(x, y)$ die Discriminante der algebraischen Function z von y, so dass also

$$D(x, y) = 0 \tag{2}$$

die Resultante der Elimination von z zwischen Gleichung (1) und der Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \tag{3}$$

ist. Bedeutet $y = \eta$ eine Wurzel der Gleichung (2), $z = \zeta$ eine den Gleichungen (1) und (3) gemeinschaftliche Wurzel, wenn in denselben y durch η ersetzt wird, und substituirt man in (1)

$$\begin{cases} y = \eta + u \\ z = \zeta + v \end{cases} \tag{4}$$

so verwandelt sich diese Gleichung in

$$F_1(x, u, v) = 0 \tag{5}$$

wo F_1 eine ganze rationale Function von u und v mit von x abhängenden Coefficienten darstellt.

Digitized by Google

Es sei B ein Gebiet der x-Ebene, innerhalb dessen η und ζ überall eindeutig und stetig verlaufen, und der Modul der Differenz zwischen η und einer von η im Allgemeinen verschiedenen Wurzel der Gleichung (2) nirgends unterhalb einer gewissen Grenze herabsinkt, so ist für alle Werthe von x dieses Gebietes und für alle Werthe von u innerhalb eines hinlänglich kleinen in der u-Ebene um $u = 0$ beschriebenen Kreises K, die Discriminante $D_1(x, u)$ von $F_1(x, u, v)$ mit Ausnahme des Mittelpunktes dieses Kreises von Null verschieden; für $u = 0$ aber ist $D_1(x, u)$ Null für jedes x des Gebietes B. Jede Wurzel v der Gleichung (5) lässt sich für alle Werthe x des Gebietes B und die Werthe u des Gebietes K in der Form

$$v = g_0 u^{\frac{k}{\alpha}} + g_1 u^{\frac{k+1}{\alpha}} + g_2 u^{\frac{k+2}{\alpha}} + \ldots \tag{6}$$

darstellen, worin k eine positive oder negative ganze Zahl oder auch Null, α eine positive ganze Zahl bedeutet, und worin $g_0, g_1, g_2, \ldots$ innerhalb B stetige und eindeutige Functionen von x sind, welche demnach innerhalb eines um einen Punkt a des Gebietes B beschriebenen ganz in dieses Gebiet fallenden Kreises nach positiven ganzen Potenzen von $x - a$ entwickelt werden können.

2.

Wenn die Verzweigungspunkte der Integrale einer Differentialgleichung sich mit den Änderungen der Anfangswerthe stetig verschieben, so wird man im Allgemeinen die letzteren so variiren können, dass jeder Punkt eines gewissen Gebietes der unabhängigen Variabeln Verzweigungspunkt wird.

Umgekehrt wenn die Verzweigungspunkte sich nicht mit den Änderungen der Anfangswerthe stetig verschieben sollen, so darf es nicht geschehen, dass man Integrale bestimmen könne, welche sich in einem beliebigen Punkte eines gewissen Gebietes der unabhängigen Variabeln verzweigen. Sind nämlich $a, a', a'', \ldots$ einander hinlänglich nahe gelegene Punkte eines solchen Gebietes, $J, J', J'', \ldots$ Integrale, welche sich bezüglich in $a, a', a'', \ldots$ derart verzweigen, dass für $J^{(k)}$ die in der Umgebung von $a^{(k)}$ gelegenen Punkte nicht Verzweigungspunkte sind, und setzt man jedes der Integrale $J, J', J'', \ldots$ bis zu ein und demselben Punkte P des Gebietes der unabhängigen Variabeln fort, wo die Integrale oder ihre Ableitungen nicht gleiche Werthe annehmen, — was immer möglich ist, da die Integrale nicht im ganzen Gebiete der unabhängigen Variabeln identisch sind — so sind

Digitized by Google

im Allgemeinen die Werthe der Integrale und ihrer Ableitungen in P beliebig wenig von einander verschieden; man könnte also dadurch, dass man in P als Ausgangspunkt die Anfangswerthe stetig ändert, die Verzweigungspunkte stetig verschieben (von a nach a' oder a'' etc.).

3.

Es sei

$$F(z, y, y') = 0 \tag{A}$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung, wo F eine ganze rationale Function der unabhängigen Variabeln y und ihrer ersten Ableitung y' nach der unabhängigen Variabeln z ist, deren Coefficienten von z abhängen. Wir können voraussetzen, dass F in dem Sinne irreductibel sei, dass dasselbe nicht in gleichbeschaffene Functionen niedrigeren Grades in Bezug auf y' zerlegbar sei.

Ein Integral y der Gleichung (A) kann sich bekanntlich[1] für einen Punkt $z = z_0$, in dessen Umgebung die Coefficienten der Gleichung (A) eindeutig und stetig sind, nur dann verzweigen, wenn dem Integrale für $z = z_0$ ein Werth $y = y_0$ zukommt von der Beschaffenheit, dass die Wurzeln y' der Gleichung

$$F(z_0, y_0, y') = 0 \tag{1}$$

vielfach oder auch unendlich gross werden.

Es sei demgemäss $D(z, y)$ die Discriminante der algebraischen Function y' von y, das heisst die Resultante der Elimination von y' zwischen der Gleichung (A) und

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \tag{B}$$

und es sei η eine Wurzel der Gleichung

$$D(z, y) = 0, \tag{C}$$

und $y' = \zeta$ eine gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen (A) und (B), wenn in denselben y durch η ersetzt wird.

Setzen wir in (A)

$$\begin{cases} y = \eta + u \\ y' = \zeta + v, \end{cases} \tag{2}$$

wodurch wir

$$F_1(z, u, v) = 0 \tag{3}$$

erhalten mögen, wo F_1 eine ganze rationale Function von u und v bedeutet mit von z abhängigen Coefficienten. Alsdann kann man

[1] Vergl. Briot et Bouquet, Journal de l'École Polytechnique cah. 36 p. 191.

Digitized by Google

nach No. 1 ein Gebiet B für z und ein Gebiet K für u abgrenzen der Art, dass innerhalb des Gebietes B η und ζ eindeutig und stetig verlaufen und dass jede Wurzel v der Gleichung (3) für diese Werthe von z und u in der Form

$$v = g_0 u^{\frac{k}{\alpha}} + g_1 u^{\frac{k+1}{\alpha}} + g_2 u^{\frac{k+2}{\alpha}} + \ldots\ldots \tag{4}$$

dargestellt wird, wo k eine positive oder negative ganze Zahl oder Null, α eine positive ganze Zahl bedeutet, und $g_0, g_1, g_2 \ldots$ innerhalb eines um einen willkürlichen Punkt $z = z_0$ des Gebietes B beschriebenen ganz in dieses Gebiet hineinfallenden Kreises $\mathfrak{K}$ nach positiven ganzen Potenzen von $z - z_0$ entwickelbare Functionen von z sind.

Setzen wir

$$u = t^\alpha, \tag{5}$$

so erhalten wir unter Berücksichtigung von (2) aus Gleichung (4)

$$\alpha t^{\alpha-1}\frac{dt}{dz} = \zeta - \frac{d\eta}{dz} + g_0 t^k + g_1 t^{k+1} + \ldots\ldots \tag{6}$$

In Folge der Voraussetzung, dass F irreductibel sei, ist die Möglichkeit ausgeschlossen, dass $F_1(z, u, v)$ für beliebige z und u durch eine Potenz von v theilbar ist, es können deshalb in (4) nicht alle Grössen g für jedes z verschwinden, und wenn, wie wir voraussetzen, die k^{te} Potenz von $u^{\frac{1}{\alpha}}$ die niedrigste ist, so ist g_0 nicht identisch Null. Es sei demnach der willkürliche Punkt z_0 in B so gewählt, dass g_0 für $z = z_0$ von Null verschieden ist.

Es sei nun

1. $k < 0$,

so folgt aus Gleichung (6), dass $\frac{dz}{dt}$ darstellbar ist in der Form

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon_0 t^{\alpha-1-k} + \varepsilon_1 t^{\alpha-k} + \varepsilon_2 t^{\alpha-k+1} + \ldots, \tag{7}$$

wo $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ nach positiven ganzen Potenzen von $z - z_0$ fortschreitende Reihen bedeuten, die innerhalb eines gewissen z_0 umgebenden Kreises convergiren, und wovon überdiess ε_0 für $z = z_0$ nicht verschwindet. Da $\alpha - 1 - k > 0$, so ergiebt sich hieraus auf bekannte Weise

$$z - z_0 = c_0 t^{\alpha-k} + c_1 t^{\alpha-k+1} + \ldots, \tag{8}$$

wo $c_0, c_1, \ldots$ Constanten bedeuten. Da $\alpha - k > 1$, so ergiebt Gleichung (8) durch Umkehrung, dass t folglich auch u und demnach das Integral y sich in $z = z_0$ verzweigt.

Digitized by Google

I. Soll also der willkürliche Punkt $z = z_0$ nicht Verzweigungspunkt sein, so darf k nicht einen negativen Werth haben, d. h. die Gleichung (3) darf für $u = 0$ nicht eine unendlich grosse Wurzel v besitzen.

Dagegen besitzt der Voraussetzung gemäss die Gleichung (3) für $u = 0$ mehrere Wurzeln $v = 0$, für diese ist

2. $k > 0$.

Wenn nun nicht identisch

$$\zeta - \frac{d\eta}{dz} = 0, \tag{9}$$

so sei der willkürliche Punkt z_0 so beschaffen, dass $\zeta - \frac{d\eta}{dz}$ für $z = z_0$ von Null verschieden. Alsdann ergiebt sich aus (6), dass $\frac{dz}{dt}$ sich in der Form

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon_0 t^{\alpha-1} + \varepsilon_1 t^{\alpha} + \varepsilon_2 t^{\alpha+1} + \ldots, \tag{10}$$

darstellen lässt, wo $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ nach positiven ganzen Potenzen von $z - z_0$ fortschreitende, innerhalb eines gewissen z_0 umgebenden Kreises convergirende Reihen sind, wovon ε_0 für $z = z_0$ nicht verschwindet. Aus (10) ergiebt sich wieder auf bekannte Weise

$$z - z_0 = c_0 t^{\alpha} + c_1 t^{\alpha+1} + \ldots, \tag{11}$$

wo $c_0, c_1, \ldots$ Constanten sind.

Ist nun $\alpha \geqq 2$, so ergäbe sich hieraus, dass t, folglich auch u und y sich in $z = z_0$ verzweigen würden. Wenn dieses also nicht statthaft sein soll, so muss zunächst Gleichung (9) identisch erfüllt sein.

II. Ist also η eine Wurzel der Gleichung (C) und so beschaffen, dass sich die algebraische Function y' von y für willkürliche z in $y = \eta, y' = \zeta$ verzweigt, so muss ζ mit der Ableitung von η übereinstimmen, d. h. η muss ein Integral der Gleichung (A) sein.

Ist die Gleichung (9) identisch erfüllt, so ergiebt sich für den Fall $\alpha - 1 - k > 0$ eine wie Gleichung (7) beschaffene Gleichung, und daraus die Folgerung, dass y sich in $z = z_0$ verzweigen würde. Es muss also auch

$$k \geqq \alpha - 1 \tag{D}$$

sein, in welchem Falle t entweder identisch Null oder in der Umgebung von z_0 eindeutig wird, d. h.

Digitized by Google

III. Wenn für die algebraische Function y' von y, für willkürliche $z, y=\eta, y'=\zeta$ eine $\alpha-1$fache Verzweigungsstelle ist, so muss die Gleichung

$$F(z,y,\zeta)=0 \tag{E}$$

mit der Unbekannten y die Grösse η mindestens als $\alpha-1$fache Wurzel besitzen.

Wenn die Gleichung (3) ausser $v=0$ für $u=0$ noch nicht verschwindende Wurzeln v besitzt, so ist für diese der Fall

3. $k=0$ zu betrachten.

Da Gleichung (9) identisch erfüllt ist, so ergiebt sich aus (6) eine Gleichung, welche (7) analog ist, wenn in dieser $k=0$ gesetzt wird, und es würde sich aus dieser ein in z_0 sich verzweigendes Integral y ergeben, wenn $\alpha \geqq 2$ wäre, d. h.

IV. Ist $y'=\zeta_1$ eine von $y'=\zeta$ verschiedene Wurzel der Gleichung.

$$F(z,\eta,y')=0, \tag{12}$$

so verzweigt sich die algebraische Function y' von y nicht in $y=\eta, y'=\zeta_1$.

4.

Die Gleichung (A) sei nach Potenzen von y' entwickelt,

$$F(z,y,y')=a_0y'^m+a_1y'^{m-1}+\ldots+a_m=0 \tag{1}$$

wo $a_0, a_1, \ldots a_m$ ganze rationale Functionen von y mit von z abhängigen Coefficienten sind. Man kann voraussetzen, dass $a_0, a_1, \ldots a_m$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Es sei nunmehr η ein Werth von y, für welchen a_0 verschwindet, ohne dass zugleich Gleichung (C) durch $y=\eta$ befriedigt wird. Setzen wir

$$y=\eta+u, \tag{2}$$

so verwandelt sich (1) in

$$a_0'y'^m+a_1'y'^{m-1}+\ldots+a_m'=0, \tag{3}$$

worin $a_0', a_1', \ldots a_m'$ ganze rationale Functionen von u mit von z abhängigen Coefficienten sind. Man kann alsdann ein Gebiet B für die Variable z derart abgrenzen, dass für alle Werthe z dieses Gebietes η eindeutig und stetig, und dass eine Wurzel y' der Gleichung (3) für $u=0$ unendlich wird und diese Wurzel derselben innerhalb eines gewissen $u=0$ umgebenden Kreises in der Form

Digitized by Google

$$y' = g_0 u^{-k} + g_1 u^{-k+1} + g_2 u^{-k+2} + \dots \quad (4)$$

dargestellt wird, wo k eine positive ganze Zahl und wo $g_0, g_1, g_2, \dots$ nach positiven ganzen Potenzen von $z - z_0$ fortschreitende Reihen sind, convergent innerhalb eines ganz in B liegenden Kreises mit dem willkürlichen Punkte z_0 als Mittelpunkt. Da g_0 als Coefficient der niedrigsten Potenz von u nicht identisch Null ist, so können wir z_0 so wählen, dass g_0 von Null verschieden ist für $z = z_0$, und da

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dz},$$

so folgt aus (4) eine Gleichung der Form

$$\frac{du}{dz} = \gamma_0 u^{-k} + \gamma_1 u^{-k+1} + \dots, \quad (5)$$

wo $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots$ nach ganzen positiven Potenzen von $z - z_0$ fortschreitende Reihen sind, von welchen γ_0 für $z = z_0$ nicht verschwindet. Hieraus ergiebt sich auf bekannte Weise für u eine nach positiven ganzen Potenzen von $(z - z_0)^{\frac{1}{k+1}}$ fortschreitende Reihe. Es wäre demnach z_0 für u, folglich auch für y ein Verzweigungspunkt. Hieraus und aus Satz I voriger Nummer ergiebt sich demnach:

I. Der Coefficient a_0 in Gleichung (1) ist von y unabhängig, oder was dasselbe ist, die durch die Gleichung (A) definirte algebraische Function y' von y wird, für willkürliche Werthe von z, für keinen endlichen Werth von y unendlich.

Ist

$$w = \Phi(z, y) \quad (6)$$

eine rationale Function von y mit von z abhängigen Coefficienten, und y Integral der Gleichung (A), so genügt w einer Differentialgleichung erster Ordnung, deren Integrale ebenfalls mit den Anfangswerthen nicht verschiebbare Verzweigungspunkte besitzen, wenn die Integrale von (A) diese Eigenschaft haben.

Es sei insbesondere

$$w = \frac{1}{y}, \quad (7)$$

also

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{1}{w^2}\frac{dw}{dz}. \quad (8)$$

Substituirt man (7) und (8) in (1), so folgt

$$a_0\left(\frac{dw}{dz}\right)^m - a_1 w^2\left(\frac{dw}{dz}\right)^{m-1} + a_2 w^4\left(\frac{dw}{dz}\right)^{m-2} - \dots \pm a_m w^{2m} = 0. \quad (9)$$

Digitized by Google

Da nach Satz I $\frac{dw}{dz}$, für willkürliche Werthe von z, für keinen endlichen Werth von w unendlich sein darf, so ergiebt sich hieraus:

II. Der Coefficient a_k in Gleichung (1) ist in Bezug auf y höchstens vom Grade $2k$.

5.

Fassen wir die Resultate der beiden vorigen Nummern zusammen, so erhalten wir folgenden Satz:

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Integrale der Gleichung (A) feste, sich nicht mit den Änderungen der Anfangswerthe stetig verschiebende Verzweigungspunkte besitzen, sind die folgenden:

1. Die Gleichung (A) hat die Form:

$$(F) \qquad y^m + \psi_1 y^{m-1} + \psi_2 y^{m-2} + \ldots + \psi_m = 0,$$

worin $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_m$ ganze rationale Functionen von y mit von z abhängigen Coefficienten von der Beschaffenheit bedeuten, dass ψ_k höchstens vom Grade $2k$ in Bezug auf y ist.

2. Ist $y = \eta$ eine Wurzel der Discriminantengleichung (C), für welche die durch (F) definirte algebraische Function y' von y sich verzweigt, so ist η ein Integral der Gleichung (F). In der y' als algebraische Function von y darstellenden RIEMANN'schen Fläche hat y' in sämmtlichen über $y = \eta$ liegenden Verzweigungsstellen den Werth $y' = \zeta = \frac{d\eta}{dz}$.

3. Je α Blättern, welche sich in $y = \eta$, $y' = \zeta = \frac{d\eta}{dz}$ verzweigen, entsprechen mindestens $\alpha - 1$ mit $y = \eta$ zusammenfallende Wurzeln der Gleichung

$$(E) \qquad F(z, y, \zeta) = 0$$

mit der Unbekannten y.

6.

Indem ich mir vorbehalte, in eine Auseinanderlegung der verschiedenen Typen, welche die Differentialgleichung (A) darbietet, wenn sie den Bedingungen der vorigen Nummer genügt, in dem allgemeinen Falle, bei späterer Gelegenheit einzugehen, will ich mich

Digitized by Google

gegenwärtig damit begnügen, noch einen interessanten speciellen Fall hervorzuheben, den Fall nämlich, dass die algebraische Function y' von y, welche durch die Gleichung (F) definirt worden, nach der Bezeichnung von RIEMANN zur Classe $p = 0$ oder $p = 1$ gehört.

Es sei

I. $p = 0$,

alsdann ist bekanntlich

$$y = \frac{\phi_1(t)}{\phi_0(t)}, \tag{1}$$

$$y' = \frac{\phi_2(t)}{\phi_0(t)}, \tag{2}$$

wo ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 ganze rationale Functionen von t, in unserem Falle mit von z abhängigen Coefficienten. Bezeichnen wir zur Abkürzung $\frac{\partial \phi_i}{\partial z}$ mit $\bar{\phi}_i$ und $\frac{\partial \phi_i}{\partial t}$ mit ϕ_i', so folgt durch Differentiation von (1) und durch Vergleichung mit (2)

$$\frac{dt}{dz} = \frac{\phi_0\phi_2 - \bar{\phi}_1\phi_0 + \phi_1\bar{\phi}_0}{\phi_1'\phi_0 - \phi_1\phi_0'}. \tag{3}$$

Wenn die Verzweigungspunkte der Integrale von (F) nicht mit den Anfangswerthen sich stetig ändern, so hat das Integral t der Gleichung (3) die gleiche Eigenschaft. Nach voriger Nummer, Bedingung 1, muss daher

$$\frac{dt}{dz} = \frac{\phi_0\phi_2 - \bar{\phi}_1\phi_0 + \phi_1\bar{\phi}_0}{\phi_1'\phi_0 - \phi_1\phi_0'} = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 \tag{4}$$

sein, wo A_0, A_1, A_2 von z allein abhängen.

Sind die Functionen ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 vom m^{ten} Grade in Bezug auf t, so ist $\phi_1'\phi_0 - \phi_1\phi_0'$ vom $2m - 2^{\text{ten}}$ Grade, und die Gleichung (4) liefert daher $2m - 2$ Bedingungsgleichungen zwischen den $3m + 2$ Coefficienten von ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 und den Ableitungen der ersten Ordnung der Coefficienten von ϕ_0 und ϕ_1 nach z.

Es sei

II. $p = 1$.

Alsdann ist, wie bekannt,[1]

$$y = \frac{\phi_1 + \psi_1\sqrt{R(t)}}{\phi_0 + \psi_0\sqrt{R(t)}} \tag{5}$$

$$y' = \frac{\phi_2 + \psi_2\sqrt{R(t)}}{\phi_0 + \psi_0\sqrt{R(t)}}, \tag{6}$$

[1] Vergl. CLEBSCH, BORCHARDT'S Journal B. 64 S. 222.

Digitized by Google

wo ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 ganze rationale Functionen von t vom Grade $k \leqq \frac{1}{2}m$, ψ_0, ψ_1, ψ_2 ganze rationale Functionen von t vom Grade $h \leqq \frac{1}{2}m$, derart, dass $h + k = m - 2$, und R eine ganze rationale Function von t vom 4ten Grade, in unserem Falle diese sämmtlichen Functionen mit von z abhängigen Coefficienten behaftet.

Differenzirt man Gleichung (5) und vergleicht das Resultat mit (6), so erhält man für $\frac{dt}{dz}$ eine Differentialgleichung (ε), welche die Eigenschaft haben muss, dass die Verzweigungspunkte ihrer Integrale t sich nicht mit den Anfangswerthen verschieben, wenn Gleichung (F) diese Eigenschaft besitzt. Die Differentialgleichung (ε) wird aber in Bezug auf $\frac{dt}{dz}$ vom 2ten Grade. Nach Nr. 5 Bedingung 1. muss daher $\frac{dt}{dz}$ die Form haben

$$\frac{dt}{dz} = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \lambda \sqrt{R(t)}, \tag{7}$$

wo A_0, A_1, A_2, λ von z allein abhängen. Vergleicht man hiermit die Gleichung (ε), so erhält man $2m + 3$ Bedingungsgleichungen zwischen den im Allgemeinen in der Zahl $3m + 4$ vorhandenen Coefficienten der ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2, ψ_0, ψ_1, ψ_2, R und den ersten Ableitungen nach z derer von ϕ_0, ψ_0, ϕ_1, ψ_1, R.

Nach der Bedingung 2 in Nr. 5 muss ferner sein:

$$\frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial t}(A_0 + A_1 t + A_2 t^2) = (B_0 + B_1 t)\, R(t), \tag{8}$$

wo B_0, B_1, von z allein abhängen. Hieraus folgen noch vier Gleichungen zwischen den genannten Coefficienten und Ableitungen. Die Gesammtzahl der Bedingungen ist also im Allgemeinen $2m + 7$.

7.

Ein Beispiel zu der in voriger Nummer bezeichneten speciellen Classe von Differentialgleichungen bietet der Fall, wo der Factor der Discriminante $D(z, y)$ der Gleichung (F), welcher gleich Null gesetzt, die Verzweigungswerthe $y = \eta$ von y' liefert, von z unabhängig ist.

Denn es sei

$$D(z, y) = f(y) \cdot D'(z, y), \tag{1}$$

wo $f(y)$ eine ganze rationale Function von y mit von z unabhängigen Coefficienten bedeutet, und der Art, dass

Digitized by Google

(2) $$f(y) = 0$$

allein die Verzweigungsstellen $y = \eta$ der algebraischen Function y' von y liefert, während

(3) $$D'(y, z) = 0$$

nur zu sich aufhebenden Verzweigungspunkten führt.

Da wenn $y = \eta$ eine Wurzel der Gleichung (2) ist, für welchen sich y' verzweigt $\zeta = \frac{d\eta}{dz} = 0$ ist, so verzweigt sich nach der Bedingung 2 in Nr. 5 y' nur für Wurzeln y der Gleichung

(4) $$\psi_m = 0 \text{ (s. Gleichung (F))}$$

und zwar, wenn für $y' = 0, y = \eta$ k Verzweigungen von je $\alpha_1, \alpha_2, .. \alpha_k$, Blättern stattfinden, so ist der Factor $y - \eta$ nach der Bedingung 3 in Nr. 5 mindestens

$$\alpha_1 - 1 + \alpha_2 - 1 + .. + \alpha_k - 1$$

mal in ψ_m enthalten.

Hieraus ergiebt sich, wenn mit w die Gesammtanzahl der einfachen Verzweigungen der die Function y' von y darstellenden Riemann'schen Fläche bezeichnet wird, dass w eine Zahl ist, welche den Grad von ψ_m nicht übersteigt, d. h. nach Bedingung 1 in Nr. 5

(5) $$w \leqq 2m.$$

Nach der Gleichung

(6) $$w - 2m = 2(p - 1)^1$$

folgt daher $p = 0$ oder $p = 1$.

Der einfachste Fall in diesem Beispiel ereignet sich, wenn die Coefficienten $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_m$ in Gleichung (F) selber von z unabhängig sind, in welchem Falle Gleichung (F) mit derjenigen Gleichung zusammenfällt, welche Briot und Bouquet[2] aufgestellt haben, und von welcher sie nachgewiesen haben, dass ihre Integrale eindeutige, und zwar entweder rationale oder einfach oder doppeltperiodische Functionen der Variabeln z sind; Resultate, die sich übrigens auch aus unseren obigen Deductionen unmittelbar ergeben.

---

[1] Vergl. Riemann, Abel'sche Functionen, Borchardt's Journal B. 54, Nr. 7.

[2] Journal de l'École Polytechnique cah. 36 p. 212 Théorème 22.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

Digitized by Google

Berichtigungen.

Zum Jahrgang 1883.

Seite 78 Zeile 11 von oben statt $\frac{\partial\xi}{\partial\Im}d\Im + \frac{\partial\eta}{\partial\Im}d\Im + \frac{\partial\zeta}{\partial\Im}d\Im$ lies $\frac{\partial\xi}{\partial\Im}d\xi + \frac{\partial\eta}{\partial\Im}d\eta + \frac{\partial\zeta}{\partial\Im}d\zeta$

" 78 " 12 " " " $\frac{\partial\xi}{\partial\phi}d\phi + \frac{\partial\eta}{\partial\phi}d\phi + \frac{\partial\zeta}{\partial\phi}d\phi$ " $\frac{\partial\xi}{\partial\phi}d\xi + \frac{\partial\eta}{\partial\phi}d\eta + \frac{\partial\zeta}{\partial\phi}d\zeta$

" 90 " 8 " unten " $\frac{\partial\left(\varrho_1 + \varrho_2 + (\varrho_1 - \varrho_2)e^{-2i\sigma}\right)}{\partial\Im}$ " $\frac{\partial\left(\varrho_1 + \varrho_2 + (\varrho_1 - \varrho_2)e^{-2i\sigma}\right)}{\partial\phi}$

" 333 " 10 " " " der Radien ϱ_1 und ϱ_2 lies von $\Im, \phi, \sigma$ mit $\pi - \Im, \pi + \phi, -\sigma$

" 337 " 5 " " " $\frac{i(H_1 + iT)}{L + iM}$ lies $\frac{i(H + iT)}{L + iM}$

" 340 " 9 " oben " $\frac{\partial(H - iT)}{\partial q}$ " $\frac{\partial(H_1 - iT)}{\partial q}$

Zum Jahrgang 1884.

Seite 6 Zeile 18 von oben ist zu lesen 12510 10700 6383 statt 12019 10221 5990

" 6 und 7 am Kopf der Tabelle I ist zu lesen $t \cdot 10^{10}$ statt $t \cdot 10^{6}$
ebendaselbst am Kopf der Spalten über 3 2 1 ist zu lesen: 12510 10700 6383
statt 12019 10221 5990

" 9 Zeile 4 von oben ist zu lesen $t \cdot 10^{10}$ statt $t \cdot 10^{6}$

" 11 und 12 am Kopf der Tabelle II ist zu lesen $t \cdot 10^{10}$ statt $t \cdot 10^{6}$

" 12 Zeile 12 von oben ist zu lesen Calciumchlorid statt Calciumsulfat

" 249 " 15 von unten sind die Worte »liegenden Brüche« zwischen den Worten
»Intervalles« und »ausdrückt« einzufügen.

Digitized by Google

Digitized by Google

32. Reden, gehalten bei der Aufnahme der HH. WALDEYER und FUCHS in die Akademie in der LEIBNIZ-Sitzung am 3. Juli 1884.

(Gedruckt im Bericht vom 3. Juli [St. XXXIII]; — ausgegeben am 10. Juli.)

Antrittsrede von WALDEYER.

Der Eintritt in den Kreis der Mitglieder der Königlichen Akademie der Wissenschaften, welcher mir alsbald nach der Übernahme meines Lehramtes an der hiesigen Hochschule gewährt wurde, weckt in mir vor allem die Gefühle aufrichtigen Dankes gegen Sie, meine hochverehrten Herren Collegen, welche Sie mich der Einreihung in diese Körperschaft für würdig erachteten, und gegen unsern erhabenen Schirmherrn, der Ihre für mich so ehrenvolle Wahl allergnädigst zu bestätigen geruhte.

Dann aber veranlasst mich der Platz, den ich unter Ihnen einzunehmen berufen bin, zu einem Rückblicke auf jene Männer, die vor mir auf demselben in der verdienstvollsten Weise gewirkt haben. Fast fünf Menschenalter sind verflossen, seit NATHANAEL LIEBERKÜHN und JOHANN FRIEDRICH MECKEL der Ältere an dieser Stelle thätig waren; ihnen folgen JOHANN GOTTLIEB WALTER, RUDOLPHI, JOHANNES MÜLLER, REICHERT.

Es verkörpert sich in diesen Männern gewissermaassen der Entwicklungsgang, den die Morphologie der Thiere und insbesondere die des Menschen in den letzten beiden Jahrhunderten genommen hat, ein Entwicklungsgang, den man als einen nothwendigen, in der Natur der Sache begründeten bezeichnen darf.

Es sei zunächst hier hervorgehoben, dass der »Anatomie« unter den von der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu pflegenden Fächern von vorn herein besonders gedacht wird, namentlich in dem von FRIEDRICH DEM GROSSEN am 24. Januar 1744 gegebenen Statut. Das derzeitige Mitglieder-Verzeichniss führt nicht weniger als drei Ärzte auf, die der Akademie anatomische Mittheilungen machen: BUDDEUS, ELLER (Director der physikalischen Classe) und LIEBERKÜHN, den Secre-

Digitized by Google

tar der Classe. Und unter den Namen der damaligen auswärtigen Mitglieder glänzen die eines Lorenz Heister, Abraham Vater und Benignus Winslow!

Buddeus und Eller sind die Ersten, welche den Schriften der Akademie anatomische Abhandlungen einverleibt haben (1727). Diese Abhandlungen sind jedoch vorwiegend pathologisch-anatomischen Inhaltes, entsprechend der Erfahrung, dass die Anatomie sich jeden Orts in ihren Anfängen an die praktische Heilkunst anlehnte. Fast alle Anatomen der damaligen Zeit sind ausübende Ärzte, wie es auch einer der bedeutendsten unter ihnen, ausser Nathanael Lieberkühn, war.

Lieberkühn starb in der Blüthe seiner Jahre; nur kurze Zeit gehörte er der Akademie an (1744 bis 1756). Das Wenige aber, was er, namentlich auch in Anbetracht seiner ausgebreiteten ärztlichen Thätigkeit, der Wissenschaft als Vermächtniss lassen konnte, sichert ihm einen hervorragenden Namen unter den Naturforschern aller Zeiten. Weit war er dem damaligen Stande der Dinge vorausgeeilt, sowohl in der entschiedenen physikalischen Auffassung der belebten Natur, die bei ihm überall durchblickt, als auch in einer ingeniösen Ausbildung der Untersuchungsmethoden. Seine Instrumente und namentlich seine Mikroskope verfertigte er selbst, und wusste sich ihrer mit dem grössten Geschick zu bedienen. Die feinere Injectionstechnik bildete er bis zu einer Höhe aus, die noch heute ein Meister wie Hyrtl, als eine kaum übertroffene anerkennt; er darf als der Erfinder der Corrosionstechnik bezeichnet werden und ist der Entdecker des Zusammenhanges der Chylusgefässe der resorbirenden Darmzotten mit den übrigen Chylusbahnen, wie auch der nach ihm benannten Darmdrüsen.

Jedoch das Feld der Forschung bleibt bei Lieberkühn auf den Menschen beschränkt, wie auch bei seinen nächsten Zeitgenossen und Nachfolgern: Joh. Fr. Meckel und Joh. Gottl. Walter, welche übrigens, der bisherigen Tradition treu bleibend, auch noch die pathologische Anatomie vertraten. Beide, insbesondere Meckel, von dem unsere Annalen eine stattliche Reihe von Schriften aufzuweisen haben, dürfen wir ebenfalls zu den hervorragenden Vertretern ihres Faches rechnen. Es genüge an die Anatomie des Nervus trigeminus und dessen Ganglia Meckelii majus und minus zu erinnern.

Indessen die Untersuchungsmethode, welche von Beiden geübt wurde, blieb wie das Forschungsfeld eine beschränkte, die bisherige: das altehrwürdige Verfahren der präparirenden Anatomie. Neue Gesichtspunkte, neue Ziele sollten erst gewonnen werden.

Diese waren aber, wie begreiflich von der menschlichen Anatomie allein aus nicht zu gewinnen. Hier mussten die inzwischen mächtig

Digitized by Google

geförderten anderen Naturwissenschaften, die Zoologie, Botanik, Chemie, Physik und die Physiologie, die Physik des Lebendigen, eintreten. Das, was ein LINNÉ und ein ALBRECHT VON HALLER, später GALVANI und LAVOISIER uns vererbten, brachte auch der morphologischen Wissenschaft neues Leben und weitere Ziele.

Bei dem Nachfolger WALTER's, KARL ASMUND RUDOLPHI, begegnen wir denn auch unter der Reihe der hiesigen Anatomen zuerst jenem Neuen. Es gibt sich kund in dem Eintritte histiologischer und vergleichend anatomischer Forschungen und Untersuchungsmethoden in den bis dahin engen Kreis der menschlichen Anatomie, sowie in einer grösseren Pflege der bis dahin dem Anatomen ebenfalls noch anvertrauten Physiologie. RUDOLPHI hinterliess uns ein in zwei Bänden erschienenes werthvolles Lehrbuch der Physiologie, worin er entschieden den Bahnen HALLER's folgt, im Gegensatze zu der inzwischen rasch emporgewachsenen, von SCHELLING inaugurirten naturphilosophischen Richtung.

Doch ist und bleibt RUDOLPHI vorwiegend Anatom; auch bei seinen physiologischen Untersuchungen geht er vorzugsweise auf anatomische und vergleichend anatomische Thatsachen zurück. Mit ausgezeichnetem Erfolge widmete sich RUDOLPHI allgemein anatomischen, zoologischen und vergleichend anatomischen Studien, von denen viele in den Schriften der Akademie niedergelegte Abhandlungen zeugen. So befindet sich im Jahrgange 1814—15 sein berühmter Aufsatz über die »Horngebilde«, worin er zuerst den Namen »Horngewebe« aufbrachte und die dahin gehörigen Bildungen von einem allgemein anatomischen Standpunkte aus zusammenfasste. Schliesslich sei, um hier nicht zu weit zu greifen, nur noch seiner fundamentalen Werke über die Entozoen gedacht, die ihn als bedeutenden Zoologen und vergleichenden Anatomen hinstellen. RUDOLPHI's umfassende Thätigkeit ist aber damit noch nicht erschöpft. Indem ich seine Abhandlungen aus dem Gebiete der menschlichen descriptiven Anatomie übergehe, muss noch angeführt werden, dass er auch der pathologischen Anatomie sorgsame Pflege widmete, und selbst der Ars veterinaria nicht fern blieb, wie sein 1804—5 hier erschienenes zweibändiges Werk: »Bemerkungen aus dem Gebiete der Naturgeschichte, Medicin und Thierheilkunde« erweist.

Wir sehen somit zu RUDOLPHI's Zeit, im Anfange dieses Jahrhunderts, aus der menschlichen Anatomie einen weitverzweigten Baum der Wissenschaft hervorgewachsen, der nicht nur in seinem Stamme sich stetig weiter entfaltet, sondern auch kräftige Seitenäste in der Histiologie, vergleichenden Anatomie und Physiologie getrieben hat, während er die alte Verbindung mit der pathologischen Anatomie

Digitized by Google

dauernd aufrecht erhält. In der Akademie sowohl, wie an der Universität werden jedoch alle diese Disciplinen nur durch Eine Persönlichkeit vertreten.

Zu mächtiger, stolzer, hochragender Gestalt entwickelt sich dieser Baum in des unsterblichen JOHANNES MÜLLER's Pflege, der Besten und Grössten Einer, welche je die Zierden unserer Körperschaft bildeten. Was die Wissenschaft, was die Akademie ihm verdankt, wie er überall da, wohin er mit starker Hand griff, frisches Wasser aus dem Felsen schlug, welch' werthvollen Inhalt die zwei starken Quartbände umfassen, die unter den gesammelten Abhandlungen der Mitglieder der Akademie in unsern Bibliotheksräumen das Auge auf sich ziehen: das auszuführen würde hier, an dieser Stätte, im Kreise so mancher Freunde und unmittelbarer Schüler des Verewigten wahrhaft »Eulen nach Athen tragen« heissen!

Mit JOHANNES MÜLLER's Tode vollzieht sich eine Wandlung. Zwei inzwischen hoch ausgebildete Disciplinen haben eigenen Boden gefunden: die Physiologie und die pathologische Anatomie erhalten in der Akademie sowohl, wie auch an der Hochschule ihre eigenen Vertreter; es vollzieht sich allmählich wieder die Rückkehr zu dem früheren enger umgrenzten Gebiete für den, welcher die menschliche Anatomie zur Aufgabe seiner Forschung zu machen hat.

Mein unmittelbarer Vorgänger, KARL BOGISLAUS REICHERT, vertrat neben der menschlichen Anatomie und Histiologie nur noch die vergleichende Anatomie und einen inzwischen neu aufgesprossten Zweig, die Entwicklungsgeschichte, dessen Pflanzung und erste Pflege in den Beginn der Thätigkeit JOH. MÜLLER's fällt. REICHERT's akademisches Wirken war wesentlich diesem zur Zeit besonders frisch grünenden Zweige unserer grossen Gesammtdisciplin, an dessen Förderung er hervorragenden Antheil hatte nehmen können, gewidmet.

Mir ist an unserer Hochschule neben der menschlichen Anatomie noch diese Disciplin und die Histiologie geblieben; beides kann vom alten Stamme der Anatomie wol kaum abgelöst werden. Die vergleichende Anatomie hingegen hat sich in die Obhut der Zoologie begeben, eine Wandlung, welche sich naturgemäss vollziehen musste und in Kurzem wol überall sich vollziehen wird, wenn auch noch an manchen Hochschulen und Akademien die menschlichen Anatomen zugleich die berufenen Vertreter der comparativen Anatomie sind.

Ein jüngster Sprössling der altehrwürdigen Anatomie, die Anthropologie, ist, kaum geboren, in unserer so rasch voraneilenden Zeit so schnell herangewachsen, dass die Mutter-Wissenschaft kaum Zeit gefunden hat, sich eingehend darum zu kümmern.

Wer vermöchte zu sagen, wie lange noch die Entwicklungs-

Digitized by Google

geschichte und die Histiologie der menschlichen Anatomie ausschliesslich werden erhalten bleiben? Jedenfalls bedarf ihrer der Zoologe und der Physiologe ebenso, wie der Anatom, und fehlt es auch nicht an Stimmen, welche diesen Disciplinen eigene Vertreter geben möchten.

Wird denn nun die menschliche Anatomie wieder auf den Standpunkt zurückgedrängt werden, den sie vor hundert Jahren und darüber einnahm? Sicherlich nicht, so lange wir eine wissenschaftliche Medicin, so lange wir Akademien haben, in denen ein so gesundes wissenschaftliches Leben pulsirt, wie in der hiesigen. Die Colonien haben sich vom Mutterlande getrennt, sie sind selbstständig geworden, zum Theil sogar mächtiger; doch die innige freundschaftliche Verbindung ist geblieben. Willig bieten sie der dürstenden Mutter von ihren Früchten — können sie doch auch dieser nicht entrathen. Ich thue getrost den Ausspruch, dass, ebensowenig wie die Physiologie und pathologische Anatomie, so auch die vergleichende Anatomie, Anthropologie, Entwicklungsgeschichte und Histiologie ihre höchsten Ziele werden verfolgen können ohne die Mithülfe und die immer mehr zu vervollkommnende Ausbildung der reinen menschlichen Anatomie, deren Forschungsgebiet das höchst entwickelte Naturobject bildet.

Ebenso bekenne ich aber auch, dass mir ein Vertreter der menschlichen Anatomie ohne gründliche Vertrautheit mit der vergleichenden Anatomie, der Entwicklungsgeschichte und Histiologie für unsere Zeit unmöglich erscheint, will er anders seine Wissenschaft fördern. Und von Rechts wegen sollen ihm auch die Anthropologie, die Physiologie und die pathologische Anatomie nicht fremd geblieben sein.

Indem ich hier das Erbe so bedeutender Männer antrete und mich in einen Kreis so hervorragender Forscher aufgenommen sehe, fühle ich sehr wohl den Abstand der zwischen ihnen uud mir besteht. Doch glaube ich wenigstens die Bahn klar mir vorgezeichnet zu erkennen, auf der ich zu schreiten habe uud fühle mich ermuthigt durch die nachsichtige und freundliche Unterstützung, deren ich mich von Ihrer Seite versichert halten darf. Gibt mir meine Stelle an der Hochschule das engere auf den Menschen gerichtete Ziel der morphologischen Forschung und Lehre zur Hauptaufgabe, so gewährt mir die Akademie leicht die innige Verbindung mit den Schwester-Disciplinen und gestattet die freiere Entfaltung, die immer wieder auch der Specialforschung zu Gute kommen muss.

Digitized by Google

Antwort von E. du Bois-Reymond.

Der Anthropotomie, Hr. Waldeyer, welche Sie in erster Linie zu vertreten berufen sind, wird neben ihrer praktischen Unentbehrlichkeit stets die Bedeutung zukommen, als der älteste Zweig der Biologie die natürliche Grundlage für jede weitere Entwickelung der Wissenschaft zu bleiben. Man braucht nur zu bedenken, dass wir die Abschnitte des Leibes und der Gliedmaassen bei Insecten nach dem Paradigma des menschlichen Rumpfes und Beines benennen, mit welchen sie nichts gemein haben, um sich der Herrschaft bewusst zu werden, welche die der Anthropotomie entlehnten Kategorien über uns üben. Man kann, glaube ich, der Anthropotomie in der beschreibenden Naturwissenschaft eine ähnliche Würde beilegen, wie in der Sprachwissenschaft den klassischen Sprachen. Wie ohne Griechisch und Latein kein Germanist oder Orientalist, so kein Zoolog, kein Palaeontolog, kaum ein Botaniker ohne Anthropotomie.

Aber wie fertig auch diese altehrwürdige Disciplin erscheine, selbst makroskopisch ist sie weit davon entfernt erschöpft zu sein. Nicht nur ermöglichen neue Untersuchungsmethoden noch immer neue Wahrnehmungen, wie, durch den nordischen Winter begünstigt, Pirogoff in der Herstellung von Querschnitten gefrorener Leichen ein Mittel fand, die topographische Anatomie in ungeahnter Weise zu vervollkommnen. Nicht nur tauchen schwierigere Verhältnisse höchster Wichtigkeit, wie der Faserverlauf im Gehirn, erst jetzt aus dem Nebel unbestimmter Vorstellungen auf. Sondern bei der wunderbaren inneren Zweckmässigkeit des Organismus lässt sich auch behaupten, dass, wo immer man an der Hand leitender physiologischer Gedanken noch so altbekannte anatomische Bildungen neu betrachtet, die schönsten Entdeckungen gelingen können. Ist es nöthig, an die erst vor wenig Jahrzehnden fast neugeschaffene Lehre von den Gelenken und von der Bespannung des Skelets mit seinen Muskeln zu erinnern; an Hrn.

Digitized by Google

von Helmholtz' neue Beschreibung der Gehörknöchelchen; an die in der schwammigen Substanz der Knochen neuerlich erkannte, mit der der Bienenzellen wetteifernde scheinbare Teleologie? So richtig es ist, dass der Anatom zunächst die Form beschreiben soll, ohne sich um deren etwaige Bedeutung zu kümmern, so sicher ist andererseits die physiologische Anatomie die Anatomie der Zukunft.

Die zweite der Ihnen zuertheilten Disciplinen, die mikroskopische Anatomie, wird schwerlich noch einen ähnlichen Fortschritt erleben, wie den, welchen sie gegen Ende der dreissiger Jahre durch Auffindung der Zelle sah. Selbst wenn die Leibnizische Speculation von einer unendlichen Einschachtelung belebter Theilchen in belebte Theilchen richtig wäre, und der Zellenleib wieder aus Elementarorganismen höherer Ordnung bestände, dürften wir kaum hoffen, diese höheren Elemente je mit leiblichem Auge zu sehen: nach Hrn. vom Helmholtz und Hrn. Abbe sind den Leistungen unserer Mikroskope noch weit engere Grenzen gesteckt, als die einst von Frauenhofer aus der Länge der Aetherwellen hergeleiteten. Allein die jetzt schon erlangte Vollkommenheit der optischen Hülfsmittel, verbunden mit der Methode der mikrotomischen Schnittserien, und mit der kunstreichen Färbung der verschiedenen Gewebsbestandtheile, einen an Fruchtbarkeit fast der Injection vergleichbaren Mittel der Forschung, eröffnet ein noch unabsehbares Feld von Entdeckungen, auf welchem im Grunde erst die ersten Schritte geschahen.

Durch den Sieg der Abstammungslehre hat die dritte Disciplin, auf welche Ihre rüstige Thätigkeit sich erstreckt, die von Ihnen so erfolgreich angebaute Entwickelungsgeschichte, noch an eingreifender Wichtigkeit gewonnen im Vergleich zu der Zeit, wo sie nur über das Werden des Einzelwesens Aufschlüsse versprach. Die alte Meckel'sche Anschauung, dass das sich entwickelnde Einzelwesen die Stufen der aufsteigenden Thierreihe durchlaufe, leuchtet vor im Dunkel der Stammesgeschichte. Hätte Goethe die Entwickelungsgeschichte gekannt, von ihr, nicht von der vergleichenden Anatomie hätte er ausgesagt, sie eröffne uns die Tiefen der bildenden Natur mehr, als jede andere Bemühung und Betrachtung.

Histiologie und Entwickelungsgeschichte sind durch die Zellenlehre miteinander und mit der pathologischen Anatomie, die Entwickelungsgeschichte ist mit der vergleichenden Anatomie, der Palaeontologie, der Phylogenie so eng verknüpft, dass sich nirgend Grenzen ziehen lassen, dass alle diese alten Eintheilungen zwar im Universitätsunterricht aus Zweckmässigkeitsgründen zu gelten fortfahren, für die akademische Forschung aber, wie die mittelalterlichen Zünfte zu Einer Industrie, zu Einem mächtigen Strome verschmelzen.

Digitized by Google

In allen jenen Disciplinen ein Meister, aller jener Methoden vollauf mächtig, ist die Akademie glücklich in Ihnen, Hr. WALDEYER, den würdigen Fortsetzer der Reihe berühmter Anatomen zu begrüssen, deren bedeutende Gestalten Sie in Ihrer Rede an uns vorüberführten. Ihr unmittelbarer Vorgänger, unser verstorbener College REICHERT, hat den jetzt von Ihnen eingenommenen akademischen Sessel nebst dem entsprechenden Lehramt, merkwürdigerweise gerade wie JOHANNES MÜLLER, ein Vierteljahrhundert innegehabt. Wenn die Akademie nicht ohne ernste Empfindung eine so langjährig vertraute Persönlichkeit aus ihrem Kreise schwinden sehen kann, so blickt sie mit um so gespannterer Erwartung dem neuen Schwung entgegen, den Ihre volle Manneskraft nunmehr in ihrem Schoose wie an der Universität den anatomischen Wissenschaften ertheilen wird. In diesem Sinne, Hr. WALDEYER, heisse ich Sie, Ihnen und uns glückwünschend, in unserer Mitte herzlich willkommen.

Digitized by Google

Antrittsrede von Fuchs.

Der heutige Tag, an welchem ich zum ersten Male als ordentliches Mitglied an einer öffentlichen Sitzung der Königlichen Akademie der Wissenschaften Theil nehme, giebt mir die willkommene Gelegenheit, der Akademie für die hohe Auszeichnung zu danken, welche mir durch die Aufnahme in diesen Kreis der hervorragendsten Vertreter aller Zweige wissenschaftlicher Forschung zu Theil geworden. Ich schätze mich glücklich, in Vereinigung mit Männern, welche ich schon seit meinen ersten Schritten in den mathematischen Wissenschaften als Vorbilder und zum Theil als unmittelbare Lehrer verehrte, mich den Aufgaben dieser Akademie widmen zu können. Möge es mir vergönnt sein, durch die That das Vertrauen, welches die Akademie in mich gesetzt, zu rechtfertigen, insbesondere dadurch, dass ich auf den Wegen, welche ich eingeschlagen, Einiges für die Wissenschaft Erspriessliches erziele.

Meine ersten selbstständigen mathematischen Versuche bewegten sich auf den Gebieten der Zahlentheorie und desjenigen Theiles der Geometrie, welcher mit der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zusammenhängt. Der grossen Mannigfaltigkeit ihrer Methoden verdankt die Zahlentheorie die Eigenthümlichkeit, jedem der sich ihr widmet ein schätzenswerthes Geschenk mit auf den Weg geben zu können, auch wenn dieser Weg scheinbar weitab von den eigentlichen Zielen dieser Wissenschaft führt. So fand auch ich mich durch die Beschäftigung mit derselben gefördert, als ich durch die genannten geometrischen Studien zur Analysis übergeführt worden war, wo ich bald insbesondere der Theorie der Differentialgleichungen und der sich daraus ergebenden Functionen mein Interesse zuwandte.

In älteren auf Differentialgleichungen bezüglichen Forschungen betrachtete man zumeist die Integration solcher Gleichungen als vollendet, wenn es gelungen war, sie so umzugestalten, dass man auf dieselben sogenannte Quadraturen ausüben konnte. Wenn nun auch

Digitized by Google

nicht geläugnet werden soll, dass die dahin zielenden Untersuchungen zu vielen bedeutsamen Resultaten geführt haben, so darf man jedoch nicht übersehen, dass einerseits die Zurückführung auf Quadraturen nur in den seltensten Fällen möglich ist, und dass diese andererseits in den Fällen, wo sie gelingt, über die Natur der Integrale der Differentialgleichungen nicht genügenden Aufschluss giebt. Die letztere Behauptung wird schon durch das einfache Beispiel der Differentialgleichungen, welchen die elliptischen Functionen genügen, bekräftigt, da hier die Quadratur unmittelbar gegeben, und doch erst die grosse von Abel und Jacobi ausgebildete Theorie der elliptischen Functionen erforderlich ist, um die Eigenschaften der Functionen zu ergründen, welche jene Differentialgleichungen befriedigen. — Wir fassen vielmehr die Aufgabe der Integration der Differentialgleichungen dahin auf, die Natur der Functionen zu kennzeichnen, welche denselben als Integrale genügen.

Tritt man nun an diese Aufgabe heran, so erkennt man sofort, dass hier, wie oft in der Wissenschaft, ein Erfolg nur durch Beschränkung zu erzielen möglich ist. Denn der weiteren Verfolgung der Eigenschaften, welche den Integralen aller Differentialgleichungen zukommen, wird bald dadurch eine Grenze gesetzt, dass es solcher Eigenschaften nur wenige giebt. In Wahrheit sind es eben die Singularitäten, die einer einzelnen Gleichung zukommen, welche die wesentliche Natur neuer Functionsclassen begründen. Es ist vielmehr die zunächst zu verfolgende Aufgabe, die Differentialgleichungen nach gemeinschaftlichen Merkmalen ihrer Integrale in Classen zu gruppiren und jede einzelne Classe einem gesonderten Studium zu unterziehen. — Bei der Aufsuchung gemeinsamer Merkmale, wonach eine solche Classe zu bilden ist, muss man natürlich bekannte Functionenkreise zu Hülfe rufen. So ist es eine Eigenthümlichkeit einer algebraischen Function, dass alle Wege der unabhängigen Variabeln für dieselbe nur eine beschränkte Anzahl von Werthen hervorbringen. Eine Classe von Differentialgleichungen wird den algebraischen Gleichungen zwischen zwei Variabeln am nächsten stehen, wenn die durch alle Wege der unabhängigen Variabeln erzielten Integralwerthe durch eine beschränkte Anzahl von Elementen am einfachsten ausdrückbar sind. Diese Classe ist die der linearen Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten, deren Integration im oben bezeichneten Sinne von mir unternommen wurde. Nachdem ich die Grundlagen der Theorie dieser Differentialgleichungen entwickelt, zeigte sich alsbald, dass dieselbe nicht nur auf bereits erforschte Gebiete der Analysis neues Licht werfe, sondern dass dieselbe auch zu neuen Problemen und Zielen hinzuführen geeignet sei. In der That hatte ich die Genugthuung, dass sich

Digitized by Google

seit dem Erscheinen meiner ersten auf lineare Differentialgleichungen bezüglichen Abhandlungen eine grosse Anzahl von Mathematikern mit mir in dem Streben vereinigten, theils die Theorie der linearen Differentialgleichungen selbst fortzubilden, theils die mannigfachen durch diese Theorie hervorgerufenen functionentheoretischen Fragen zu erforschen.

Ein tieferes Eingehen auf die Natur der Functionen, welche den eben bezeichneten Differentialgleichungen genügen, veranlasste mich auch eine Classe von Functionen mehrerer Variabeln einzuführen, wovon die ABEL'schen Functionen einen besonderen Fall bilden. Hier handelte es sich zunächst um die Frage, welcher Art diejenigen Functionen sind, welche in dem JACOBI'schen Umkehrungssatze die Stelle der algebraischen Functionen einnehmen dürfen, wenn die Umkehrbarkeit erhalten werden solle. Nachdem mir die Lösung dieser Frage und die Auffindung einer Eigenschaft der ersteren Functionen gelungen, welche für die neue Functionengattung eine ähnliche Grundlage bildet, wie das ABEL'sche Theorem für die algebraischen Functionen, bleibt nun vor Allem noch das Problem zu lösen, die eingeführten Functionen mehrerer Variabeln analytisch darzustellen, für diese Functionen also dasselbe anzustreben, was für die ABEL'schen Functionen von Hrn. WEIERSTRASS und von RIEMANN geleistet worden ist. — Zu einem weiteren Forschen werde ich auch auf diesem Gebiete durch den glücklichen Umstand ermuthigt, dass meine Untersuchungen zu fruchtbaren Arbeiten anderer Mathematiker Anlass gegeben. So ist, angeregt durch das Studium meiner ersten Arbeiten auf diesem Gebiete, und ausgehend von der durch Umkehrung des Quotienten zweier Integrale einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung entstehenden Function, welche ich in diesen Arbeiten im allgemeinen Sinne einführte, nachdem ich besondere Fälle derselben in meinen Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen schon früher behandelt hatte, Hr. POINCARÉ dahin gelangt, die Integrale der linearen Differentialgleichungen auf ähnliche Weise darzustellen, wie man die Integrale algebraischer Functionen mit Hülfe der ABEL'schen Functionen ausdrückt.

Digitized by Google

Antwort von Auwers.

Als wir zu Anfang dieses Jahres Kenntniss davon erhielten, dass Sie, Hr. Fuchs, bereit seien, einen lieb gewordenen und fruchtbaren Wirkungskreis mit dem grössern Arbeitsfelde zu vertauschen, für dessen verstärkte Arbeitskräfte erfordernde Pflege unsere Universität Ihre bewährte Mitwirkung zu gewinnen wünschte, haben wir uns beeilt die Verbindung noch enger zu ziehen, in welche Sie bereits vor einigen Jahren zu der Akademie getreten sind, in der Überzeugung, dass die Continuität in einer würdigen und erfolgreichen Vertretung der Mathematik, deren die Akademie seit langer Zeit sich rühmen darf, nicht besser gesichert werden könnte als durch den Gewinn eines Forschers, der schon in verhältnissmässig früher Zeit dem mathematischen Königreich eine neue Provinz hinzugefügt und in der erfolgreichen Durchforschung und fruchtbringenden Aufschliessung derselben eine Lebensaufgabe gefunden hat, die schon reichen Gewinn der Wissenschaft zugeführt hat und noch reichern derselben verheisst.

So hat es uns dann zu aufrichtiger Freude gereicht, Sie mit der Übernahme des hiesigen wichtigen Lehramts sogleich auch als Mitglied in unseren Kreis eintreten zu sehen, in dessen Namen ich Sie heute feierlich begrüsse und herzlich willkommen heisse.

Zwei Jahrzehnte sind jetzt beinahe verflossen, seitdem Sie die allgemeine Aufmerksamkeit der Mathematiker auf Sich lenkten durch Ihre grundlegende Arbeit »Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen, deren Coefficienten rationale Functionen einer Veränderlichen sind«. Bei der Ausführung dieser Arbeit brachten Sie zum ersten Male die Gesichtspunkte zur Geltung und dasjenige Princip zur Durchführung, welches Sie in den soeben vorgetragenen Darlegungen als die erste Bedingung eines wirklichen erheblichen Fortschrittes auf dem Gebiete der Theorie der Differentialgleichungen hinstellen. Wie sehr Ihre Anschauung in der Natur der Aufgabe begründet war, und wie richtig Sie den praktischen Weg zu deren Befolgung gefunden und weiter gewiesen haben, zeigen nicht allein die weiteren Erfolge, welche Sie seitdem auf diesem Wege erlangt haben, sondern zeigt vor Allem auch der Eifer, mit dem in der Erkenntniss, dass ein

Digitized by Google

neues fruchtbares Gebiet der Analysis erschlossen sei, eine nicht geringe Zahl anderer Mathematiker Ihnen auf demselben gefolgt ist, und mit Ihnen gewetteifert hat, die neue Theorie in schneller Folge mit vielen wichtigen und schönen Ergebnissen zu bereichern.

Den methodischen Weg, auf welchem die specielle Durcharbeitung des grossen durch Ihre Theorie im Ganzen zugänglich gewordenen Stoffes mit Aussicht auf Erfolg vorgenommen werden kann, haben Sie in den eben gehörten Darlegungen gleichfalls kurz bezeichnet. Sie Selbst haben Ihre Forschung seit der Vollendung der grundlegenden Arbeit auf diejenigen Specialaufgaben concentrirt, auf welche dieser Weg hinführt, eine andauernde Einschränkung in Bezug auf die Objecte Ihrer mathematischen Arbeit, deren wir uns nur freuen dürfen, weil es Ihnen jedesmal gelungen ist, indem Sie die Frage scharf und richtig zu stellen verstanden, auch ein gesichertes neues Resultat für die Wissenschaft zu gewinnen, und weil der Zuwachs an neuer und wichtiger Erkenntniss, welchen dieselbe aus diesem Gebiet noch zu ziehen hoffen darf, noch unübersehbar ausgedehnt erscheint. Die Verallgemeinerung des JACOBI'schen Umkehrungsproblems, welche Ihnen unlängst geglückt ist, hat Sie aber sogar wiederum an die Grenze eines neuen und selbst verheissungsvollen Gebiets der Analysis geführt. Möge es Ihnen gegönnt sein, und mögen wir Zeugen dessen sein, dass Sie selbst diese Grenze überschreiten, und, indem Sie die unbekannten Functionen wirklich darstellen, deren Existenz Sie durch jene Verallgemeinerung nachgewiesen haben, den Besitzstand der Wissenschaft nochmals ansehnlich erweitern — jedenfalls bleibt Ihnen anlässlich jener schönen Entdeckung das seltenere und vielleicht noch höhere Verdienst, der Forschung Ihrer Zeitgenossen und Nachfolger neue Ziele gezeigt zu haben.

Digitized by Google

Digitized by Google

33. Berichte über die Preisaufgaben der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

(Erstattet in der öffentlichen Sitzung vom 3. Juli; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXXIII]; — ausgegeben am 10. Juli.)

1) Preis der Steiner'schen Stiftung.

In der öffentlichen Sitzung am Leibniz-Tage des Jahres 1882 hat die Akademie den Bestimmungen der Steiner'schen Stiftung gemäss die folgende Preisfrage gestellt:

»Die bis jetzt zur Begründung einer rein geometrischen Theorie der Curven und Flächen höherer Ordnung gemachten Versuche sind hauptsächlich deswegen wenig befriedigend, weil man sich dabei — ausdrücklich oder stillschweigend — auf Sätze gestützt hat, welche der analytischen Geometrie entlehnt sind und grösstentheils allgemeine Gültigkeit nur bei Annahme imaginärer Elemente geometrischer Gebilde besitzen. Diesem Übelstande abzuhelfen, gibt es, wie es scheint, nur ein Mittel: es muss der Begriff der einem geometrischen Gebilde angehörigen Elemente dergestalt erweitert werden, dass an die Stelle der im Sinne der analytischen Geometrie einem Gebilde associirten imaginären Punkte, Geraden, Ebenen wirklich existirende Elemente treten, und dass dann die gedachten Sätze, insbesondere die auf die Anzahl der gemeinschaftlichen Elemente mehrerer Gebilde sich beziehenden, unbedingte Geltung gewinnen und geometrisch bewiesen werden können.

Für die Curven und Flächen zweiter Ordnung hat diess von Staudt in seinen »Beiträgen zur Geometrie der Lage« mit vollständigem Erfolge ausgeführt. Die Akademie wünscht, dass in ähnlicher Weise auch das im Vorstehenden ausgesprochene allgemeine Problem in Angriff genommen werde, und fordert die Geometer auf, Arbeiten, welche dieses Problem zum Gegenstande haben und zur Erledigung desselben Beiträge von wesentlicher Bedeutung bringen, zur Bewerbung um den im Jahre 1884 zu ertheilenden Steiner'schen Preis einzureichen.

Digitized by Google

Selbstverständlich muss in diesen Arbeiten die Untersuchung rein geometrisch durchgeführt werden; es ist jedoch nicht nur zulässig, sondern wird auch ausdrücklich gewünscht, dass die erhaltenen Resultate auf analytisch-geometrischem Wege erläutert und bestätigt werden.«

Es ist eine Bewerbungsschrift rechtzeitig (am 27. Februar d. J.) eingegangen, welche das Motto trägt:

»Immer strebe zum Ganzen, und kannst Du selber kein Ganzes
Werden, als dienendes Glied schliess' an ein Ganzes Dich an.«

Die Arbeit hat einen bedeutenden Umfang, soll jedoch, wie in der Vorrede ausdrücklich bemerkt wird, die Lösung des von der Akademie gestellten allgemeinen Problems nur anbahnen, indem sie hauptsächlich bestimmt ist, zu zeigen, wie auf die in der genannten STAUDT'schen Schrift für die Lehre von den imaginären Elementen geometrischer Gebilde entwickelten Principien eine rein geometrische, den von der Akademie gestellten Forderungen entsprechende Theorie der ebenen algebraischen Curven gegründet werden könne. Der Verfasser scheint aber schon früher, als er vielleicht von der Preisfrage noch keine Kenntniss hatte, mit Untersuchungen beschäftigt gewesen zu sein, die auf eine Weiterentwickelung der STAUDT'schen Theorie hinzielten, und deren Ergebnisse er dann, als er an die Ausarbeitung der vorliegenden Abhandlung gieng, in dieselbe aufnehmen zu müssen geglaubt hat. Dadurch würde es sich erklären, dass ein grosser Theil des in sechs Abschnitte vertheilten Inhalts der Schrift dem eigentlichen Gegenstande der Preisfrage ziemlich fern liegt, was namentlich von dem zweiten Abschnitte gilt, der auf fast hundert Quartseiten Auseinandersetzungen über quaternäre Zahlen, Quaternionen, Symmetral-Gleichungen u. dgl. enthält, welche für die Erledigung der bei der Theorie der algebraischen Curven hauptsächlich in Betracht kommenden Fragen ganz überflüssig sind. Nothwendigerweise hat aber diese Untereinandermengung heterogener Stoffe der Arbeit sehr geschadet und die Lectüre und Beurtheilung derselben ausserordentlich schwierig gemacht, indem es unmöglich ist, in ihr einen einheitlichen und consequent durchgeführten, die einzelnen Theile mit einander und dem Hauptthema verbindenden Gedankengang zu erkennen. Der Verfasser würde wohlgethan haben, wenn er nach Vorausschickung einer übersichtlichen Darstellung der STAUDT'schen Theorie (Abschn. I) seine Untersuchung auf die (in Abschn. III und IV gegebene) Auseinandersetzung, wie eine Curve n-ter Ordnung mittels projectivisch auf einander bezogenen Curvenbüschel $(n-\nu)$-ter und ν-ter Ordnung erzeugt werden kann, und auf die Frage nach der Anzahl der gemeinschaftlichen Punkte zweier Curven beschränkt, diesen Theil seiner Arbeit aber, der kaum ein Drittel des Ganzen beträgt, so vollkommen

Digitized by Google

wie möglich auszuführen sich bemüht hätte. Wäre ihm diess gelungen, so würde die Akademie keinen Anstand genommen haben, die Arbeit zu krönen. Aber wenn sie auch gern anerkennt, dass der Verfasser die wesentlichen Aufgaben der höheren synthetischen Geometrie richtig erkannt und zur Lösung derselben einen sehr beachtenswerthen Versuch gemacht hat, so muss sie doch aussprechen, dass seine geometrischen Betrachtungen und Deductionen, was Einfachheit, Klarheit und Strenge angeht, den Methoden der analytischen Geometrie noch allzusehr nachstehen. Der Verfasser würde ohne Zweifel diess selbst eingesehen haben, wenn er dem ausgesprochenen Wunsche der Akademie, dass die Bearbeiter der Preisfrage die erhaltenen Resultate auf analytisch-geometrischem Wege erläutern und bestätigen möchten, hätte entsprechen wollen.

Hiernach kann die Akademie die eingereichte Bewerbungsschrift nicht für preiswürdig erklären, ist aber durch dieselbe doch in der Ansicht bestärkt worden, dass die von ihr gestellte Aufgabe bei dem gegenwärtigen Stande der geometrischen Forschung mit Aussicht auf Erfolg in Angriff genommen werden könne.

Die Akademie hat daher beschlossen, die vor zwei Jahren gestellte STEINER'sche Preisfrage in der oben reproducirten Fassung zu erneuern, mit der Modification jedoch, dass der am Schlusse ausgesprochene Wunsch nunmehr als Forderung hingestellt wird.

Die ausschliessende Frist für die Einlieferung der Bewerbungsschriften, welche in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache verfasst sein können, ist der 1. März 1886. Die Bewerbungsschrift ist mit einem Motto zu versehen und dieses auf dem Äussern des versiegelten Zettels, welcher den Namen des Verfassers enthält, zu wiederholen.

Die Ertheilung des Preises von 1800 Mark erfolgt in der öffentlichen Sitzung am LEIBNIZ-Tage des Jahres 1886.

Die Akademie hat ferner den Statuten der STEINER'schen Stiftung gemäss den in diesem Jahre zu ertheilenden Preis Hrn. W. FIEDLER, Professor am Polytechnikum zu Zürich, für seine verdienstvollen geometrischen Arbeiten zuerkannt.

Digitized by Google

2) *Preis aus dem Cothenius'schen Legat.*

Das Verhältniss der grünen Theile der Pflanzen zur Atmosphaere ist seit einem Jahrhundert fortgesetzt der Gegenstand eifriger Untersuchung gewesen. Man weiss, dass die kohlenstoffhaltigen Körper, welche den Leib der Organismen, der Pflanzen und Thiere, aufbauen, von jenen Körpern herstammen, die bei der Zerlegung der Kohlensäure unter Assimilation ihres Kohlenstoffes im Pflanzengewebe entstehen.

Unsere Kenntniss der organischen Bildungsvorgänge in der Pflanze weist hier aber noch eine Lücke auf. Wir kennen den Körper nicht, welcher bei der Fixirung des Kohlenstoffes im Lichte als das erste und unmittelbare Assimilationsproduct des Kohlenstoffes in den Pflanzen auftritt. Die mikroskopische und chemische Untersuchung der assimilirenden Pflanzengewebe hat zwar an den Orten, wo die Assimilation stattfindet, schon eine Anzahl gut gekannter Körper aufgefunden, Fette, Zucker, Stärke u. s. w., die hier nachweislich in Folge der Assimilation des Kohlenstoffes entstehen und sich anhäufen, allein es ist noch unentschieden, ob unter ihnen schon das erste Assimilationsproduct sich vorfindet und ob sie nicht alle nur spätere Umwandlungsproducte desselben darstellen, die im Stoffwechsel der Zelle aus dem ursprünglichen Erzeugniss der Assimilation hervorgehen. Für keinen derselben kann die Frage als erledigt betrachtet werden.

Ferner ist auch die Frage noch nicht entschieden, ob im photochemischen Zerlegungsacte der Kohlensäure bei verschiedenen Pflanzen nicht etwa verschiedene primäre Assimilationsproducte entstehen, oder ob, wie man jetzt annimmt, unter allen Umständen und in allen Pflanzen dasselbe gebildet wird.

Diese noch bestehende Unsicherheit in dem fundamentalen Vorgange der Pflanzenernährung, welcher zur Organisation des Kohlenstoffes und zur Bildung der organischen Materie führt, verlangt eine tiefere Zergliederung des Assimilationsvorganges der Pflanzen im Licht, als sie bisher erreicht ist. Doch erscheint der Gegenstand durch die vorhergegangene Forschung in den letzten Jahren schon hinreichend geklärt und vorbereitet, um bei methodischer Inangriffnahme eine Lösung der wichtigen Aufgaben, die sich hier der empirischen Untersuchung bieten, zu versprechen, oder mindestens eine wesentliche Förderung derselben in Aussicht zu stellen.

Die Akademie wünscht daher in dieser Richtung neue selbstständige Forschungen anzuregen und stellt die Preis-Aufgabe:

> Durch geeignete experimentelle und chemische Untersuchungen über den Assimilationsvorgang der Pflanzen im Lichte und durch directen histologischen Nachweis in den Pflanzengeweben

Digitized by Google

das primäre Assimilationsproduct des Kohlenstoffes in den Pflanzen aufzusuchen, dasselbe von seinen nächsten Umbildungsproducten im Stoffwechsel der Zelle zu unterscheiden und seine chemische Natur nachzuweisen.

Als Annäherung an die Lösung der Aufgabe wird es gelten, wenn die gegenwärtigen Vorstellungen über den Assimilationsvorgang der Pflanzen und das primäre organische Erzeugniss desselben durch Nachprüfung des bisher auf diesem Gebiete Geleisteten in exact durchgeführten Beobachtungs- und Untersuchungs-Reihen eine wesentliche und entschiedene Erweiterung oder Einschränkung finden, sollten.

Die ausschliessende Frist für die Einlieferung der Bewerbungsschriften, welche in deutscher, lateinischer, französischer, englischer oder italiänischer Sprache verfasst sein können, ist der 1. Januar 1887. Die Bewerbungsschrift ist mit einem Motto zu versehen und dieses auf dem Äussern des versiegelten Zettels, welcher den Namen des Verfassers enthält, zu wiederholen. Die Verkündigung des Urtheils und event. Ertheilung des Preises von 2000 Mark erfolgt in der öffentlichen Sitzung am Leibniz-Tage des Jahres 1887.

Digitized by Google

Digitized by Google

34. Studien zur Statik monocyklischer Systeme.

Von H. von Helmholtz.

Zweite Fortsetzung der Mittheilung vom 6. März d. J.

(Vorgetragen am 10. Juli; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXXIV]; — ausgegeben am 17. Juli.)

Kritisches.

In Bezug auf die kritischen Bemerkungen, welche Hr. R. Clausius der Königlichen Akademie unter dem 19. Juni d. J. mitgetheilt, freue ich mich, zunächst constatiren zu können, dass, soweit ich sehe, nicht die geringste Differenz zwischen mir und meinem Kritiker betreffs der Richtigkeit der von mir aufgestellten Sätze besteht, wenn man in dieselben nichts hineinträgt, als was ich durch dieselben auszusagen beabsichtigte, und wie ich meine, auch wirklich ausgesagt habe. Dass Hr. Clausius eine solche Differenz zu entdecken glaubte, kann ich mir nur durch die Verschiedenheit des Sinnes erklären, in dem der terminus: »stationäre Bewegung« von ihm selbst und von andern mathematischen Physikern gebraucht wird.

In der an die Spitze meines ersten Aufsatzes gestellten Worterklärung des von mir gewählten Namens der monocyklischen Systeme habe ich den genannten Ausdruck in dem Sinne gebraucht, wie es früher allein üblich war, wo man in der mathematischen Physik als stationär nur eine Bewegung bezeichnete, bei welcher an demselben Orte dauernd dieselbe Geschwindigkeit gleichartiger bewegter Theile sich findet. In diesem Sinne stationär ist die Bewegung eines rotirenden Kreisels oder der Strom reibungsloser Flüssigkeit in einem ringförmigen Canale. Hr. Clausius hat diesen zur bestimmten Bezeichnung eines wichtigen und sehr nothwendigen Begriffs viel gebrauchten Namen angefangen in einer erweiterten Bedeutung zu gebrauchen, statt einen neuen zu wählen, was im Interesse strenger wissenschaftlicher Sprache vorzuziehen gewesen wäre. Er nennt Bewegungen stationär, bei welchen der Mittelwerth der Geschwindigkeiten, Amplituden u. s. w. genommen für längere Zeiten constant bleibt. Also alle regelmässig periodischen Bewegungen, alle solche, die man als Superpositionen vieler periodischer Bewegungen von verschiedenen rationalen oder irrationalen Perioden betrachten könnte, auch u. a. die Bewegungen des Planetensystems mit seinen Störungen, sind ihm stationär; und

Digitized by Google

in diesem Sinne scheint er meine Definition gelesen und verstanden zu haben.

Es ist oft unmöglich, im Anfange eines Aufsatzes, der eine neue Gruppe von Vorgängen zusammenfassen soll, eine kurze Worterklärung zur vorläufigen Orientirung des Lesers in den bisherigen wissenschaftlichen terminis so zu fassen, dass sie genau dem entspricht, was gemeint ist, und was nachher strenger in der mathematischen Formulirung ausgesprochen wird. In solchen Fällen ziehe ich es vor die Worterklärung lieber etwas zu eng zu ziehen, als zu weit, da es für den Leser eine weniger unangenehme Enttäuschung ist, wenn er schliesslich etwas mehr erfährt, als ihm versprochen ist, denn umgekehrt. Und so ist auch diese meine an die Spitze gestellte Definition, wenn darin das Wort »stationär« in dem alten strengen Sinne genommen wird, etwas zu eng der Definition gegenüber, welche nachher in mathematischer Form gegeben wird; sie wäre aber allerdings zu weit, wenn das genannte Wort in dem Hrn. Clausius eigenthümlichen Sinne gemeint wäre, und dann wären in der That seine Einwände gegen die nachher in der mathematischen Formulirung des Problems vorgenommenen Einschränkungen theilweis gerechtfertigt.

Die Bestimmungen über die Art der Bewegungen, auf die sich meine Sätze beziehen, sind in mathematischer Formulirung gegeben, zunächst in Bezug auf ein allgemeineres mechanisches System, welches ich seitdem als polycyklisches bezeichnet habe, auf S. 166 und 167 meiner ersten Abhandlung unter Nr. 1 und 2. Da ein vollkommen drehrunder Kreisel sich mechanisch nicht anders verhält, als ein Körper mit zwei gleichen Hauptträgheitsmomenten, der um die Axe des ungleichen Moments rotirt, und die Bewegung des letztern nicht im strengen alten Sinne stationär ist, so habe ich die von mir gemeinten Bewegungen, auf die sich meine Sätze beziehen sollen, dadurch definirt, dass potentielle und actuelle Energie des Systems unabhängig sein sollen von einer Anzahl von Coordinaten p_b, welche zur vollständigen Bestimmung der Lage der Theile des Systems nothwendig wären, aber nur mit ihrem Differentialquotienten nach der Zeit

$$\frac{\partial p_b}{\partial t} = q_b$$

in die Werthe der genannten Theile der Energie eintreten. Dies wird bei den streng stationären Bewegungen offenbar immer der Fall sein; aber nicht immer werden Bewegungen, auf die die zuletzt gegebene Bestimmung passt, streng stationär sein. So würde z. B. die Bewegung eines Körpers mit zwei gleichen Trägheitsmomenten, der unter dem Einfluss der Schwere rotirt und Präcessionsbewegung ausführt,

Digitized by Google

miteingeschlossen sein unter die polycyklischen, aber nicht unter die streng stationären Bewegungen. Meine mathematische Formulirung der Aufgabe ist also noch etwas weiter als die Formulirung in Worten, die im Anfang meiner Arbeit gegeben ist. Dagegen wird eine Bewegung, wie die, welche Hr. Clausius auf S. 667 wählt, um die Unrichtigkeit meiner Gleichungen nachzuweisen, ausgeschlossen. Denn bei dieser wäre die lebendige Kraft jedes Punktes jedesmal Null, so oft er die Umkehrpunkte seiner Bahn erreicht hätte, dazwischen aber endlich. Ein solches Beispiel, was unter die von mir gegebenen Definitionen nicht passt, beweist natürlich nichts gegen die Richtigkeit meiner Sätze.

Ferner definire ich l. c. unter Nr. 2, was ich unter der Beschränkung auf die Statik des Systems verstehe. Änderungen im Zustand des Systems sollen nicht ausgeschlossen sein, aber sie sollen so langsam vorgehen, dass das System sich niemals merklich aus den Zuständen entfernt, in denen es dauernd beharren könnte. Da man es durch Regulirung der äussern Kräfte vollkommen in der Hand hat, diese Veränderungen mit beliebiger Langsamkeit vor sich gehen zu lassen, so sind dies vollkommen zulässige Annahmen, die die Art der zu behandelnden Probleme abgrenzen. Auch liegen genau dieselben Annahmen den sämmtlichen Sätzen, welche Hr. Clausius über die reversiblen Umwandlungen der Wärme aufgestellt hat, als stillschweigende Voraussetzungen zu Grunde, wie ich in (§. 1) meiner ersten Arbeit schon bemerkt habe.

Das Ziel endlich meines Aufsatzes ist gewesen, nachzuweisen, dass eine Classe von mechanisch vollkommen verständlichen Bewegungen besteht, bei der ähnliche Beschränkungen der Umwandlung von Arbeitsäquivalenten vorkommen, wie sie der zweite Hauptsatz für die Wärmebewegung ausspricht. Die Wärmebewegung tritt uns zunächst doch als eine Bewegung unbekannter Art entgegen, über die wir uns bisher meist nur sehr unbestimmte Vorstellungen machen können, abgesehen von dem einen in der kinetischen Gastheorie behandelten Falle. Es erscheint mir als ein vollkommen rationeller Weg, bei solcher Lage der Dinge nachzusehen, unter welchen allgemeinsten Bedingungen die bekannten allgemeinsten physikalischen Eigenthümlichkeiten der Wärmebewegung bei andern wohlbekannten Classen von Bewegungen vorkommen können. In diesem Sinne habe ich die Analogien, die sich zwischen dem Verhalten der Wärmebewegung und den von mir untersuchten monocyklischen Bewegungen finden, allerdings überall hervorgehoben, aber doch von Anfang an auch ausgesprochen (S. 159), dass die Wärmebewegung nicht im strengen Sinne monocyklisch sei. Ich habe demzufolge auch nirgends den Anspruch oerhben, »eine Erklärung« des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie gegeben zu haben.

Digitized by Google

Für den mir vorgesetzten Zweck fiel der Hauptnachdruck bei der Auswahl der heranzuziehenden Beispiele natürlich auf ihre vollständige mechanische Verständlichkeit.

Der Nachweis, dass CARNOT's Gesetz zutreffen muss bei den für die Wärme vorausgesetzten Atombewegungen, ist, so weit ich sehe, vollständig bisher erst gegeben bei der kinetischen Gastheorie für Gase mit einatomigen Molekeln. Bei mehratomigen Molekeln muss die Annahme zu Hülfe genommen werden, dass die lebendige Kraft der inneren Molecularbewegung der lebendigen Kraft der fortschreitenden Bewegung proportional sei, und eine ganz ähnliche Hypothese führt Hr. CLAUSIUS für viel allgemeinere Fälle auch in Nr. 14 der von ihm citirten Arbeit von 1870 ein, der er den Titel gegeben hat: »Über die Zurückführung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie auf allgemeine mechanische Principien.« Er selbst erkennt die erwähnte Hypothese als solche an, indem er sie als »eine naheliegende Voraussetzung« bezeichnet.

Es wird dabei vorausgesetzt, dass die mittleren lebendigen Kräfte sämmtlicher stationär (im weiteren Sinne) bewegten Massenpunkte immer einander proportional wachsen, auch bei allen Änderungen der Umlaufszeit oder der übrigen Parameter ihrer Bewegung.

Weiter wird dann unter Nr. 15 desselben Aufsatzes der Factor T, welcher im Werthe des Differentials der inneren Arbeit vorkommt, und dem, was ich den integrirenden Nenner genannt habe, entspricht, als Temperatur interpretirt. Nimmt man Rücksicht auf die physikalische Bedeutung der Temperatur, so kann man sagen, es ist dies eine Ausdehnung der vorher für einen Körper gemachten Hypothese, auf verschiedene in Temperaturgleichgewicht befindliche Körper. Der übrigens sehr interessante und für eine künftige Vollendung der Wärmetheorie wichtige Satz, den Hr. CLAUSIUS in jener Arbeit wirklich erwiesen hat, ist, dass für eine gewisse Classe von Bewegungen die mittlere lebendige Kraft integrirender Nenner für die Zunahme der innern Arbeit sei. Die Gruppe der Bewegungen, für welche er das vollständig beweist, ist nach einer Seite hin allgemeiner, als die von mir behandelte, denn sie ist nur als stationär im weiteren Sinne angesehen. In anderen Beziehungen ist sie enger, da vorausgesetzt ist, erstens dass die mittleren Perioden aller einzelnen Bewegungen aus unbekannt bleibenden Gründen gleich gross sind und bei eintretenden Änderungen immer gleich gross bleiben; zweitens dass die Kräfte, die auf jedes einzelne Molekel wirken, nur von der Art sind, wie sie von ruhenden anderen Körpern ausgehen können. Diesen beiden letzteren Einschränkungen unterliegen meine Sätze nicht.

Ich bitte um Verzeihung, dass ich diese Thatsachen constatire, da der erste Absatz des S. 664 in dem Aufsatz meines Kritikers einem nicht

Digitized by Google

genau orientirten Leser leicht den Eindruck machen könnte, als wäre mein Aufsatz nur eine abgeschwächte Wiederholung dessen, was Hr. Clausius schon vor vierzehn Jahren besser und vollständiger geleistet hätte.

Nachträge.

Ich benutze die Gelegenheit, um hier noch nachzutragen, was ich bei der Ausarbeitung meiner Studien für das Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. 97 Heft 2 zu verbessern und zu erweitern im Stande gewesen bin.

Zu §. 4 und §. 7. Was ich in meinem zweiten Aufsatze in §. 7 als »reine Bewegungskoppelung« definirt habe, kann auch definirt werden als die Bedingung dafür, dass das gekoppelte System überhaupt monocyklisch sei, und die entsprechenden Bedingungen finden sich dann auch für die Fesselung der verschiedenen Bewegungen eines polycyklischen Systems an einander, wenn dasselbe in ein monocyklisches verwandelt werden soll. Die allgemeine Bedingung ist die, dass die neue Entropie σ eine Function der s_b werde, welche im Allgemeinen von den p_a unabhängig ist.

Zu §. 6. S. 174 ist ein Irrthum zu corrigiren. Bei Scheidung der verschiedenen Fälle ist immer a statt $(a+1)$ zu setzen.

Im Falle $a < b$ kann dieselbe Form, wie für $a \geqq b$ gewonnen werden, wenn man das F als eine willkührliche Function der in Gleichung 6c vorkommenden F_c ansetzt.

Die lebendige Kraft wird immer integrirender Nenner sein müssen, wenn die Constanten der Gleichung $\sigma = F_s$ nur Raumgrössen, keine Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und andere von Differentialquotienten nach der Zeit abhängige Grössen enthalten und in die Gleichungen einführen, welche die Verhältnisse der einzelnen s_b zu einander aussprechen. Ich habe solche Verbindungen dem entsprechend rein kinematische Verbindungen genannt.

Endlich lässt sich nachweisen, dass in Fällen, wo die den einzelnen q_b zugehörigen Trägheitsmomente willkührliche Vergrösserung erleiden können, ohne die Art der Verbindung zu ändern, also z. B. bei allen Systemen, welche nur rotirende Rotationskörper und Ringströme ohne Reibung enthalten, die lebendige Kraft integrirender Nenner für jede monocyklische Bewegung bleiben muss.

Digitized by Google

Digitized by Google

35. Die elektromagnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes durch Eisen, Cobalt und Nickel.

Von A. Kundt
in Strassburg i. E.

(Vorgelegt am 19. Juni; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXXIV]; — ausgegeben am 17. Juli.)

Hr. Kerr hat gefunden,[1] dass die Polarisationsebene des Lichtes, welches von dem spiegelnden Pol eines Elektromagneten normal reflectirt wird, eine Drehung erleidet. Die Richtung der Drehung ist derjenigen des magnetisirenden Stromes, und mithin derjenigen der Ampère'schen Molecularströme des Magneten entgegengesetzt. Sodann hat Kerr die Reflexion des Lichtes an der spiegelnden Seitenfläche eines Magneten untersucht. Er fand, dass auch hier eine Drehung der Polarisationsebene auftritt, wenn der Elektromagnet erregt oder ummagnetisirt wird. Die Erscheinungen sind aber ziemlich complicirt.

Geradlinig polarisirtes Licht, welches unter irgend einem Incidenzwinkel von einem Metall reflectirt wird, behält seine Polarisationsebene nur in den Fällen, in denen diejenige des einfallenden Lichtes mit der Einfallsebene zusammenfällt oder senkrecht zu derselben steht. In allen anderen Lagen der Polarisationsebene wird das reflectirte Licht elliptisch. Kerr beschränkt seine Untersuchungen daher auf die beiden ersten Fälle. Er findet, dass beim Erregen des Magneten, wenn vorher der polarisirende und analysirende Nicol gekreuzt waren, eine Erhellung des Gesichtsfeldes auftritt, welche er auffasst als eine durch die Magnetisirung erzeugte Drehung der Polarisationsebene.

Die Richtung und der Betrag dieser Drehung hängen nicht blos vom Einfallswinkel ab, sondern sind auch verschieden je nachdem die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes (lange Diagonale des

[1] Phil. Mag. 1877. V. Ser. Vol. III. p. 321—343 und 1878. Vol. V. p. 161—177.

Digitized by Google

Querschnittes eines Nicol'schen Prismas) in oder senkrecht zur Einfallsebene liegt.

Ist das Licht in der Einfallsebene polarisirt, so ist die Richtung für alle Einfallswinkel die gleiche und zwar entgegengesetzt derjenigen der Ampère'schen Molecularströme des reflectirenden Magneten.

Liegt die Polarisationsebene senkrecht zur Einfallsebene, so ist bei Einfallswinkeln von o bis etwa 80° der Sinn der Drehung demjenigen der Ampère'schen Ströme gleich, bei Incidenzen von 80° bis 90° den Letzteren entgegengesetzt gerichtet. Der Betrag der Drehung ist im einen wie im anderen Fall beim Einfallswinkel von etwa 65° ein Maximum.

Auch bei schiefer Incidenz des Lichtes auf die spiegelnde Polfläche eines Elektromagneten wird eine Drehung beobachtet; der Sinn der Drehung ist aber nach Kerr, soviel ich aus seinen Angaben entnehmen kann, für alle Incidenzen der gleiche, den Molecularströmen entgegengesetzte, mag die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes in oder senkrecht zu der Einfallsebene liegen.

Bei allen Versuchen des Hrn. Kerr ist die Grösse der Drehung sehr gering, sie beträgt günstigenfalls nur wenige Minuten, und Kerr hat daher auch keine Messungen angestellt, sondern nur den Betrag der Drehung in den verschiedenen Positionen schätzend verglichen und den Sinn derselben festgestellt.

Ich habe vor etwa zwei Jahren die Kerr'schen Versuche wiederholt. Meine Versuche bestätigten alle Angaben des Hrn. Kerr vollständig, mit der einen Ausnahme, dass ich auch bei Reflexion an der Polfläche bei einer Incidenz von etwa 80° eine Umkehr im Sinne der Drehung erhielt, wenn die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes und die Einfallsebene senkrecht zu einander waren. Diese Umkehrung scheint Hrn. Kerr entgangen zu sein. Sodann gelang es mir alle Erscheinungen bei der Reflexion an den Seiten- wie an den Polflächen der Magnete unter einheitliche Gesichtspunkte zu bringen, von welchen aus vielleicht eine Erklärung derselben sich ergiebt.

Dass bei senkrechter Incidenz auf die Polfläche eines Elektromagneten eine Drehung der Polarisationsebene statthat, ist übrigens auch von Gordon[1] bestätigt worden. Derselbe erhielt beim Umkehren des magnetisirenden Stromes 26′ 45″ Drehung.

Sodann hat Hall[2] gezeigt, dass auch bei Reflexion von Cobalt und Nickel, wenn dieselben den Pol eines Magneten bilden, eine Drehung der Polarisationsebene entgegen dem Sinne des magnetisirenden Stromes

---

[1] Gordon: Physical treatise of Electricity and Magnetism. vol. II. p. 261.
[2] Phil. Mag. 1881. V Series vol. XII. p. 171.

Digitized by Google

eintritt. Es mag hier gleich hinzugefügt werden, dass HALL auch bereits untersucht hat, ob die Polarisationsebene von Licht, welches durch eine sehr dünne durchsichtige Schicht von Ni hindurchgeht, gedreht wird. Die durchsichtige Schicht wurde nach der Angabe von WRIGHT[1] durch Zerstäuben einer Nickelelektrode in einem GEISSLER'schen Rohr erhalten. HALL untersuchte zwei Nickelspiegel, konnte aber keine Drehung constatiren, und bemerkt:

Both these experiments on direct transmission have been, we may say, quite negative.

Endlich ist noch zu erwähnen, dass FITZGERALD eine theoretische Erklärung der Drehung an Magneten zu geben versucht hat. Ich werde weiter unten die FITZGERALD'sche Theorie kurz angeben und zeigen, dass dieselbe mit den Beobachtungen in Widerspruch ist.

Ich habe nun in neuester Zeit die elektromagnetische Drehung der Polarisationsebene bei Reflexion an Eisen, Cobalt und Nickel messend verfolgt, und meine früheren Versuche und damit die KERR'schen vollständig bestätigt. Nachstehend gebe ich eine kurze Übersicht der erhaltenen Messungsresultate.

Es ist mir aber gelungen noch nach einer andern Richtung hin die KERR'schen Versuche erheblich zu vervollständigen. Nachdem ich mir nämlich dünne durchsichtige Schichten von Eisen, Cobalt und Nickel hergestellt hatte, habe ich die Drehung der Polarisationsebene des Lichtes beim Durchgang durch diese Schichten untersucht.

Es ergab sich:

Durchsichtige Schichten von Eisen, Cobalt und Nickel drehen im magnetischen Feld die Polarisationsebene von durchgehendem Licht sehr stark. Die Drehung ist bei Eisen für die mittleren Strahlen des Spectrums über 30000 mal grösser als bei Glas von gleicher Dicke. Die Drehung erfolgt bei allen drei Substanzen im Sinne des magnetisirenden Stromes.

Nach einigen kurzen Bemerkungen über die benutzten Spiegel und durchsichtigen Metallschichten gebe ich im Folgenden zunächst Beobachtungen über die elektromagnetische Drehung beim Durchgang durch die Metalle, sodann meine Versuche über die Drehung bei Reflexion des Lichtes an denselben. Eingeschaltet und hinzugefügt sind an geeigneten Stellen allgemeinere Discussionen über die Versuche und die sich aus ihnen ergebenden Folgerungen.

---

[1] SILLIMAN's Journal Jan. 1877 p. 49 und Sept. 1877 p. 169.

Digitized by Google

1.

Die benutzten Spiegel und die durchsichtigen Metallschichten.

Bei den Versuchen über Reflexion habe ich anfangs kreisrunde Stahlspiegel von 35^{mm} Durchmesser und 6^{mm} Dicke von sehr hoher Politur benutzt. Die Spiegel wurden entweder zwischen die Pole gebracht, dort entsprechend befestigt oder seitlich an die die Pole verbindenden Anker angelegt. Etwaige Durchbiegungen derselben wurden untersucht, indem man die Bilder, welche die Spiegel gaben, mit einem Fernrohr beobachtete. Als gespiegelte Objecte wurden horizontale und verticale Millimeterscalen benutzt. Die kleinen Verzerrungen und Verschiebungen der Spiegelbilder beim Erregen des Magneten liessen die Durchbiegungen oder Änderungen in der Lage der Spiegel erkennen. Bei den Versuchsreihen mit solchen Spiegeln, die später angegeben werden, waren mit Scala und Fernrohr keine Verzerrungen zu constatiren, durch welche die beobachteten optischen Effecte hätten erklärt werden können.

Dann habe ich Spiegel verwendet, welche aus Spiegelmetall bestanden und welche mit einer dünnen Schicht Eisen oder Nickel galvanoplastisch überzogen wurden. Endlich kam ich dazu, Spiegelglasplatten mit ganz dünnen durchsichtigen Eisenschichten galvanoplastisch zu belegen.

Soll ein Metall galvanoplastisch auf eine Glasfläche niedergeschlagen werden, so muss zunächst die Glasfläche leitend gemacht werden. Ich versuchte, Spiegelglas auf die bekannte Weise zu versilbern und das Eisen auf diese Silberschicht abzulagern. Bisher haben diese Bemühungen zu keinem Resultate geführt. Sobald der Strom geschlossen wurde und Eisen oder ein anderes Metall sich auf dem Silber aus der Flüssigkeit abzulagern begann, löste sich die Silberschicht in Fetzen von dem Glase ab. Bei sehr guter Versilberung und bei richtig gewählter Stromdichte mag es vielleicht doch gelingen, das Silber galvanoplastisch zu überziehen, wenigstens habe ich kleinere Stücke versilberten Glases einige Male verkupfern können. Ich habe diesen Weg zunächst verlassen, da sich ein bequemerer bot. Hr. König in Paris benutzt für die bei seinen akustischen Apparaten verwendeten rotirenden Spiegel ein Spiegelglas, auf dessen einer Fläche eine ganz dünne, sehr schön spiegelnde Platinschicht eingebrannt ist. Die Platinschicht ist so dünn, dass sie sehr gut durchsichtig ist. Ob dieselbe völlig cohärent ist, mag dahingestellt sein, jedenfalls ist sie leitend genug, um sie als Elektrode zu benutzen und auf ihr ein

Digitized by Google

anderes Metall in spiegelnder, beliebig dünner Schicht niederzuschlagen. Das Platin absorbirt alle Farben ziemlich gleichmässig.

Ich habe Eisen nach dem Verfahren von VARRENTRAPP[1] niedergeschlagen; Cobalt und Nickel aus schwefelsaurem Cobalt- und Nickeloxydul-Ammoniak. Die Concentration der Lösungen muss je nach der Dicke, die man den Schichten geben will, gewählt werden, ebenso die Stromdichte. Einzelne der Eisen- und Nickelspiegel habe ich dann noch wieder mit spiegelnden Schichten von Gold, Silber oder Kupfer überzogen. Die Metallschichten kann man leicht so dünn erhalten, dass dieselben und das Platin zusammen noch durchsichtig sind.

Einfallendes weisses Licht ist nach dem Durchgang durch Eisen braun, durch Cobalt grau, durch Nickel grau mit einem Stich ins Blaue. Die Oberflächen der niedergeschlagenen Schichten sind gewöhnlich sehr gut spiegelnd; doch scheint die physikalische Beschaffenheit verschiedener Spiegel ziemlich variabel zu sein. Vielleicht werden die Metalle in einzelnen Fällen krystallinisch ausgeschieden. Schneidet man aus einem Eisenspiegel einen länglichen Streifen, so kann man denselben leicht durch Streichen mit einem Magneten zu einem permanenten Magneten machen. Die Coercitifkraft des galvanisch niedergeschlagenen Eisens ist, wie bekannt, ziemlich erheblich.

Man kann also einen durchsichtigen permanenten Eisenmagneten und ebenso durchsichtige Magnete von Cobalt und Nickel herstellen.

An einen Coconfaden aufgehängt stellen sich diese durchsichtigen Magnete unter dem Einfluss des Erdmagnetismus ganz gut in den magnetischen Meridian.

Ich hoffe mich mit dem Verhalten dieser sehr dünnen durchsichtigen Magnete später noch weiter beschäftigen zu können.

2.

Drehung der Polarisationsebene beim Durchgang des Lichtes durch Eisen, Cobalt und Nickel.

Für die Versuche wurde ein RUHMKORFF'scher Elektromagnet bekannter Construction benutzt. Die mit dem Draht umwickelten Eisenkerne waren mit conischen, vorn abgerundeten, durchbohrten Polstücken versehen. Diese Pole wurden auf etwa 4^{mm} einander genähert. Den Strom lieferte eine GRAMME'sche Maschine. Die Intensität desselben betrug ungefähr 16 Ampère. Die zu untersuchenden mit dem Metallüberzug versehenen Glasplatten wurden mit einem passenden Halter, der horizontale und verticale Verschiebung und Drehung

[1] MUSPRATT's Chemie. Bd. II. S. 1200.

Digitized by Google

erlaubte, möglichst senkrecht zur Richtung der durchgehenden Lichtstrahlen in die Mitte zwischen die Pole gebracht. Benutzt wurde immer Sonnenlicht.

Um die Drehung durch die Eisen-, Cobalt- und Nickelschichten zu erhalten, wurde eine Stelle eines Glasstückes, welche beim galvanoplastischen Niederschlag nicht mit Metall überzogen war, verglichen mit einer Stelle, welche mit einer Schicht der Metalle bedeckt war, indem erst die Drehung durch Glas und Platin bestimmt wurde und dann die Drehung durch Glas, Platin und Eisen, Cobalt oder Nickel. Es ergab sich übrigens, dass die dünne Platinschicht keine messbare Drehung erzeugte, so dass eine Stelle eines Glases mit Metallüberzug verglichen werden konnte mit einer Stelle desselben Glases von dem mittelst Säure der galvanoplastische Überzug und das Platin weggewischt war. — Da bei der Drehung durch Glas und Platin allein, so wie durch die mit Fe, Co oder Ni belegten Stücke eine ziemlich starke Farbendispersion auftrat, wurde in den zunächst folgenden Versuchen auf den Übergang zwischen Blau und Roth eingestellt, also die Drehung für die mittleren Strahlen des Spectrums bestimmt. Als Drehung ist im Folgenden, wenn nichts Besonderes hinzugefügt ist, immer die Summe der Drehungen nach der einen und anderen Seite, welche bei Umkehrung des Stroms eintritt, angegeben. Die Drehung im Sinn der Ampère'schen Ströme ist ferner als positive, diejenige im entgegengesetzten Sinn als negative bezeichnet.

Eisen.

Eisenspiegel Nr. 1. Braun durchsichtig.

Drehung durch Glas und Platin bei Umkehr des Stroms	+ 1° 0′
durch Glas, Platin und Eisen	+ 4° 30′
Drehung durch Eisenschicht	+ 3° 30′

Eisenspiegel Nr. 2. Sehr dünn, ganz hellbraun durchsichtig.

Durch Glas und Platin	+ 1° 30′
durch Glas, Platin und Eisen	+ 2° 24′
Drehung durch Eisen	+ 0° 54′

Eisenspiegel Nr. 3.

durch Glas und Platin	+ 1° 42′
durch Glas, Platin und Eisen	+ 3° 48′
Drehung durch Eisen	+ 2° 6′

Eisenspiegel Nr. 4.

Nachdem dieser Spiegel mit einer ziemlich hell durchsichtigen Eisenschicht überzogen war, wurde auf die eine Hälfte nochmals eine

Digitized by Google

Schicht niedergeschlagen, so dass diese Hälfte dunkelbraun durchsichtig war. Von einem Theil der Glasplatte wurde dann Eisen und Platin entfernt.

Drehung durch Glas allein	+ 2° 12′
durch Glas, Platin, dünne Eisenschicht	+ 3° 42′
durch Glas, Platin, dicke Eisenschicht	+ 5° 54′
Drehung durch dünne Eisenschicht	+ 1° 30′
» » dicke »	+ 3° 42′

Wie schon bemerkt, ist die Drehung durch die Platinschicht nicht messbar.

Cobalt.

Cobaltspiegel Nr. 1.

Drehung durch Glas und Platin	+ 1° 18′
durch Glas, Platin und Cobalt	+ 2° 36′
Drehung durch Cobalt	+ 1° 18′

Cobaltspiegel Nr. 2. Sehr hell durchsichtig.

Drehung durch Glas und Platin	+ 1° 30′
durch Glas, Platin und Cobalt	+ 2° 34′
Drehung durch Cobalt	+ 1° 4′

Cobaltspiegel Nr. 3. Von demselben Spiegel wie Nr. 2 geschnitten.

Drehung durch Glas und Platin	+ 1° 30′
durch Glas, Platin und Cobalt	+ 2° 30′
Drehung durch Cobalt	+ 1° 0′

Die beiden Spiegel hinter einander gelegt liessen noch hinreichend Licht durch. Es ergab sich als Gesammtdrehung der beiden Cobaltschichten die Summe der einzelnen Drehungen, nämlich

Cobalt 2 und Cobalt 3	+ 2° 5′

Cobaltspiegel Nr. 4.

Drehung durch Glas und Platin	+ 1° 3′
durch Glas, Platin und Cobalt	+ 3° 1′
Drehung durch Cobalt	+ 1° 58′

Nickel.

Ich gebe Beobachtungen an zwei guten homogenen Spiegeln.

Nr. 1.

Drehung durch Glas und Platin	+ 1° 26′
durch Glas, Platin und Nickel	+ 2° 5′
Drehung durch Nickel	+ 0° 39′

Digitized by Google

Nr. 2.

Drehung durch Glas und Platin	$+ 1^\circ 35'$
durch Glas, Platin und Nickel	$+ 2^\circ 24'$
Drehung durch Nickel	$+ 0^\circ 49'$

Es kann nun die Frage entstehen, ob die für Fe, Co und Ni angegebenen Drehungen wirklich durch diese Substanzen hervorgerufen werden, oder ob die Beobachtungen auf andere Weise zu erklären sind. Da bei den Versuchen nach einander eine mit magnetischem Metall und eine nur mit Platin belegte Stelle zwischen die conischen Magnetpole gebracht wurde, so könnte man etwa meinen, dass die Intensität des magnetischen Feldes zwischen den Polen in beiden Fällen eine verschiedene sei, und dadurch die Differenz der Drehung erzeugt würde. Ich habe mich durch die mannigfachsten Versuche überzeugt, dass, selbst wenn grössere Eisenmassen in das Feld gebracht wurden, weder die Drehung der Eisenspiegel noch die irgend eines Glasstückes merklich geändert wurde.

Man könnte ferner meinen, dass die dünne, stark magnetische Eisenschicht, welche dem Glase eng anliegt, irgend einen besondern, unbekannten Einfluss auf das Drehvermögen des Glases ausübe und die beobachtete Differenz in den Werthen der Drehung bei Belegung mit Eisen und ohne diese Belegung auf einen solchen Einfluss zu schieben sei. Um hierüber zu entscheiden, brachte ich zwischen die Pole ein enges Gefäss mit planen Glaswänden, gefüllt mit Schwefelkohlenstoff, stellte in dies hinein den Theil eines platinirten Glasstückes, welches nicht mit Eisen überzogen war, und bestimmte die Drehung, welche das ganze System erzeugte. Dann wurde ein Theil des Platinspiegels, welcher mit Eisen überzogen war, in die Flüssigkeit gesteckt und abermals die Drehung bestimmt.

Es ergab sich im ersten Fall eine Drehung	$+ 11^\circ 25'$
im zweiten	$+ 12^\circ 27'$
also Differenz	$+ 1^\circ 2'$

Wurde das Glas mit Platin ohne Benutzung des Schwefelkohlenstoffgefässchens zwischen die Pole gebracht, so ergab sich eine Drehung

	$+ 1^\circ 11'$
die oben benutzte Stelle desselben Spiegels mit Eisen gab	$+ 2^\circ 13'$
also Differenz	$+ 1^\circ 2'$

genau wie oben.

Es ist mithin die Drehung des Schwefelkohlenstoffs, welcher doch dem Eisen so eng anliegt, wie das Glas, durch ersteres gar nicht beeinflusst, man kann also auch nicht umhin anzunehmen, dass die Differenz $1^\circ 2'$ in beiden Fällen durch die Drehung im Eisen erzeugt ist.

Digitized by Google

3.

Die Dispersion der Drehung, das specifische Drehvermögen und die circulare Doppelbrechung bei Fe, Co und Ni.

Da mir in letzter Zeit nicht oft genug Sonne zur Verfügung stand, habe ich ausgedehntere Versuche über die Drehung der Polarisationsebene für die verschiedenen Farben bei Fe, Co und Ni bisher nicht machen können. Indessen habe ich doch mit Sicherheit constatiren können, dass dem Eisen eine anomale Rotationsdispersion zukommt. Licht, welches durch ein ziemlich intensiv rothes Glas gegangen war wurde erheblich stärker gedreht, als blaues Licht, welches erhalten wurde, indem die Sonnenstrahlen durch eine Lösung von schwefelsaurem Kupferoxyd-Ammoniak geschickt wurden.

Entsprechende Versuche mit Co und Ni gaben nur eine schwache Rotationsdispersion. Versuche, bei denen die rothen und blauen Strahlen eines allerdings unreinen Spectrums benutzt wurden, gaben gleichfalls eine anomale Rotationsdispersion im Eisen.

Mit einem möglichst guten Spiegel ist sodann das specifische Drehvermögen des Eisens bestimmt.

Die Dicke der Eisenschicht eines Spiegels ergab sich durch Wägung vor und nach dem galvanoplastischen Überzug zu $0^{mm}.000055$, die Drehung für die mittleren Strahlen des Spectrums durch das Glas und Platin war $1^\circ 37'$, diejenige durch Glas, Platin und Eisen $3^\circ 25'$, also die durch das Eisen $1^\circ 48'$; die Dicke des platinirten Glases war $1^{mm}.61$; mithin dreht das Eisen etwa 32000 mal stärker als das benutzte Glas.

Mit einem anderen Spiegel, dessen Dicke $0^{m}.000069$ betrug, wurde die Drehung des Eisens 35000 mal so gross als die des Glases gefunden.

Cobalt hat ein specifisches Drehvermögen, welches dem des Eisens nahe liegt, Nickel dagegen ein erheblich kleineres. Zwei Nickelspiegel gaben eine Drehung von im Mittel etwa 14000 mal der des Glases.

Ich betrachte diese Zahlen selbstverständlich nur als angenähert, da die Bestimmungen der Dicken durch Wägung sehr ungenau sind. Dieselben geben aber noch Veranlassung zu einigen interessanten Folgerungen.

Nach den Versuchen von RIGHI[1] pflanzt sich in einer Substanz, welche im magnetischen Feld im Sinn der Ampère'schen Ströme dreht, ein circularpolarisirter Strahl, in dem die Bewegung der Äthertheilchen im gleichen Sinn wie die Molecularströme erfolgt,

[1] Nuovo Cimento 3. p. 212. 1878.

Digitized by Google

schneller fort, als ein circularer Strahl von entgegengesetzter Bewegung der Äthertheilchen. Es findet also eine circulare Doppelbrechung statt. Seien n und n' die Brechungsexponenten für die beiden entgegengesetzten circularen Strahlen, ist ϕ der Betrag der beobachteten Drehung, d die Dicke der durchstrahlten Schicht der Substanz, λ die Wellenlänge, so hat die Relation statt

$$\phi = \frac{\pi \cdot d}{\lambda}(n - n')$$

Nehmen wir $\lambda = 0.00058$; für d die oben angegebene Dicke der Eisenschicht $= 0.000055$; $\phi = 1°48'$, so ergiebt sich

$$(n - n') = 0.1.$$

Diese Differenz der Brechungsexponenten beträgt mehr als die Hälfte derjenigen zwischen den Exponenten des ordinären und extraordinären Strahls im Kalkspath, und ist etwa zehnmal so gross als die Differenz der Brechungsexponenten im Quarz senkrecht zur Axe.

Die Differenz der Brechungsexponenten für die beiden circularen Strahlen in Richtung der Axe des Quarzes beträgt nach Lang nur 0.0000718.

Die verwendete Eisenschicht hat also in dem von mir benutzten magnetischen Feld eine Drehung, welche 1462 mal grösser ist als die natürliche Drehung in einem Quarz von der gleichen Dicke wie die Eisenschicht. Es wird später, wenn die Fitzgerald'sche Theorie besprochen wird, nöthig sein, noch auf die circulare Doppelbrechung unserer Eisenschichten zurückzukommen.

4.

Drehung der Polarisationsebene bei senkrechter Reflexion von Eisen, Cobalt und Nickel.

Auch für diese Versuche wurde der Ruhmkorff'sche Elektromagnet benutzt. Der dem Beobachter abgewandte durchbohrte Pol wurde durch einen massiven nicht durchbohrten ersetzt. Mittelst Reflexion an einer um 45° zur Axe der Pole geneigten Glasplatte wurde Licht durch den durchbohrten Schenkel des Elektromagneten geschickt und an der zwischen den Polen aufgestellten Metallplatte reflectirt, ging dann durch die Glasplatte und gelangte so in den analysirenden Nicol. Die reflectirenden Flächen konnten mit Hülfe von Justirvorrichtungen genau senkrecht zur Richtung der einfallenden Lichtstrahlen und auch möglichst normal zur Axe des Elektromagneten gestellt werden.

Digitized by Google

Die Polarisationsebene des polarisirenden Nicols wurde, um möglichst grosse Lichtstärke zu haben, genau in die Einfallsebene gebracht. Tritt nun bei der Reflexion an der magnetischen Metallfläche eine Drehung ein, so dass also die Polarisationsebene des reflectirten Lichtes nicht mehr in die Einfallsebene der unter 45° geneigten Glasplatte fällt, so tritt beim Durchgang durch diese noch eine weitere Drehung entsprechend den FRESNEL'schen Formeln für Brechung des polarisirten Lichtes ein. Man misst also mit dem analysirenden Nicol nicht blos die elektromagnetische Drehung an der Metallfläche, sondern die Summe dieser und der durch die Glasplatte bedingten. Letztere war selbstverständlich so weit von dem Magneten entfernt, dass durch sie keine elektromagnetische Drehung mehr erfolgte.

Bezeichnet α den Winkel, welchen die Polarisationsebene eines auf eine Glasplatte fallenden Lichtstrahls mit der Einfallsebene macht, so ist der Winkel γ zwischen den beiden Ebenen nach dem Durchgang durch die Platte gegeben durch

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos^2 (i - r)}$$

wenn i und r Einfalls- und Brechungswinkel bedeuten.

Da bei den Beobachtungen i, stets nahe gleich 45°, der Brechungsexponent der Glasplatte ungefähr 1.48 betrug, so ergiebt die Rechnung, das die direct beobachteten Werthe der Drehungen um etwa 10 Procent zu vermindern sind, um den reinen elektromagnetischen Effect zu erhalten.

Hr. KERR sowie Hr. GORDON scheinen den Einfluss der Glasplatte übersehen zu haben, wenigstens erwähnen sie denselben nicht.

Ich habe, wie die Genannten, zunächst die Anordnung mit der Glasplatte beibehalten, um die Möglichkeit zu haben, das Licht wirklich genau senkrecht auf die Metallflächen auffallen zu lassen.

Benutzt wurden für die Versuche nur Eisen, Cobalt und Nickelspiegel, die galvanoplastisch auf platinirtem Glas niedergeschlagen waren. Es ist schon oben bemerkt, dass in Folge der geringen Dicke dieser Platten die auf sie von dem Magneten ausgeübten Kräfte so gering sind, dass durch dieselben Verbiegungen der Glasplatten, welche die Metallschichten tragen, nicht eintreten.

Eisen.

Es sind vier Spiegel untersucht:

No. 1 Eisenschicht so dick, dass dieselbe völlig undurchsichtig ..... Drehung $-53'.6$

No. 2 durchsichtig ..... Drehung $-45'.4$

Digitized by Google

No. 3 durchsichtig ..... Drehung — 1° 5′.8
No. 4 durchsichtig ..... Drehung — 48′.8

Die Drehung ist der Richtung des magnetisirenden Stromes entgegengesetzt, daher sind obige Zahlen, wie die nachfolgenden für Co und Ni mit dem negativen Zeichen versehen. Es ist hervorzuheben, dass auch bei der Reflexion deutlich eine Rotationsdispersion wahrgenommen wurde, und zwar findet ebenso wie beim Durchgang des Lichtes eine anomale Dispersion statt, d. h. die rothen Strahlen werden stärker gedreht als die blauen. Auffällig ist, dass Spiegel 3, der sehr durchsichtig war, eine so erhebliche Drehung zeigt. Es ist mir mehrfach aufgefallen, dass auch andere Spiegel von geringerer Dicke eine verhältnissmässig starke Drehung gaben. Genauere Versuche, bezüglich der Abhängigkeit der Drehung von der Dicke der reflectirenden Schicht, konnte ich bisher nicht anstellen.

Cobalt.

Untersucht sind drei Cobaltspiegel:

No. 1 durchsichtig ..... Drehung — 1° 7′.2
No. 2 nur noch eben durchsichtig ..... Drehung — 50′.9
No. 3 undurchsichtig ..... Drehung — 50′.3

Auch hier konnte eine schwache Rotationsdispersion wahrgenommen werden.

Nickel.

Von zwei Nickelspiegeln, die untersucht wurden, gab:

No. 1 durchsichtig ..... Drehung — 20′.5
No. 2 undurchsichtig ..... Drehung — 23′.0

Nickel dreht also bei der Reflexion nur etwa halb so stark als Eisen und Cobalt. Auch für das durchgehende Licht ist, wie oben gezeigt wurde, die Drehung bei Ni erheblich kleiner als bei Fe und Co.

Bei der Reflexion spielt sicher die moleculare Beschaffenheit der Oberfläche eine wesentliche Rolle. Da diese nun bei der Herstellung der Spiegel je nach Concentration der Lösung und Stromdichte möglicherweise sehr verschieden ausfallen kann, so sind genau übereinstimmende Werthe für die Drehung bei verschiedenen Spiegeln wohl kaum zu erwarten. Um den Betrag der elektromagnetischen Drehung allein zu haben, sind, wie gezeigt wurde, sämmtliche vorstehende Zahlen um circa 10 Procent zu verkleinern.

Bemerkt möge schliesslich noch werden, dass ich auch platinirtes Glas erst mit Eisen und dann das Eisen galvanoplastisch mit Silber oder Kupfer überzog. Diese versilberten oder verkupferten Eisen-

Digitized by Google

spiegel zeigten bei der Reflexion keine wahrnehmbare Drehung. Verzichtet man darauf, die Strahlen genau vertical auf die Metallflächen auffallen zu lassen, so kann man die Glasplatte beseitigen. Dieselbe wurde ersetzt durch einen durchbohrten Spiegel von nicht magnetischem Metall und dieser wurde so eingestellt, dass das reflectirte Licht durch das Loch ins Auge des Beobachters gelangte. Die bei dieser Anordnung beobachtete Drehung ist lediglich durch die Reflexion an den magnetisirten Spiegeln zwischen den Polen erzeugt.

5.

Widerlegung der FITZGERALD'schen Theorie der Drehung bei der Reflexion.

Hr. FITZGERALD hat eine Erklärung der Drehung der Polarisationsebene bei der Reflexion von einer magnetischen Eisenfläche zu geben versucht.[1] Kurz zusammengefasst lautet dieselbe: Durch die Magnetisirung wird das Eisen, ebenso wie die diamagnetischen Körper im magnetischen Felde circular doppelbrechend. Diese circulare Doppelbrechung ist beim Eisen, wie ja auch oben nachgewiesen wurde, sehr beträchtlich. Da die Intensität des von einem Körper reflectirten Lichtes vom Brechungsexponenten abhängt, so wird von magnetischem Eisen bei gleicher Incidenz rechtscirculares Licht mit anderer Intensität reflectirt als linkscirculares. Geradlinig polarisirtes Licht kann angesehen werden als bestehend aus gleichen Theilen von rechts- und linkscircularem. Hiervon ausgehend sucht nun FITZGERALD zu zeigen, dass geradlinig polarisirtes Licht, welches unter irgend einem Winkel auf eine magnetische Fläche fällt, durch die Reflexion in elliptisches verwandelt wird, bei welchem die grosse Axe der Ellipse gegen die Schwingungsrichtung des einfallenden Lichtes im Allgemeinen gedreht sein müsse. Bei normaler Incidenz auf den Pol eines Magneten jedoch wird, wie leicht ersichtlich, der Winkel zwischen der Schwingungsebene des einfallenden Lichtes und der grossen Axe der Ellipse des reflectirten, Null. Hr. FITZGERALD zieht daher selbst aus seiner Theorie nachstehende Folgerung: Fällt geradlinig polarisirtes Licht senkrecht auf die Polfläche eines nicht erregten Elektromagneten und wird dasselbe nach der Reflexion durch einen Nicol ausgelöscht, so muss bei der Erregung des Elektromagneten Helligkeit auftreten. Diese Helligkeit verschwindet bei keiner Drehung des analysirenden Nicols, sondern wächst bei jeder Drehung desselben nach der einen oder anderen Seite von der ursprünglichen Stellung aus.

[1] Proceedings Roy. Soc. 25. p. 447.

Digitized by Google

Hiermit stehen nun meine Versuche insofern in directem Widerspruch, als der analysirende Nicol stets nach Erregung des Elektromagneten durch einen bestimmten Winkel gedreht werden muss, um gute Auslöschung zu erhalten. Ob die Auslöschung selbst bei homogenem Licht absolut ist, also das reflectirte genau geradlinig polarisirt geblieben, oder ob eine ganz schwache Ellipticität eingetreten, lässt sich natürlich nicht entscheiden. — Jedenfalls ist durch die Versuche bei senkrechter Incidenz die Theorie FITZGERALD's widerlegt, und ist es daher nicht nöthig, auf die Zulässigkeit der derselben zu Grunde liegenden Annahmen einzugehen. In wie weit auf unseren Fall die Theorie VOIGT's über die Reflexion des Lichtes an circularpolarisirenden Medien anwendbar ist, mag dahingestellt bleiben.

6.

Drehung der Polarisationsebene bei schiefer Reflexion des Lichtes von den Seiten- und Polflächen eines Magneten.

Zu diesen Versuchen diente ein grosser Elektromagnet mit zwei aufrechtstehenden Eisenschenkeln. Dieselben haben eine Höhe von 47^{cm} und 11^{cm} Durchmesser. Auf jedem Schenkel befinden sich drei Rollen von 3^{mm} dickem Draht. Jede Rolle hat einen Widerstand von etwa 0.65 SE. Als Pole dienen zwei grosse parallelepipedische Eisenstücke. Der magnetisirende Strom wurde gleichfalls von der GRAMME-schen Maschine geliefert und hatte gewöhnlich eine Intensität von 16 Ampère. Da die Versuche im Winter angestellt wurden, mithin wenig auf Sonne zu rechnen war, wurde als Lichtquelle stets DRUMMOND-sches Kalklicht benutzt. Die Ablesungen des analysirenden Nicols wurden auf einem in Viertel-Grade getheilten Kreis gemacht, dessen Nonius vier Minuten angab. Es konnten indess zwei Minuten noch mit Sicherheit durch den Nonius geschätzt werden.

Der Einfallswinkel der Lichtstrahlen auf die reflectirenden Eisenflächen wurde auf einem getheilten Kreis sorgfältig ermittelt.

Die Polarisationsebene des polarisirenden Nicols wurde möglichst genau in die Einfallsebene oder senkrecht zu derselben gebracht. Als Criterium hierfür diente die gute Auslöschung des Lichtes durch den Analysator. Nach Erregung des Magnetismus gelang es im Allgemeinen nicht, durch Drehen des Analyseurs die auftretende Erhellung völlig wieder zu beseitigen, da das Licht nach der Reflexion nicht mehr geradlinig, sondern elliptisch polarisirt ist. Es ist immer auf das Minimum der Helligkeit eingestellt, also die Schwingungsebene

Digitized by Google

des analysirenden Nicols senkrecht zur grossen Axe der gedrehten elliptischen Strahlen gebracht.

Da der Betrag der Drehungen sehr gering, so mussten, um einigermaassen zuverlässige Resultate zu erhalten, die Beobachtungen vervielfältigt werden. Für jeden Einfallswinkel wurden im Allgemeinen vier Beobachtungen für jede der beiden Stellungen der Polarisationsebene des Polarisators — in und senkrecht zur Einfallsebene — angestellt.

Bei jeder der vier Beobachtungen wurde der Polarisator neu eingestellt und dann zehn Ablesungen bei jeder Stromrichtung gemacht. Es ist im Folgenden eine Drehung analog dem früheren positiv genannt, wenn dieselbe die gleiche Richtung hat wie die Projection der AMPÈRE-schen Molecularströme auf eine zum Lichtstrahl senkrechte Ebene.

Erste Versuchsreihe.

Benutzt wurde ein kreisrunder Stahlspiegel von den oben S. 764 angegebenen Dimensionen. Die eisernen Polstücke waren bis auf 29^{mm} einander genähert und in dieser Entfernung durch einen zwischen dieselben gelegten Klotz von Holz gehalten. Der Spiegel wurde seitlich an die Eisenstücke angelegt, so dass er jedes derselben auf 3^{mm} berührte. Der Magnet war also durch den Stahlspiegel geschlossen. Die reflectirende Fläche lag vertical. Der Einfallswinkel J ist der Winkel zwischen den einfallenden Strahlen und der Normale des Spiegels.

Die folgende Tabelle giebt die Versuche. Das Zeichen = bedeutet, dass die Polarisationsebene (lange Diagonale des Nicol) parallel, das Zeichen $\perp$, dass dieselben senkrecht zur Einfallsebene steht.

Der Betrag der Drehungen ist in Minuten angegeben. Da jede Zahl aus 80 Einzeleinstellungen resultirt, so konnten die Zehntel-Minuten noch angegeben werden, wenn auch der Fehler der Zahlen mehrere Zehntel-Minuten betragen kann.

J	=	$\perp$
19°0	− 4′.8	+ 2′.7
29°9	− 4′.5	+ 7′.3
39°5	− 6′.6	+ 7′.7
50°1	− 7′.7	+ 6′.9
61°3	− 8′.0	+ 7′.5
65°0	− 9′.4	+ 8′.7
70°0	− 7′.1	+ 8′.1
75°0	− 6′.0	+ 6′.8
80°3	—	+ 2′.6
82°0	− 4′.3	− 2′.3
85°2	− 3′.9	− 1′.9

Digitized by Google

Die Versuche bestätigen vollkommen die Angabe Kerr's, dass für die Stellung = die Richtung der Drehung für alle Incidenzen die gleiche, den Molecularströmen entgegengesetzte ist und für die Stellung ⊥ bei etwa 82° ein Zeichenwechsel der Drehung eintritt.

Auch liegt bei unseren Versuchen, wie Kerr es angiebt, das Maximum der Drehung bei 65°.

Zweite Versuchsreihe.

Eine ganz ähnliche Versuchsreihe wurde mit einem Stahlspiegel gleicher Grösse, dessen Oberfläche galvanoplastisch vernickelt war, angestellt. Es ergaben sich nachstehende Werthe:

Vernickelter Spiegel.

J	=	⊥
20°0	—	+ 0′.0
30°1	− 1′.7	+ 1′.8
40°0	− 2′.7	+ 1′.4
50°0	− 4′.7	+ 0′.3
61°5	− 4′.2	− 0′.7
65°3	− 3′.8	− 2′.2
75°0	− 1′.1	− 1′.9

Auch bei Nickel bleibt der Sinn der Drehung für = bei allen Incidenzen der gleiche, kehrt für Stellung ⊥ aber schon zwischen 50° und 60° um.

Der Betrag der Drehungen ist im Ganzen erheblich kleiner als bei Eisen. Es ist dies in Übereinstimmung mit dem, was oben S. 769 über das Verhältniss des Drehvermögens des Nickels zu dem des Eisens angegeben wurde.

Um zu erkennen, ob beim Erregen des Magneten merkliche Verschiebungen und Durchbiegungen des reflectirenden Spiegels eintreten, wurden, wie bereits oben bemerkt, die Spiegelbilder einer verticalen und einer horizontalen Millimeterscala mit Fernrohr beobachtet. Beim Schluss des Stromes trat jedesmal eine sehr kleine Verschiebung und auch eine kleine Durchbiegung des Spiegels ein. Letzteres konnte daraus geschlossen werden, dass die Millimeterstriche und Zahlen der Spiegelbilder etwas undeutlich wurden. Die Verschiebungen und Durchbiegungen waren aber sehr gering und die gleichen, mochte der Strom im einen oder andern Sinn den Magneten umkreisen. Dieselben können mithin auf die beobachteten Drehungen keinen merklichen Einfluss geübt haben. Ausser den mitgetheilten vollständigen Beobachtungsreihen wurden noch eine ganze Reihe Einzelbeobachtungen mit den

Digitized by Google

verschiedensten Spiegeln unter verschiedenen Bedingungen gemacht. Alle waren in völliger Übereinstimmung mit den Zahlen obiger Tabellen. Es mögen nur die folgenden angeführt werden.

Ein anderer, dem für die Versuchsreihe benutzten ähnlicher Stahlspiegel, gab bei 65.3 Einfallswinkel

=	⊥
− 8′.6	+ 9′.0.

Dieser Spiegel wurde sodann galvanoplastisch versilbert. Bei Schluss oder Umkehrung des Stromes zeigte sich nun keine Spur von Erhellung des Gesichtsfeldes mehr.

Sodann wurden die Polstücke des Magneten ganz zusammengeschoben und die Spiegel, welche untersucht werden sollten, an der Seite des Magneten, ohne denselben zu berühren, aufgestellt. Hierbei wurden Spiegel aus nicht magnetischem Spiegelmetall und platinirte Glasspiegel benutzt, welche galvanoplastisch mit einer dünnen Eisenschicht überzogen waren. Eine genaue Untersuchung derselben mit Scala und Fernrohr ergab auch nicht die geringste Verschiebung oder Durchbiegung beim Erregen des Magneten. Es wurde jedesmal eine Drehung beobachtet, wie sie nach obigen Tabellen zu erwarten stand. So gab z. B. ein mit Eisen überzogener Glasspiegel bei 65° Einfallswinkel, als sich die Eisenseite in etwa 2^{mm} Entfernung von der Seite des Magneten befand, die folgenden Drehungen:

=	⊥
− 8′.1	+ 13′.0.

Es war noch eine Drehung constatirbar, als der Spiegel 45^{mm} von der Seitenfläche des Elektromagneten entfernt war.

Auch über die Drehung bei schiefer Incidenz auf die Stirnseite eines Magneten habe ich eine Anzahl von Versuchen gemacht. Die Anordnung war dieselbe, wie bei KERR. Es wurde indess immer platinirtes Glas, welches mit Fe, Co oder Ni überzogen war, benutzt. Die Spiegel wurden vor dem einen ebenen Pol des Elektromagneten, ohne denselben zu berühren, befestigt, und dem Spiegel ein zugespitzter Pol (Submagnet bei KERR) genähert. — Fällt die Polarisationsebene mit der Einfallsebene zusammen, so ist für alle Incidenzen die Richtung der Drehung entgegengesetzt derjenigen des magnetisirenden Stromes, wenn man sich den reflectirten Lichtstrahl in die Verbindungslinie der Pole gedreht denkt. Ist die Polarisationsebene senkrecht zur Einfallsebene, so ist bis etwa 80° Incidenz die Drehung gleichfalls entgegengesetzt, von 80° bis 90° dagegen gleich gerichtet der Richtung des magnetisirenden Stromes. Diese Umkehr im Sinne der Drehung ist, wie bereits oben bemerkt wurde, Hrn. KERR entgangen. Da ich voll-

Digitized by Google

ständige Beobachtungsreihen an einem und demselben Spiegel über die Änderung der Drehung mit dem Einfallswinkel noch nicht anstellen konnte, so unterlasse ich es, hier überhaupt Zahlen anzugeben.

7.

Drehung der Polarisationsebene des Lichtes, welches eine Glasplatte zweimal durchläuft und an der Hinterfläche derselben reflectirt ist.

Die Erscheinungen der Reflexion des Lichtes an den Metallen, haben zu der Anschauung geführt, dass das Licht bei der Reflexion bis zu einer gewissen Tiefe in die Metalle eindringe.

Es liegt also die Vermuthung nahe, dass die Drehung der Polarisationsebene, welche das Licht bei der Reflexion von magnetischen Metallflächen erfährt, in der sehr dünnen Schicht, welche die Strahlen bei der Reflexion durchdringen, vor sich gehe. Eine Theorie der Drehung unter Annahme des Eindringens des Lichtes dürfte schwierig sein.

Man kann aber leicht eine Anordnung treffen, in welcher wenigstens im Groben ein analoger Gang der Strahlen stattfindet, wie bei der Reflexion an Metall unter der Annahme, dass das Licht eindringt.

Eine Glasplatte befinde sich in einem magnetischen Felde. Es fallen Lichtstrahlen unter irgend einer Incidenz auf dieselbe. Die Strahlen werden in das Glas gebrochen, durchsetzen die Platte, werden an der Hinterfläche reflectirt, und treten nach abermaligem Gang durch die Platte mit Brechung aus derselben aus. Ist der Betrag der elektromagnetischen Drehung der Strahlen im Glas gegeben, so kann mit Hülfe der Fresnel'schen Formeln für Reflexion und Brechung an isotropen Körpern die Gesammtdrehung berechnet werden, welche die Polarisationsebene in der Platte erfahren hat.

Wir betrachten folgenden Specialfall, welcher unsern obigen Versuchen über Drehung an den Seitenflächen eines Magneten analog ist.

Die Kraftlinien des magnetischen Feldes, in welchem sich die Glasplatte befindet, seien der Ebene der Platte parallel. Die Dicke der Platte sei d, die electromagnetische Drehung auf der Längeneinheit in Richtung der Kraftlinien sei ϕ. Die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes liege in der Einfallsebene und letztere sei den Kraftlinien parallel, dann ist, wenn für die Brechung an der Vorderfläche und die Reflexion an der Hinterfläche die Fresnel'schen Formeln angewandt werden, der Winkel γ, um welchen die Polarisationsebene nach dem Austritt aus der Platte gedreht ist, wenn i und r Einfalls- und Brech-

Digitized by Google

ungswinkel bezeichnen und die elektromagnetische Drehung in der Platte so klein sind, dass Bogen, Tangente und Sinus verwechselt werden können, gegeben durch

$$\operatorname{tg}\gamma = 2 \cdot \phi \cdot d \cdot \operatorname{tg} r \frac{\sin i \cdot \sin r}{\cos^2(i-r)}.$$

Da die gesammten Factoren von ϕ stets positiv sind, so hat γ für jeden Werth von i dasselbe Zeichen wie ϕ. Für $i = 0$ ist $\gamma = 0$.

Die Drehung der Polarisationsebene, welche die Glasplatte beim Erregen des magnetischen Feldes zeigt, variirt also wohl dem Betrage nach mit dem Einfallswinkel, erfolgt aber immer im gleichen Sinn, wie die elektromagnetische Drehung, welche die Strahlen in der Platte erfahren.

Steht dagegen die Polarisationsebene des Lichtes vor dem Eintritt in die Platte senkrecht zur Einfallsebene, gelten dieselben Bezeichnungen, und ist wieder die elektromagnetische Drehung klein, so ist die Drehung x, welche die Polarisationsebene beim Austritt aus der Platte erfahren hat, gegeben durch

$$\operatorname{tg} x = -2\,\phi \cdot d \cdot \operatorname{tg} r \frac{\sin i \sin r \cdot \cos(i-r)}{\cos(i+r)}.$$

So lange

$$i + r < 90, \text{ ist } x \text{ negativ;}$$

wenn

$$i + r > 90, \text{ ist } x \text{ positiv.}$$

Für $i + r = 90$, also beim Polarisationswinkel, ist $x = 90°$; in diesem Fall ist aber die Amplitüde des Lichtes Null.

Der vorstehend behandelte Fall wurde experimentell in folgender Weise untersucht. Die Pole des grossen Elektromagneten wurden bis auf etwa 3^{cm} einander genähert. Eine Glasplatte, deren Wände nicht genau parallel waren, so dass die an der Vorderfläche reflectirten Strahlen von den an der Hinterfläche zurückgeworfenen gut getrennt waren, wurde an die verticalen Seitenwände der Pole angelegt, so dass sie dieselben verband. Die Einfallsebene des Lichtes war horizontal. Die Einfallswinkel wurden an einem grösseren getheilten Kreis abgelesen.

Es ergaben sich bei Erregung des Elektromagneten bei den verschiedenen Einfallswinkeln für die an der Hinterfläche reflectirten Strahlen die nachstehenden (doppelten) Drehungen.

Die Zeichen $=$ und $\perp$ bedeuten wie oben, dass die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes parallel oder senkrecht zur Einfallsebene stand. Die Drehungen sind in Graden angegeben.

Digitized by Google

Einfallswinkel	Drehung
	=
50°.5	+ 0°.8
61°.3	+ 1°.6
70°.0	+ 2°.5
80°.4	+ 3°.4
	⊥
30°.7	− 0°.7
39°.5	− 1°.8
50°.5	− 4°.8
53°.8	− 27°.4
60°.4	+ 24°.1
61°.3	+ 12°.0
70°.0	+ 6°.2
80°.4	+ 4°.2

Der Polarisationswinkel des Glases ($i + r = 90°$) ergab sich zu 56°.4.

Eine ähnliche Versuchsreihe wurde angestellt, als die beiden Pole des Elektromagneten ganz an einander geschoben waren und die Glasplatte an die Seitenflächen des in sich geschlossenen Magneten angelegt wurde.

Der Verlauf der Drehungen war der gleiche wie oben. Es besteht also vollständige Analogie zwischen dem Verlauf der Erscheinungen an der Glasplatte und den früher gegebenen Beobachtungen der Reflexion an den Seitenflächen eines Magneten. Dort wie hier haben, wenn Einfallsebene und Polarisationsebene zusammenfallen, alle Drehungen das gleiche Zeichen; ist die Polarisationsebene senkrecht zur Einfallsebene, so wechselt bei den Metallen, wie beim Glas das Zeichen der Drehung, bei Glas beim Polarisationswinkel (56°.4), bei Eisen bei etwa 80°, bei Nickel bei etwa 60°.

Doch besteht der Unterschied, dass bei den magnetischen Metallen der Sinn der Drehung der umgekehrte ist von demjenigen bei Glas. Kann man nun auch nicht behaupten, dass durch diese Analogie bewiesen ist, dass das Licht bei der Reflexion an den Metallen bis zu einer gewissen Tiefe eindringt, und dass die Drehung in der dünnen Schicht erfolgt, welche die Strahlen bei der Reflexion durchdringen, so sind doch die verwickelten Erscheinungen der Drehung bei Reflexion an der Seite eines Magneten unter einen einfachen und einheitlichen Ausdruck gebracht. Darauf, dass das Licht bei der Drehung am Metall bei schiefer Incidenz nicht geradlinig bleibt, sondern elliptisch wird, ist schon oben hingewiesen.

Statt unsere Glasplatte an die Seitenfläche eines Magneten anzulegen, können wir dieselbe auch vor die Polfläche bringen, so dass

Digitized by Google

die Kraftlinien senkrecht zu ihr sind. Der Betrag der Drehung der Polarisationsebene bei Erregung des Magneten als Function des Einfallswinkels und Lage der Polarisationsebene berechnet sich mit Hülfe der FRESNEL'schen Formeln ebenso wie oben. Es ergiebt sich, dass wenn die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes in der Einfallsebene liegt, die Drehung stets das gleiche und zwar positive Zeichen hat, wenn die Polarisationsebene senkrecht zur Einfallsebene steht, so ist von Null bis zum Polarisationswinkel die Drehung positiv, von Letzterem bis zu 90° negativ.

Es ist der Verlauf also gleichfalls analog demjenigen der Drehungen an der Polfläche eines Magneten mit dem Unterschied, dass man dem Magneten ein negatives Drehvermögen zuschreiben muss.

8.

Im Vorstehenden habe ich eine Übersicht über die elektromagnetische Drehung des Eisens, Cobalts und Nickels beim Durchgang und bei der Reflexion des Lichtes gegeben. Eine genauere Untersuchung über die Rotationsdispersion, über die Abhängigkeit der Drehung von der Dicke der Schichten bei der Reflexion u. s. f. muss für später vorbehalten bleiben. Andere Fragen, wie die, ob die Drehung mit dem inducirten magnetischen Moment ein Maximum erreicht, ob es möglich ist, eine Drehung durch die dünnen Metallschichten nachzuweisen, wenn dieselben nicht temporär sondern permanent magnetisirt sind u. s. w., schliessen sich von selbst an.

Ich möchte hier zum Schluss nur noch die nunmehr bekannten Thatsachen über die elektromagnetische Drehung der Polarisationsebene zusammen stellen.

Es soll, wie gebräuchlich, eine Drehung im Sinn der hypothetischen AMPÈRE'schen Molecularströme, welche an der gegebenen Stelle das thatsächlich vorhandene magnetische Feld vertreten, als positive, eine entgegengesetzte als negative bezeichnet werden.

1. Die meisten isotropen festen Körper, Flüssigkeiten und die bisher untersuchten Gase drehen die Polarisationsebene im positiven Sinn.
2. Stark concentrirte Eisenchloridlösung dreht negativ. Die negative Drehung anderer magnetischer Salze giebt sich zu erkennen durch Verminderung der positiven Drehung des Lösungsmittels.
3. Sauerstoff, welcher verhältnissmässig stark magnetisch ist, dreht, wie von Hrn. RÖNTGEN und mir nachgewiesen wurde, positiv.

Digitized by Google

4. Die Polarisationsebene von Licht, welches durch Eisen, Cobalt und Nickel hindurchgeht, wird positiv gedreht.
5. Bei senkrechter Reflexion von einem Magnetpol tritt nach KERR negative Drehung auf. Das gleiche ist oben für Cobalt und Nickel nachgewiesen.
6. Beim Durchgang, wie bei der Reflexion von Eisen ist die Rotationsdispersion anomal, d. h. rothe Strahlen werden stärker gedreht als blaue.
7. Die complicirten Erscheinungen bei schiefer Reflexion von der Polfläche oder den Seitenflächen eines Magneten lassen sich, wie oben gezeigt worden, in der Weise zusammenfassen, dass man annimmt, das Licht durchlaufe bei der Reflexion eine dünne Schicht des Metalls, und es finde in dieser Schicht negative Drehung statt.

Digitized by Google

36. Über den Einfluss der Zusammensetzung des Glases auf die Nachwirkungs-Erscheinungen bei Thermometern.

Von H. F. Wiebe,
ständigem technischen Hülfsarbeiter der Kaiserlichen Normal-Aichungs-Commission zu Berlin.

(Vorgelegt von Hrn. Auwers am 17. Juli; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXXVI]; — ausgegeben am 24. Juli.)

In dem Sitzungsberichte vom 13. December 1883 von S. 1233 ab hat Hr. Prof. Dr. Rudolph Weber einen werthvollen Beitrag zur Beurtheilung des Einflusses der Zusammensetzung des Glases auf die Depressions-Erscheinungen der Thermometer gegeben.

Im Anschluss an diese Mittheilungen bin ich von dem Director der Kaiserlichen Normal-Aichungs-Commission, Hrn. Prof. Dr. Foerster, beauftragt, der Akademie der Wissenschaften einige einschlagende Ergebnisse vorzulegen, welche bei den thermometrischen Arbeiten der genannten Behörde, im Zusammenwirken mit den HH. Prof. Dr. Abbe und Dr. Schott zu Jena, in den letzten Jahren erlangt worden sind.

Diese Ergebnisse sind geeignet, die Schlussfolgerungen des Hrn. Prof. Weber einerseits zu bestätigen, andererseits in solcher Weise zu vervollständigen, dass eine baldige Veröffentlichung derselben zweckmässig erschien, obwohl sie einer grösseren, noch nicht abgeschlossenen Reihe von Untersuchungen angehören.

Hinsichtlich der Erscheinungen, um die es sich handelt, darf wohl auf die ausführlichen Darlegungen hingewiesen werden, welche von Hrn. Dr. Pernet in Carl's Repertorium der physicalischen Technik Band XI S. 308 ff., sodann in dem ersten Bande der *Mémoires et travaux du Bureau International des Poids et Mesures*, endlich in der Abhandlung des Hrn. Dr. Thiesen in Nr. 3 der von der Normal-Aichungs-Commission herausgegebenen Metronomischen Beiträge enthalten sind.

Allem Anscheine nach bestehen die fraglichen Vorgänge darin, dass von den bei jeder Erwärmung eines Thermometers eintretenden Vergrösserungen des Quecksilberbehälters auch nach dem Aufhören der betreffenden Erwärmung ein Theil während einer gewissen Zeit bestehen bleibt, wodurch der Eispunkt deprimirt erscheint, und dass sodann diese Rückstände der Ausdehnungswirkungen allmählich ver-

Digitized by Google

schwinden, wodurch eine langsame Ausgleichung jener Depression des Eispunktes, also ein Ansteigen desselben bedingt wird.

Eine besondere Complication dieser Erscheinungen tritt nun dadurch ein, dass dieselben in der Regel die Resultanten der Nachwirkungen einer gewissen Reihe vorhergegangener Erwärmungen von verschiedenem Grade und verschiedener Dauer sind.

Insbesondere compliciren sich diejenigen anhaltenden Ansteigungen des Eispunktes, welche eine Folge des allmählichen Verschwindens der von der hohen Anfertigungstemperatur eines Thermometers noch herrührenden Rückstände der Ausdehnung des Fassungsraumes sind, mit denjenigen Depressionen oder denjenigen Ansteigungen des Eispunktes, welche sich beziehungsweise als eine sofortige Folge oder als eine nachherige langsame Ausgleichung der Rückstände derjenigen Ausdehnungen des Gefässes erklären, die durch alle anderen Erwärmungen des Thermometers, längere oder kürzere Zeit vor dem jeweiligen Beobachtungszustande, verursacht sind.

Bekanntlich kann durch solche Superpositionen in Verbindung mit der Erscheinung, dass andauernde Erwärmungen zugleich das Verschwinden von Nachwirkungen früheren Ursprungs begünstigen, der gewöhnliche Verlauf der Eispunktsbewegungen sogar ganz wesentlich abgeändert werden. Zumal bei einem jungen Thermometer kann durch anhaltendes Sieden das Verschwinden der von der Anfertigungstemperatur herrührenden Ausdehnungsrückstände so beschleunigt werden, dass das dadurch bedingte Ansteigen des Eispunktes diejenige Depression des letzteren, welche sonst durch die Nachwirkungen der Siedetemperatur selber verursacht wird, in genügendem Maasse ausgleicht, um das Thermometer von der gewöhnlichen, durch das Sieden hervorgebrachten Depression des Eispunktes fast vollkommen frei erscheinen zu lassen. Wenn dann dasselbe Thermometer älter geworden oder durch wiederholte anhaltende Erwärmungen, verbunden mit sehr langsamen Abkühlungen, älter gemacht worden ist, so dass auch die durch das Sieden hervorgerufene Beschleunigung des Verschwindens der von der Anfertigungstemperatur herrührenden Nachwirkungen einen bedeutend geringern Betrag annimmt, tritt die jedesmalige Depressionswirkung des Siedens stärker und stärker hervor.

Für Vorgänge dieser Art, welche besondere Sorgfalt bei der Untersuchung der Depressionsconstanten neu angefertigter Thermometer verlangen, liegen bei der Normal-Aichungs-Commission und anderweitig zahlreiche Beispiele vor. Obwohl Hr. Prof. Weber nicht angegeben hat, ob und in welcher Weise dieser Gesichtspunkt bei seinen Depressionsuntersuchungen neuer Thermometer Beachtung gefunden

Digitized by Google

hat, ist diess bei seiner Erfahrung auf dem in Rede stehenden Gebiete wohl zu erwarten. (Bei dieser Gelegenheit darf wohl erwähnt werden, dass ein Theil der von Hrn. Prof. WEBER mitgetheilten Untersuchungen, nämlich die ersten bis zum Jahre 1879 reichenden Untersuchungen an den Thermometern Nr. 1, 2 und 13 von ihm unter Mitwirkung mehrerer Beamten der Normal-Aichungs-Commission mit den Mitteln und Einrichtungen dieser Behörde ausgeführt worden sind.)

Aus dem vorstehend erörterten Sachverhalte ergibt sich auch, dass die Verschiedenheiten des Verlaufes des fortschreitenden Ansteigens der Eispunkte in mehrjährigen Zeiträumen bei weitem keine so charakteristischen Merkmale für die bezüglichen Eigenschaften gewisser Thermometer und Glassorten abgeben können, als die mit gehöriger Vorsicht beobachteten sogenannten Depressionsconstanten, nämlich die Maximaldepressionen, welche nach anhaltender Erwärmung bis auf die Siedetemperatur jedesmal aufs Neue eintreten.

Die Höhe der Anfertigungstemperatur eines Thermometers und die Art seiner Behandlung bei der Anfertigung beeinflusst auch jedenfalls den Betrag und den Verlauf der bezüglichen Ansteigungen in erheblicher Weise. Ausserdem werden, nach manchen vorliegenden Erfahrungen bei der gewöhnlichen deutschen Einrichtung der Thermometer, Unregelmässigkeiten in dem Ansteigen der Eispunkte von Jahr zu Jahr mitunter auch dadurch verursacht, dass die von der Thermometerröhre getrennte Scale gegen den eigentlichen Behälter kleine Verschiebungen erfährt, welche nur dadurch ausgeschlossen oder unschädlich gemacht werden können, dass auf den Capillaren selbst mindestens Controlmarken angebracht werden, mittels deren man sich der unveränderten Stellung der Scale zu dem Gefässe und der Röhre jedesmal versichert oder die erforderlichen Daten zur numerischen Berücksichtigung kleiner Veränderungen dieser Art gewinnt.

Von solchen Unsicherheiten kann man die Bestimmungen der sogenannten Depressionsconstante bei jeweiligen vorübergehenden Erwärmungen auf 100° vollständig frei halten.

Aus Nr. 3 der von der Normal-Aichungs-Commission herausgegebenen »Metronomischen Beiträge« ist näher zu ersehen, mit welchen Schwierigkeiten und Umständlichkeiten die Temperaturbestimmung mit Anwendung solcher Thermometer behaftet ist, bei denen eine Erwärmung auf 100° vorübergehende Depressionen des Eispunktes von solchen Beträgen hervorruft, wie sie in den letzten Jahrzehnten, insbesondere bei den deutschen Thermometern, immer allgemeiner hervorgetreten waren.

Digitized by Google

Nach Dr. Pernet's Untersuchungen, welche auch in zahlreichen Fällen bei den thermometrischen Arbeiten der Normal-Aichungs-Commission bestätigt worden sind, kann man näherungsweise annehmen, dass, wenn eine Erwärmung auf 100° eine Maximaldepression des Eispunktes eines Thermometers gleich δ hervorruft, Temperaturen (t) zwischen Null und etwa + 50°, wie sie bei Maass- und Gewichtsuntersuchungen im allgemeinen vorkommen, noch ziemlich andauernde Eispunktsdepressionen verursachen, deren Betrag durch $\delta\left(\frac{t}{100}\right)^2$ ausgedrückt wird.

Wenn also δ über 0°50 beträgt, werden schon Erwärmungen des Thermometers auf 25° Eispunktsdepressionen von mehr als 0°03 verursachen können. Hierdurch aber wird die Temperaturmessung in fast unerträglicher Weise complicirt.

Die Normal-Aichungs-Commission hatte daher, da bei den neueren Thermometern Depressionsconstanten von erheblich mehr als 0°50 häufig vorkamen, schon seit etwa zehn Jahren allen Anlass, den Ursachen dieser Erscheinung aufs Eingehendste nachzuforschen.

Erst in den letzten Jahren ist es aber im Zusammenwirken mit den HH. Prof. Abbe und Dr. Schott in Jena gelungen, Glassorten zu componiren, welche bei einer sonst für thermometrische Verwendung geeigneten Beschaffenheit alle Sicherheit geben, dass die in Rede stehenden Nachwirkungen nunmehr innerhalb so enger Grenzen bleiben werden, dass fortan das Quecksilber-Glasthermometer ohne zu grosse Mühewaltungen Temperaturangaben mit der Genauigkeit von einem Hundertel des Centigrades wirklich zu liefern im Stande sein wird.

Die Untersuchungen, welche Hr. Prof. Weber bereits früher, zum Theil in Gemeinschaft mit der Normal-Aichungs-Commission, ausgeführt hat, haben zu dieser Entwickelung der Dinge jedenfalls auch sehr dankenswerthe Beiträge geliefert.

Zunächst wurde in Jena das Glas des Gefässes von sieben der Normal-Aichungs-Commission gehörigen Thermometern näher untersucht, bei denen die Nachwirkungserscheinungen durch umfassende Beobachtungsreihen in vollständigster Weise ermittelt waren.

Die sehr genau bekannten Depressionsconstanten dieser sieben Thermometer zeigten Werthe, die zwischen 0°06 und 0°65 lagen. Die folgende Tafel lässt die Beziehungen zwischen dem Werthe der Depressionsconstante und der Zusammensetzung des bezüglichen Glases erkennen:

Digitized by Google

	Thermometer von BESSEL für HUMBOLDT kalibrirt Nr. 2	Thermometer von J. G. GREINER jr. 1848 F_1	Thermometer von J. G. GREINER jr. 1856 F_2	Thermometer von J. G. GREINER jr. 1872 F_3	Thermometer von CH. F. GEISSLER 1875 Nr. 13	Thermometer von G. A. SCHULTZE 1875 Nr. 3	Thermometer von RAPP Nachf. 1878 F_4
Kieselsäure . .	64.45	64.66	64.49	68.62	69.58	66.53	66.74
Eisenoxyd . .	0.81	0.53	0.61	0.53	0.46	0.43	0.30
Thonerde . . .		0.24	0.42	2.37	2.09	2.18	0.21
Kalk	12.36	13.38	11.56	7.36	7.90	9.44	8.68
Magnesia . . .	0.22	0.27	0.38	0.36	0.30	0.21	0.22
Manganoxyd .	Spur	Spur	0.77	0.34	Spur	Spur	0.08
Arsensäure . .	0.89	0.87	0.35	Spur	0.27	0.74	Spur
Kali	20.09	18.89	17.14	3.56	3.97	3.95	10.57
Natron	0.86	1.48	3.75	16.89	15.35	16.15	12.72
Summe	99.68	100.32	99.47	100.03	99.92	99.63	99.52
Depression für 100°	0°06	0°15	0°38	0°38	0°40	0°44	0°65
$\frac{\text{Natron}}{\text{Kali}} =$	0.04	0.08	0,22	—	—	—	—
$\frac{\text{Kali}}{\text{Natron}} =$	—	—	—	0.21	0.26	0.24	0.83

Die Analyse des Glases englischer Normal-Thermometer (sogenannten Krystallglases) hat dagegen Folgendes ergeben:

Kieselsäure	49.49
Bleioxyd	33.90
Thonerde und Eisenoxyd	0.35
Manganoxyd	0.13
Kalk	1.20
Magnesia	0.67
Kali	12.26
Natron	1.54
Summe	99.54
Depression für 100°	0°15
$\frac{\text{Natron}}{\text{Kali}}$	0.13

Obige Zusammenstellung zeigt, dass die Depression den grössten Betrag bei demjenigen Glase hat, in welchem Natron und Kali in nahezu gleichem Procentbetrage enthalten sind, fast identische Beträge bei denjenigen Gläsern, bei denen das Verhältniss Kali zu Natron oder Natron zu Kali nahe identische Beträge hat, endlich den geringsten Betrag bei demjenigen Glase, in welchem neben einem starken Kaligehalte nur ein minimaler Natrongehalt vorhanden ist, nahe übereinstimmend mit den von Hrn. Prof. WEBER aus seinen Erfahrungen gezogenen Schlussfolgerungen.

Da jedoch die vorstehenden Ergebnisse in Folge der in denselben hervortretenden Verschiedenheiten der Procentsätze der übrigen

Digitized by Google

Bestandtheile des Glases noch eine gewisse Unbestimmtheit enthalten, wurde nunmehr auf Veranlassung der Normal-Aichungs-Commission in dem unter Leitung von HH. Prof. Abbe und Dr. Schott stehenden glastechnischen Laboratorium zu Jena eine grössere Anzahl Glassorten von verschiedener Zusammensetzung angefertigt, bei deren Herstellung man nur gewisse Componenten erheblicher variirte und die anderen möglichst unverändert liess, um den Einfluss der einzelnen Componenten und ihrer Combinationen mit grösserer Sicherheit beobachten zu können.

Weiterhin versuchte man in Jena mit günstigem Erfolge, statt nur die in der Glastechnik gebräuchlichen Glasarten zu analysiren und nachzubilden, neue Elemente und wesentlich verschiedene Compositionen der Verwendung des Glases zu Thermometern dienstbar zu machen. Nähere Mittheilungen hierüber bleiben vorbehalten.

Bisher sind etwa zwanzig solcher Glassorten angefertigt, sodann im Auftrage der Normal-Aichungs-Commission von dem hiesigen Mechaniker Hrn. Fuess zu Thermometern verarbeitet und bei der Commission auf thermische Nachwirkung untersucht worden.

Von den Ergebnissen dieser mit aller Vorsicht ausgeführten Arbeiten, die nach vielen Richtungen hin noch der Ergänzung bedürfen, aber schon jetzt erhebliche Fingerzeige dargeboten haben, soll einstweilen zur Vervollständigung und schärferen Präcisirung der Weber'schen Schlussfolgerungen nur Folgendes mitgetheilt werden.

Um den gesonderten Einfluss von Kali und Natron auf die Nachwirkungs-Erscheinungen noch deutlicher zu machen, dienten drei Glassorten, deren Zusammensetzung, auf synthetischem Wege erhalten, aus folgendem Täfelchen erhellt:

Glas Nr. IV	Glas Nr. VIII	Glas Nr. XXII
Kali 13.5	Natron . . . 15	Kali 14
Natron . . . 0.0	Kali 0	Natron . . . 14
Kalk 16.5	Kalk 15	Kalk 6
Kieselsäure 70.0	Kieselsäure 70	Kieselsäure 66

Für die Depressionsconstanten der aus diesen Glassorten angefertigten Thermometer wurden folgende Beträge gefunden:

Glas	Depression für 100°
Nr. IV . .	0°.07
Nr. VIII .	0.07
Nr. XXII.	0.84

Digitized by Google

Hieraus geht besonders deutlich hervor, dass, wie die WEBER'schen und die vorstehend aufgeführten Untersuchungen von sieben älteren Thermometern bereits wahrscheinlich machten, eine wesentliche Ursache der Nachwirkungs-Erscheinungen in einem gewissen Gleichmaass der Betheiligung von Natron und Kali an der Zusammensetzung des Glases und in einer dadurch bedingten Art von Labilität zu suchen ist, dass dagegen eine hinreichende Einschränkung der Nachwirkungen nicht blos durch Weglassung von Natron bei erheblichem Kaligehalt, wie Hr. Prof. WEBER gefolgert hat, sondern auch durch Weglassung von Kali bei erheblichem Natrongehalt erreicht werden kann, denn die beiden Gläser Nr. IV und Nr. VIII würden selbst für die feinsten thermometrischen Arbeiten als ausreichend sicher zu erachten sein, während der Glastypus Nr. XXII, sowie der von F_4 der vorhergehenden Zusammenstellung in Zukunft für thermische Zwecke total zu verwerfen sein wird.

Obige Folgerungen bezüglich der reinen Kali- und der reinen Natrongläser werden indessen durch im Gange befindliche weitere Untersuchungen über alle Seiten der Frage noch eingehender zu prüfen sein.

Digitized by Google

Digitized by Google

37. Über die essigsauren Doppelsalze des Urans.

Von C. Rammelsberg.

(Vorgetragen am 24. Juli; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXXVIII]; — ausgegeben am 31. Juli.)

Hierzu Taf. III.

Das essigsaure Uran (Uranyl) bildet mit anderen Acetaten eine Reihe ausgezeichneter Doppelsalze, von denen das durch seine tetraedrische Form und Schwerlöslichkeit leicht kenntliche Natronsalz schon vor langer Zeit von Duflos entdeckt wurde. Später haben sich Wertheim[1] und Weselsky[2] mit der Untersuchung dieser Salze beschäftigt, und auch ich habe einige beschrieben.[3]

Wertheim beschrieb das Ammoniak-, Kali-, Natron-, Silber-, Baryt-, Magnesia-, Zink- und Bleisalz, aber nur vom Silbersalz theilte er eine Messung der Krystalle mit. Weselsky untersuchte die Salze von Strontian, Kalk, Magnesia, Mangan, Zink, Nickel, Kobalt und Kadmium, und Grailich[4] bestimmte Form und optisches Verhalten derselben.

Man dürfte hiernach erwarten, dass diese Salzreihe nach Form und Zusammensetzung wohlbekannt wäre, allein bei Zusammenstellung der Thatsachen gelegentlich der Ausarbeitung meines Handbuchs der krystallographisch-physikalischen Chemie stiess ich auf mehrfache Widersprüche in den Angaben, welche mich zu einem erneuten Studium jener Salze veranlassten, und die Resultate dieser krystallographischen und chemischen Untersuchungen sind es, welche ich heute der Akademie vorlege.

Hierbei hat sich ergeben, dass ein und dasselbe Metall, z. B. Magnesium, zwei im Wassergehalt verschiedene Salze bildet, ja dass ein Metall, z. B. Mangan, zwei in ihrer Zusammensetzung und im Wassergehalt verschiedene Verbindungen liefern kann. Hierin liegt der Schlüssel zu gewissen seltsamen Irrthümern, welche bisher unbeachtet geblieben sind.

[1] J. f. pr. Chem. 29, 207 (1843).
[2] Ebend. 75, 55 (1858).
[3] Pogg. Ann. 145, 158 (1872).
[4] Kryst.-opt. Untersuchungen. Wien 1858. Sowie: Grailich und Lang Unters. über d. phys. Verh. kryst. Körper. Wien 1858.

Digitized by Google

So hatte Weselsky ein Magnesiasalz untersucht, in welchm 1 At. Mg gegen 2 At. U und 12 Mol. Wasser enthalten sind. Grailich bestimmte die Form der ihm von Jenem übergebenen Krystalle, allein diese Krystalle gehörten gar nicht jenem Salze, sondern einem Hydrat mit 7 Mol. Wasser an, welches bisweilen gleichzeitig mit dem ersten anschiesst, was aber Weselsky übersehen hatte.

Ganz ähnlich liegen die Verhältnisse bei den Salzen des Mangans. Das was Weselsky analysirt hat, enthielt 1 At. Mn gegen 2 At. U und 12 Mol. Wasser, allein die angeblichen Krystalle dieses Salzes, welche der Genannte an Grailich übergab, sind ganz anders zusammengesetzt, denn sie enthalten nur 1 At. U und 6 Mol. Wasser, und von diesen ist wiederum keine Analyse gemacht worden.

Ebenso irrthümlich ist die Behauptung Weselsky's, das Kadmiumsalz sei isomorph dem Magnesiumsalze.

Ich bin sehr geneigt zu glauben, dass ähnliche Irrthümer mehrfach vorgekommen sind und so lange vorkommen werden, als die Chemiker nicht im Stande sind, die wichtigsten physikalischen Eigenschaften der Körper, Form und optisches Verhalten, selbst zu bestimmen.

Essigsaures Uranyl-Natron.

Dieses am längsten bekannte Salz der Reihe, von Duflos zuerst dargestellt, ist durch seine Form, Schwerlöslichkeit und Mangel an Krystallwasser ausgezeichnet.

Wertheim benutzte es zur Feststellung des Uranatoms, welches er = 239.1 bestimmte.

Die Analysen des Genannten haben die Formel

$$NaC^2H^3O^2 + UO^2 . C^4H^6O^4$$

ergeben.

	Berechnet		Gefunden im Mittel
Na =	23 =	4.88	4.77
U =	240 =	50.85	50.37
2O =	32 =	6.77	—
$3C^2H^3O^2$ =	177 =	37.50	37.19
	472	100	

Es krystallisirt bekanntlich regulär, mit tetraedrischer Hemiedrie, und bildet Tetraeder, deren Ecken durch das Granatoeder dreiflächig zugespitzt sind.

Beim Glühen bleibt uransaures Natron, $Na^2U^2O^7$, zurück, berechnet 67.54 Procent, während Wertheim im Mittel dreier Versuche 67.523 fand.

Digitized by Google

Essigsaures Uranyl-Ammoniak.

Aus der gemeinsamen Lösung der beiden Acetate im Verhältniss gleicher Mol. erhält man gelbe Krystallanschüsse, welche lange, äusserst dünne Prismen, später aber kurz prismatische durchsichtige Krystalle darstellen.

1. Von einem ersten Anschuss wurden 2.172 mit Natronlauge der Destillation unterworfen, und das Ammoniak in verdünnte Chlorwasserstoffsäure geleitet. Das nach Zusatz von Platinchlorid und Eindampfen bleibende, mit Äther-Alkohol gewaschene Salz hinterliess 0.443 Pt = 0.01818 NH^4.

2.358 desselben Salzes gaben beim Glühen 1.42 U^3O^8 = 1.20566 U.

2. 2.92 gaben in gleicher Weise 1.755 U^3O^8, nachdem sie bei 175° 0.016 hygroskopisches Wasser, = 0.55 Procent, verloren hatten.

3. 2.119 eines ersten Anschusses in einer neuen Darstellung lieferten 1.274 U^3O^8.

4. Vom dritten Anschuss derselben Darstellung wurden 2.138 wie unter I. behandelt. Es resultirten 0.442 Pt = 0.081814 NH^4.

1.47 gaben 0.882 U^3O^8.

5. 3.09 dieses Salzes verloren bei 150° 0.012 = 0.39 Procent hygroskopischen Wassers und lieferten 1.862 U^3O^8.

	Gefunden				
	1	2	3	4	5
NH^4	3.77	—	—	3.83	—
U	51.13	51.31	51.04	50.95	51.36.

Aus diesen Versuchen folgt, dass das Salz des ersten und letzten Anschusses identisch, dass sie wasserfrei sind, und je 1 At. Ammonium und Uran enthalten.

$$NH^4.C^2H^3O^2 + UO^2.C^4H^6O^4$$

NH^4 =	18 =	3.85
U =	240 =	51.39
2O =	32 =	6.85
$3C^2H^3O^2$ =	177 =	37.91
	467	100

Ein Hydrat mit aq würde 3.71 H^2O und nur 49.48 U voraussetzen.

Die Krystalle eines dritten (letzten) Anschusses (Anal. Nr. 4 und 5) habe ich genau bestimmen können. Es sind viergliedrige Combinationen eines quadratischen Prismas p, auf dessen Flächen zwei Quadratoktaeder, o und o^3 aufgesetzt sind, während ein Oktaeder zweiter Ordnung $d\frac{3}{2}$ durch seine Zonenlage gegen die *o* und o^3 bestimmt ist; Fig. 1.

Digitized by Google

Auch glückte es, an einigen Krystallen der ersten Anschüsse durch ungefähre Messungen ihre Identität mit jenen festzustellen.

Dieselben Krystalle hat GRAILICH[1] offenbar unter Händen gehabt, wiewohl er blos o^3 und p beobachtete und ihm eine Formel zuschreibt, in welcher 5 Mol. Wasser enthalten sind.

Wenn man das stumpfere jener beiden o als Grundform betrachtet, hat man

$$o = a : a : c$$
$$o^3 = a : a : 3c$$
$$d^3/_2 = a : {}^3/_2 c : \infty a$$
$$p = a : a : \infty c$$

		Berechnet	Beobachtet Rg.	Beobachtet Grailich
o	2A =	133° 50′		
	2C =	67 20		
o^3	2A =	101 34	101° 30′	
	2C =	126 50		
$d^3/_2$	2A =	131 52		
	2C =	70 28		
o : p =		123 40	123 10	
o^3 : p =			*153 20	154° 20′
o : o^3 =		150 15	149 40	
$d^3/_2$: p =		102 55		
a : c =		1 : 0.4708.		

Sehr häufig herrscht eine Prismenfläche vor, wodurch u. a. die dünnen flachen Prismen entstehen. GRAILICH beobachtete eine starke horizontale Streifung auf o^3 und p und wies die Fluorescenz an den Krystallen nach.

Schon WERTHEIM beschrieb ein Salz in seidenglänzenden Nadeln aus der syrupdicken Lösung anschiessend. Allein er fand, dass dasselbe 10 Procent Wasser enthält. Leider hat er das Ammonium nicht bestimmt, doch führen seine Zahlen zu der Formel

$$(NH^4.C^2H^3O^2 + UO^2.C^4H^6O^4) + 3aq.$$

	Berechnet		Gefunden	
NH^4 =	18 =	3.46		
U =	240 =	46.07	45.96	46.00
2O =	32 =	6.14		
$3C^2H^3O^2$ =	177 =	33.97	34.49	
$3H^2O$ =	54 =	10.36	10.08	10.76
	521	100		

[1] Kryst. opt. Unters. S. 157.

[2] An Krystallen des ersten Anschusses ungefähr 101°.

Digitized by Google

Das Wasser ging bei 100° fort. Sowohl die Formel als auch die Berechnung sind bei WERTHEIM fehlerhaft.

Essigsaures Uranyl-Kali.

Es wurde theils direct aus beiden Acetaten, theils dadurch erhalten, dass Uranylnitrat mit Kali gefällt und der Niederschlag in Essigsäure gelöst wurde.

Die kleinen gelben Krystalle sind bereits von WERTHEIM untersucht worden, dessen Angaben die eigenen Versuche bestätigen. Ihre Lösung zersetzt sich beim Kochen unter Abscheidung von uransaurem Kali.

1. 2.903 hinterliessen nach dem Glühen einen rothen Rückstand von uransaurem Kali, welcher mit Chlorammon in Wasserstoff erhitzt wurde. Durch Behandeln mit Wasser wurden 0.426 KCl und 1 627 an der Luft geglühtes U^3O^8 erhalten.

2. 2.827 gaben in gleicher Weise 0.423 KCl und 1.588 U^3O^8.

3. 2.216 verloren bei 250° 0.062.

			WERTHEIM	
	1	2, 3	1	2
Kalium	7.68	7.83	7.61	7.69
Uran	47.58	47.87	47.42	47.06
Wasser		2.80	3.74	

Die Formel

$$(KC^2H^3O^2 + UO^2C^4H^6O^4) + aq$$

erfordert

K	39 =	7.70
U	240	47.43
2O	32	6.31
$3C^2H^3O^2$	177	35.00
H^2O	18	3.56
	506	100

Die Menge des Glührückstandes $K^2U^2O^7$ muss 66.2 Procent betragen. Ich erhielt 67.07.

Die Krystalle sind immer nur klein, aber vollkommen durchsichtig. Sie wurden von WERTHEIM und von SCHABUS[1] als viergliedrig erkannt. Die von mir beobachteten waren Combinationen des Prismas p mit dem Hauptoktaeder o, und zwei Oktaedern zweiter

[1] Bestimmung der Krystallgestalten etc. S. 25.

Digitized by Google

Ordnung, dem ersten stumpferen d, und dem zweifach stumpferen desselben $\frac{d}{2}$. Schabus fand auch das zweifach stumpfere des Hauptoktaeders $\frac{o}{2}$. Fig. 2.

$$o = a : a : c$$
$$\frac{o}{2} = a : a : {}^1/_2 c$$
$$d = a : c : \infty a$$
$$\frac{d}{2} = 2a : c : \infty a$$
$$p = a : a : \infty c$$

	Berechnet	Schabus	Beobachtet Wertheim	Ro.
o	2A = 103° 28′	103° 28′		
	2C = 122 16	122 17		
$\frac{o}{2}$	2A = 123 16			
	2C = 84 26			
d	2A = 104 8			
	2C = 112 12			
$\frac{d}{2}$	2A = 135 6			
	2C = 65 22			
p : o =		*151° 8′	151° 8′	151° 0′
$p : \frac{o}{2}$ =	132 13			
$o : \frac{o}{2}$ =	161 5	161 4.5		
d : o =	141 44			
d : p =	128 16			
$\frac{d}{2} : \frac{o}{2}$ =	151 38			
$\frac{d}{2}$: p =	118 22			

$$a : c = 1 : 1.283.$$

Die Oktaederflächen sind glatt, die Prismenflächen horizontal gestreift und meist etwas gekrümmt. Die Flächen d sind selten und nur als schmale Abstumpfung der Endkanten von o vorhanden.

Die Krystalle sind spaltbar nach dem Prisma.

Essigsaures Uranyl-Silber.

Dieses Doppelsalz wurde von Wertheim untersucht, welcher dasselbe in grünlichen viergliedrigen Krystallen erhielt, welche durch

Digitized by Google

Erhitzen mit Wasser unter Abscheidung von braunem uransaurem Silber zersetzt werden, in kaltem Wasser aber mit gelber Farbe leicht löslich sind. Bei 100° erleiden sie keinen Gewichtsverlust, später gehen 3.2 Procent Wasser fort, allein noch bei 275° ist das Salz unzersetzt, nur bräunlich gefärbt. Er fand in sechs Versuchen 18.16 bis 18.82 Procent Silber.

Meine eigenen Erfahrungen weichen hiervon nur insoweit ab, als ich die reinen Krystalle von gelber Farbe erhielt, und bei 265° schon eine anfangende Zersetzung bemerkte, in Folge davon das graugefärbte Salz nicht mehr vollständig löslich war.

WERTHEIM's Analysen haben die Formel

$$(Ag\,C^2H^3O^2 + UO^2.\,C^4H^6O^4) + aq$$

ergeben.

			WERTHEIM (Mittel)
Ag	= 108	= 18.78	18.68
U	240	41.74	41.58
2 O	32	5.57	
$3\,C^2H^3O^2$	177	30.78	30.41
H^2O	18	3.13	3.20
	575	100	

Eine Probe, der ein wenig Uranacetat beigemengt war, gab mir 16.93 Procent Ag und 42.45 Procent U. — Bei 200° betrug der Wasserverlust 3.44 Procent.

Nach WERTHEIM hinterlässt es beim Glühen ein in der Hitze beständiges $Ag^2U^2O^7$.

Die viergliedrigen Krystalle sind quadratische Prismen p, durch das Oktaeder o vierflächig zugespitzt, wozu noch die Endfläche c tritt.

$$o = a : a : c$$
$$p = a : a : \infty c$$
$$c = c : \infty a : \infty a.$$

		Berechnet	Beobachtet W.	Beobachtet Rg.
o	2 A =	100° 2′		100° 0′
	2 C =	130 38		130 30
o : p =			*155° 19′	155 17
o : c =		114 41		114 35

$$a\,.\,c = 1 : 1.5385.$$

Die Flächen o und c sind glatt und eben, die p horizontal gestreift, bisweilen bauchig gekrümmt.

Digitized by Google

Essigsaures Uranyl-Lithion.

Aus dem Gemisch der beiden Acetate scheiden sich beim Verdunsten sehr kleine gelbe Krystalle eines Doppelsalzes ab, dessen Form ich nicht zu bestimmen vermochte.

1. 2.916 wurden bei Luftzutritt geglüht und hinterliessen 1.775 uransaures Lithion, welches, mit Chlorammon in Wasserstoff erhitzt, 1,791 eines Gemenges von UO^2 und LiCl gaben, welches an Wasser 0.222 LiCl abtrat, während 1.629 an der Luft geglühtes U^3O^8 zurückblieben.

2. 3.872 verloren bei 220° 0.37, und dann bis 250° nichts weiter.

3. 2.814 verloren 0.276.

Hiernach ist das Salz

$$(LiC^2H^3O^2 + UO^2.C^4H^6O^4) + 3\,aq.$$

	Berechnet		Gefunden	
			1, 2	3
Li =	7 =	1.37	1.25	
U	240	47.06	47.43	
2 O	32	6.27		
$3\,C^2H^3O^2$	177	34.70		
$3\,H^2O$	54	10.60	9.56	9.81
	510	100		

Der Rechnung nach müssen 59.41 $Li^2U^2O^8$ beim Erhitzen zurückbleiben, während 60.87 gefunden wurden. Ebenso müssen 61.66 LiCl, UO^2 erhalten werden, während der Versuch 61.42 gab.

Essigsaures Uranyl-Thallium.

Die Mischung der Lösungen beider einfachen Salze gab Anschüsse, welche nur theilweise aus erkennbaren Krystallen bestanden. Zuletzt schoss das reine Thalliumsalz an.

Ich habe nur eine Probe des krystallisirten untersucht, welches in Wasser schwer löslich ist. 3.148 wurden in Lösung mit wenig Essigsäure versetzt und durch Jodkalium gefällt; es fielen 1.024 TlJ nieder, während das Filtrat, mit Ammoniak übersättigt, 1.63 U^3O^8 lieferte.

Hiernach ist das Salz

$$(TlC^2H^3O^2 + 2\,UO^2.C^4H^6O^4) + 2\,aq.$$

Digitized by Google

	Berechnet		Gefunden
Tl =	204 =	18.90	20.05
2 U	480	44.79	43.96
4 O	64	5.93	
5 $C^2H^3O^2$	295	27.34	
2 H^2O	36	3.34	
	1079	100	

Die Krystalle sind ihrer matten Flächen wegen zu genaueren Messungen untauglich. Es sind nahe rechtwinklige Prismen, in deren Endigung drei Flächen auftreten, eine auf die vordere Prismenkante gerade aufgesetzte schiefe Endfläche, deren Kanten mit den hinteren Prismenflächen durch ein Flächenpaar abgestumpft sind, welches gleichzeitig mit der Abstumpfung der seitlichen Prismenkanten in eine Zone fällt. Sie scheinen demnach zwei- und eingliedrig zu sein.

Essigsaurer Uranyl-Baryt.

Dieses Doppelsalz bildet nur dünne gelbe Blättchen, deren Form sich nicht bestimmen lässt. Seine Zusammensetzung ist nach WERTHEIM

$$(Ba\,C^4H^6O^4 + 2\,UO^2.\,C^4H^6O^4) + 6\,aq.$$

	Berechnet		Gefunden im Mittel
Ba =	137 =	11.99	12.07
2U	480	42.00	41.78
4O	64	5.60	
3 $C^4H^6O^4$	354	30.96	
6 H^2O	108	9.45	9.23
	1143	100	

Essigsaurer Uranyl-Strontian.

Mir ist die Darstellung messbarer Krystalle aus der stark efflorescirenden Lösung nicht geglückt.

Wohl aber hat WESELSKY die weiterhin zu beschreibenden Krystalle erhalten, welche nach ihm sind

$$(Sr\,C^4H^6O^4 + 2\,UO^2.\,C^4H^6O^4) + 6\,aq.$$

	Berechnet		Gefunden
Sr =	88 =	8.04	7.52
2 U	480	43.88	44.10
4 O	64	5.85	
3 $C^4H^6O^4$	354	32.36	
6 H^2O	108	9.87	10.06
	1094	100	

Digitized by Google

Grailich fand die Krystalle dieses Salzes **viergliedrig**. Es waren Combinationen eines Quadratoktaeders und eines Prismas gleicher Ordnung, wobei die abwechselnden Combinationsecken durch je zwei Flächen ersetzt waren, welche einem gebrochenen Quadrattetraeder, d. h. dem tetraedrischen Hälftflächner eines Vierkantners angehören.[1]

$o = a : a : c$

$p = a : a : \infty c$

$s = \frac{1}{10} a : \frac{3}{10} a : c$ (vielleicht $a : \frac{1}{3} a : 3 c$).

		Berechnet	Beobachtet
o	2 A =		*140° 10′
	2 C =	57° 36′	57 20
	o : p =	118 48	119 10
s	2 X =	144 14	144 14
	2 Y =	134 14	
	2 Z =	152 24	
	s : p =	150 20	150 32

$a : c = 1 : 0.3887.$

Essigsaurer Uranyl-Kalk.

Weselsky hat ein derartiges Salz in gelben luftbeständigen Krystallen erhalten. Mir ist dies nicht gelungen, da aus der stark efflorescirenden Lauge sich nur sehr kleine undeutliche Krystalle abschieden.

Nach Weselsky verliert das Salz bei 200° seinen ganzen Wassergehalt = 12.6 Procent, während das meinige bei jener Temperatur nur 8 Procent, bei 275° 10.98 Procent verlor.

a) 3.18 ergaben 0.418 $CaSO^4$ und 1.694 U^3O^8.

b) 3.971 = 2.127 U^3O^8.

	Gefunden			
	Weselsky		Rg.	
	a	b	a	b
Calcium	3.98	3.82	3.90	
Uran	44.77	44.02	45.23	45.49
Wasser	12.61		10.98	

Beide Salze sind doch wohl identisch. Weselsky nahm die Formel

$$(CaC^4H^6O^4 + 2UO^2.C^4H^6O^4) + 8aq$$

an. Es mag diese neben der Berechnung mit 7 und mit 6 aq stehen.

[1] S. mein Hdb. d. kryst.-phys. Chemie 2, 94.

Digitized by Google

			7 aq	6 aq
Ca =	40 =	3.70	3.76	3.82
2U	480	44.36	45.11	45.89
4O	64	5.91	6.01	6.12
$3C^4H^6O^4$	354	32.72	33.28	33.85
$8H^2O$	144	13.31	11.84	10.32
	1082	100	100	100

Ich würde mich für 6 aq entscheiden.

Die von GRAILICH gemessenen Krystalle des von WESELSKY untersuchten Salzes gehören dem zweigliedrigen System an[1]. Sie sind Combinationen von

$o = a : b : c$
$o^3 = a : b : 3c$
$v = \frac{1}{3}a : \frac{1}{5}b : c$
$p = a : b : \infty c$
$\frac{5}{3}p = \frac{5}{3}a : b : \infty c$
$q^2 = b : 2c : \infty a$
$a = a : \infty b : \infty c$
$b = b : \infty a : \infty c$
$c = c : \infty a : \infty b$

		Berechnet	Beobachtet
o	2A =	140° 26′	140° 44′
	2B =	139 36	139 20
	2C =	57 50	
o^3	2A =	106 22	
	2B =	104 36	
	2C =	117 46	
p : p =			*91 10
p : a =		135 35	
p : b =		134 25	134 30
v	2A =	122 52	
	2B =	77 26	
	2C =	132 22	
$\frac{5}{3}p : \frac{5}{3}p$ =		62 58	
$\frac{5}{3}p : b$ =		148 31	
$q^2 : q^2$ =		104 36	
o : a =		110 12	
o : b =		109 47	
o : c =			*151 5
o : p =		118 55	
$o^3 : p$ =		148 53	148 57

[1] A. a. O. 95.

Digitized by Google

	Berechnet	Beobachtet
$o^3 : o$	$= 150° 2'$	$149° 58'$
$v : a$	$= 141\ 17$	
$v : b$	$= 118\ 34$	
$v : c$	$= 113\ 49$	$114\ 30$ ungef.

$$a : b : c = 0.9798 : 1 : 0.3865.$$

Die Ebene der optischen Axen ist bc, die Mittellinie b. Die Brechung ist positiv, die Dispersion $\rho < v$. LANG.

Die gleiche Zusammensetzung des Strontian- und Kalksalzes lässt auf Isomorphie schliessen, und da das erstere wegen des Auftretens der Flächen v, obwohl sein optisches Verhalten von GRAILICH nicht geprüft zu sein scheint, viergliedrig sein muss, so liegt hier ein Fall von Isomorphie in zwei Systemen vor.

Strontiansalz $a : a : c = 1 : 1 : 0.3887$.

Kalksalz $a : b : c = 0.98 : 1 : 0.386$; Winkel der Oktaeder o:

	Strontiansalz	Kalksalz
2A	$= 140° 10'$	$140° 26'$
2B	$= 140\ 10$	$139\ 36$
2C	$= 57\ 36$	$57\ 50$

Essigsaure Uranyl-Beryllerde.

Aus der gemeinsamen Lösung der beiden Acetate schieden sich bei starker Concentration gelbe undeutliche, luftbeständige und leichtlösliche Krystalle ab. 2.937 wurden in Lösung mit Kalilauge erhitzt. Aus der mit Chlorwasserstoff sauer gemachten Flüssigkeit fällte Ammoniak 0.164 BeO. Das uransaure Kali, mit Chlorammon in Wasserstoff geglüht, gab 1.49 U^3O^8.

$$(BeC^4H^6O^4 + UO^2C^4H^6O^4) + 2aq.$$

		Berechnet	Gefunden
Be	9.3 =	1.68	2.06
U	240	43.38	43.07
2O	32	5.78	
$2C^4H^6O^4$	236	42.65	
$2H^2O$	36	6.51	
	553.3	100	

Essigsaure Uranyl-Magnesia.

WERTHEIM hatte ein zweigliedrig krystallisirtes, seiner Form nach jedoch nicht näher bestimmtes Salz erhalten, in welchem er 1 At. Mg gegen 2 At. U und 8 Mol. aq annahm.

Digitized by Google

WESELSKY beschreibt auch nur ein Salz, welches jedoch 12 Mol. Wasser enthält und dessen Krystalle an der Luft verwittern.

Auch ich hatte schon vor langer Zeit ein solches, jedoch von anderer Form, erhalten, die ich beschrieb[1] und in welchem ich 6 Mol. Wasser annahm.

Ein längeres eingehendes Studium dieser Salze hat nun gezeigt, dass es zwei im Wassergehalt und in der Form verschiedene Verbindungen giebt, die sich aus Lösungen bald gleichzeitig, bald einzeln abscheiden.

Salz I.

Es bildet sich sowohl bei T. nahe 0°, als auch beim Verdunsten einer Lösung bei mittlerer T., oft in sehr ansehnlichen Krystallen, welche indessen an der Oberfläche schnell verwittern.

Die Trennung des Mg vom U gelingt durch kohlensauren Baryt nicht immer; weit besser ist die Fällung des U aus der noch schwachsauren Lösung durch frischbereitetes farbloses HAmS.

1. 3.58 verloren bei 250° 0.691. Der rothgelbe Glührückstand war = 1.956. Auf die zuletzt erwähnte Art behandelt, gab er 0.359 $Mg^2P^2O^7$ und 1.715 (in Wasserstoff geglühtes) UO^2.

2. 4.297 verloren 0.76 Wasser.

3. 4.794 verloren 0.802 und hinterliessen 2.645 Glührückstand.

4. 5.91 verloren 1.045 Wasser.

	Gefunden				
	1	2	3	4	WESELSKY
Magnesium ..	2.17				2.23
Uran	42.27				42.27
Wasser	19.30	17.69	16.73	17.68	19.18
Glührückstand	54.64		55.18	56.00	

Es ist mithin

$$(MgC^4H^6O^4 + 2\,UO^2C^4H^6O^4) + 12\,aq$$

Mg =	24 =	2.11
2 U	480	42.18
4 O	64	5.62
$3\,C^4H^6O^4$	354	31.11
$12\,H^2O$	216	18.98
	1138	100

Wenn der Glührückstand MgU^2O^7 wäre, sollte er 54.13 Procent betragen.

[1] Suppl. zur krystallogr. Chem. S. 142 (Leipzig 1857).

Digitized by Google

Die Form dieses Salzes habe ich schon früher beschrieben;[1] sodann hat GRAILICH das Präparat von WESELSKY gemessen. Im Folgenden habe ich sämmtliche beobachtete Flächen ($o^4/_5$ und $r^4/_5$ nur von GRAILICH) zusammengestellt.

Es ist zweigliedrig, und zwar finden sich (Fig. 3)

$o = a : b : c$
$o^4/_5 = a : b : {}^4/_5 c$
$n = a : {}^3/_2 b : c$
$m = a : 6b : c$
$p = a : b : \infty c$
$r = a : c : \infty b$
$r^4/_5 = a : {}^4/_5 c : \infty b$
$a = a : \infty b : \infty c$
$b = b : \infty a : \infty c$

		Berechnet	Beobachtet Rg.	Beobachtet Grailich
o	2A	134° 24′		
	2B	117 30		
	2C	80 40		
$o^4/_5$	2A	140 42	141° 30′	
	2B	126 28		127° 30′
	2C	68 24		
n	2A	148 42		
	2B	114 24		
	2C	74 30		
m	2A	172 0	171 30	
	2B	111 44		
	2C	68 50		
p : p		106 30	106 38	
p : a		143 15		
p : b			*126 45	126 45
r : r		111 32		
$r^4/_5 : r^4/_5$		122 52		
o : b			*112 44	
o : p		130 20		
o : r		157 12		
$o^4/_5$: b		109 39		108 ungef.
n : b		105 39	105 40	
n : o		172 51		
m : b		94 0	93 55	
o		161 12	161 10	

$a : b : c = 0.7468 : 1 : 0.5082.$

[1] Hdb. d. kryst.-phys. Chem. 2, 95, wo irrigerweise 6aq. in der Formel steht.

Digitized by Google

Die Krystalle sind meist nach b tafelartig; grössere sind häufig prismatisch nach der Horizontalzone und erscheinen gleichsam als dreiseitige Prismen, indem die beiden p der rechten oder linken Seite (an b) und das b der entgegengesetzten vorherrschen.

Die Krystalle zeigen Fluorescenz und verwittern, wie gesagt, sehr rasch.

Sie sind isomorph dem Mangansalz I.

Salz II.

Dies ist das von WERTHEIM beschriebene Salz, welches auch ich, bisweilen neben dem vorigen, erhalten habe. Es wurde theils direct, theils durch Kochen von Uranylnitrat mit Magnesia und Auflösen der Fällung in Essigsäure dargestellt.

1. 3.86 gaben bei der Behandlung mit kohlensaurem Baryt 0.392 $Mg^2P^2O^7$ und 1.919 U^3O^8.

2. 2.442 verloren bei 200° 0.304 Wasser und gaben 1.426 braunen Glührückstand.

3. 2.902 lieferten 0.37 Wasser und nach dem Kochen mit Barytwasser 1.935 $BaSO^4$ = 0.98 $C^4H^6O^4$.

4. 2.171 = 0.247 $Mg^2P^2O^7$ und 1.149 U^3O^8.

5. 6.197 = 3.604 Glührückstand, 3.162 U^3O^8 und 0.666 $Mg^2P^2O^7$.

	1	2	3	4	5	WERTHEIM Mittel
Magnesium	2.19			2.41	2.32	2.33
Uran	44.60			44.97	43.32	44.87
Wasser		12.45	12.75			13.82
Glührückstand .		58.40			58.16	
Essigsäure			33.79			34.12

Es ist also

$$(MgC^4H^6O^4 + 2UO^2.C^4H^6O^4) + 7\,aq$$

Mg =	24 =	2.29
2U	480	45.80
4O	64	6.11
$3C^4H^6O^4$	354	33.78
$7H^2O$	126	12.02
	1048	100

WERTHEIM hat 8 H^2O angenommen, wir werden indessen sehen, dass das Salz mit den entsprechenden von Zink, Nickel und Kobalt isomorph ist, welche 7 H^2O enthalten.

Der Glührückstand MgU^2O^7 muss 58.78 Procent betragen (bei 8 H^2O nur 57.8, bei 6 H^2O aber 59.8 Procent).

Digitized by Google

Die Krystallform ist ebenfalls zweigliedrig. Nach GRAILICH (von welchem irrthümlich 12 H^2O in dem Salze angenommen sind) finden sich

$$o = a : b : c$$
$$\frac{r}{2} = 2a : c : \infty b$$
$$b = b : \infty a : \infty c$$
$$c = c : \infty a : \infty b$$

		Berechnet	Beobachtet	
o	2 A =		*112° 48′	
	2 B =	103° 34′	103	ungef.
	2 C =	112 12		
$\frac{r}{2} : \frac{r}{2}$	=	121 58	121 49	
$\frac{r}{2} : c$	=	150 59	150 40	
o : b	=	123 36		
o : c	=		*123 58	

a : b : c = 0.8946 : 1 : 0.9924. S. Fig. 4.

Die Krystalle sind tafelartig nach c, welche Fläche eine eigenthümliche Streifung parallel den Kanten mit o zeigt.

Die von GRAILICH gemessenen Krystalle hatte WESELSKY aus heiss gesättigter Lösung erhalten. Sonderbarerweise hat er aber in seiner Abhandlung dieses Salzes gar nicht erwähnt.

Essigsaures Uranyl-Mangan.

Wenn eine Lösung, welche beide Acetate in dem Verhältniss gleicher Mol. enthält, beim Stehen an der Luft oder in gelinder Wärme verdunstet, so schiesst zuerst ein Salz an, dessen Krystalle an trockener Luft verwittern, und welches 1 At. Mn gegen 2 At. U enthält. Alsdann bilden sich in relativ weit grösserer Menge andere Krytalle, welche nicht verwittern und einem Salze angehören, in welchem Mn : U = 1 : 1 ist.

Salz I.

Wie man aus den Zahlen der Analysen ersieht, hat WESELSKY dasselbe Salz erhalten.

Zur Analyse wurden 2.892 im Luftbade erhitzt; sie verloren bei 230° 0.527 = 18.22 Procent, bei 250° 0.545 = 18.84, entwickelten aber bei dieser T. schon den Geruch der Säure in merklichem Grade. Nach dem Glühen bei Luftzutritt blieben 1.613 = 55.8 Procent

Digitized by Google

schwarzen Rückstandes. Zur Trennung beider Metalle wurde derselbe in Königswasser gelöst, die Lösung mit kohlensaurem Ammon übersättigt, und mit Ammonhydrosulfür gefällt. Aus dem Niederschlage resultirten 0.2 Mn^3O^4 = 0.1441 Mn, während die Flüssigkeit nach dem Abdampfen, Erhitzen und Wiederauflösen durch Ammoniak gelbes uransaures Ammon gab, das nach dem Glühen 1.407 U^3O^8 lieferte.

Ich stelle meine Zahlen denen WESELSKY's gegenüber.

	RG.	W.
Mangan	4.98	4.56
Uran	41.31	40.65 u. 40.46
Wasser	18.22	18.16.

Hieraus folgt, dass 1 Mol. essigsaures Mangan und 2 Mol. essigsaures Uranyl mit 12 Mol. Wasser verbunden sind.

$$(MnC^4H^6O^4 + 2\,UO^2.C^4H^6O^4) + 12\,aq.$$

Mn	55 =	4.70
2U	480	41.07
4O	64	5.48
$3C^4H^6O^4$	354	30.27
$12H^2O$	216	18.48
	1169	100

Wenn der Glührückstand $Mn^2O^3 + 4UO^3$ ist, muss er 56.03 Procent betragen; gefunden 55.8. Nach WESELSKY verliert das Salz über Schwefelsäure 7.43 Procent Wasser, den Rest bei 100°; 5 Mol. würden 7.70 Procent entsprechen.

Wie schon gesagt, verwittern die gelben Krystalle an der Luft.

Nun hat GRAILICH[1] die Krystalle des ihm von WESELSKY übergebenen und mit der obigen Formel bezeichneten Salzes gemessen; diese Krystalle gehören aber dem folgenden Salze II an, dessen WESELSKY keine Erwähnung thut, so dass seitens des Letzteren eine Verwechselung stattgefunden haben muss.

Die Krystalle gehören dem zweigliedrigen System an und gleichen denen des Magnesiasalzes (Fig. 3).

Es sind Combinationen von

$$o = a : b : c$$
$$n = a : {}^2/_3 b : c$$
$$p = a : b : \infty c$$
$$p^2 = a : 2b : \infty c$$
$$r = a : c : \infty b$$
$$a = a : \infty b : \infty c$$
$$b = b : \infty a : \infty c$$

[1] A. a. O. S. 175.

Digitized by Google

		Berechnet	Beobachtet
o	2A =	135° 0′	
	2B =	118 58	
	2C =	78 58	
p	2A =	149 8	149° 30′
	2B =	116 2	
	2C =	72 44	
	p : p =	106 0	106 6
	p : b =		*127 0
	p : a =	143 0	
	r : r =	113 20	
	r : a =	123 20	
	$p^2 : p^2$ =	138 42	
	p^2 : b =	110 39	110 ungef.
	p^2 : a =	159 21	
	p^2 : p =	163 39	163 30
	o : a =	120 31	
	o : b =		*112 30
	o : p =	129 29	
	o : r =	157 30	
	n : a =	121 59	
	n : b =	105 26	105 20
	n : o =	172 56	
	n : r =	164 34	

Hiernach

$$a : b : c = 0.75355 : 1 : 0.4957.$$

Sie sind prismatisch nach der Horizontalzone, gelb und durchsichtig, da sie aber nicht sonderlich glänzend sind und bald verwittern, so sind die Messungen nicht sehr scharf.

Salz II.

Nach der Ausscheidung des Salzes I erhält man kleinere durchsichtige gelbe Krystalle, welche sich an der Luft nicht verändern, und welche doppelt so viel Mangan oder halb so viel Uran, d. h. je 1 At. beider enthalten. Sie bilden sich auch bei grösserem Mangangehalt der Lösung ausschliesslich.

Der Wassergehalt wurde durch Erhitzen bis 250° bestimmt. Der Glührückstand wurde in Nr. 3 wie oben behandelt, während die Trennung beider Metalle in Nr. 1 und 2 durch kohlensauren Baryt geschah.

Digitized by Google

	1.	2.	3.
Mangan	7.90	8.68	8.73
Uran	36.14	33.66	36.41
Wasser		14.75	15.75.

Demnach ist es

$$(MnC^4H^6O^4 + UO^2 . C^4H^6O^4) + 6\,aq.$$

Mn =	55 =	8.20
U	240	35.77
2 O	32	4.77
$2\,C^4H^6O^4$	236	35.16
$6\,H^2O$	108	16.10
	671	100

Der Glührückstand war = 45.11 und 45.08 Procent. Besteht er aus $Mn^2U^2O^9$, so muss er 47.1 Procent betragen, hier wie beim Salze I.

Auch diese Krystalle gehören dem zweigliedrigen System an.[1] Ich beobachtete (Fig. 5)

o = a : b : c
p = a : b : ∞c
$^4/_3$p = 4a : 3b : ∞c
q^2 = b : 2c : ∞a
r = a : c : ∞b
b = b : ∞a : ∞c.

	Berechnet	Beobachtet Rg.	Beobachtet Grailich
o	2A = 143° 0′		
	2B = 119 50		
	2C = 72 46		
p : p =	115 20	115°40′	115°35′
p : b =		*122 20	122 20
$^4/_3$p : $^4/_3$p =	99 40		
$^4/_3$p : b =	130 10	130 30	
$^4/_3$p : p =	172 10		
$q^2 : q^2$ =		*103 30	104
q^2 : b =	128 15	128 10	128
r : r =	116 10	115 52	116 30
o : b =	108 30		
o : p =	126 23	126 20	
o : r =	161 30	161 45	

a : b : c = 0.6330 : 1 : 0.39417.

Sie sind prismatisch nach der Horizontalzone. In der Endigung herrscht das dritte Paar r; die Oktaederflächen fehlen öfter, wogegen

[1] Frühere Messungen von mir s. in meinem Hdb. d. kryst.-phys. Chemie 2, 96.

Digitized by Google

dann die q^2 ausgedehnter sind. Die Flächen des Prismas $^4/_3p$ sind sehr schmal.

Grailich hat das optische Verhalten der Lösungen untersucht.

Essigsaures Uranyl-Zink.

Es wurde dargestellt theils aus beiden Acetaten, theils durch Kochen der Lösung von Uranylnitrat mit kohlensaurem Zink und Lösen des Abgeschiedenen in Essigsäure. Die gelben durchsichtigen Krystalle besassen in allen Fällen die nämliche Form.

Zur Trennung von Uranyl und Zink ist kohlensaurer Baryt nicht anwendbar, weil auch ein Theil des Zinks gefällt wird. Sie lässt sich nur durch Fällen des letzteren aus der Lösung der Metalle in kohlensaurem Ammoniak durch Ammonhydrosulfür bewirken.

1. 5.286 verloren bei 260° 0.612 Wasser und gaben 2.835 U^3O^8.
2. 3.308 = 0.248 Zn O.
3. 2.915 = 0.23 Zn O und 1.506 U^3O^8.
4. 2.658 = 0.204 Zn O.

Dasselbe Salz hat schon Weselsky untersucht

	1	2	3	4	Weselsky
Zink		6.02	6.33	6.16	5.01
Uran	45.54		43.87		43.53 — 44.33
Wasser	11.58				11.44.

Die Formel

$$(Zn\,C^4H^6O^4 + 2UO^2.\,C^4H^6O^4) + 7\,aq$$

erfordert

Zn =	65 =	5.97
2U =	480 =	44.08
4O =	64 =	5.87
$3C^4H^6O^4$ =	354 =	32.51
$7H^2O$ =	126 =	11.57
	1089	100

Das von Weselsky dargestellte Salz ist von Grailich gemessen worden; meine Beobachtungen stimmen damit überein.

Es sind zweigliedrige Combinationen eines Rhombenoktaeders, dessen stumpfe Endkanten durch das dritte Paar abgestumpft sind, denen sich die beiden Hexaidflächen b und c hinzugesellen

$$o = a : b : c$$
$$r = a : c : \infty b$$
$$b = b : \infty a : \infty c$$
$$c = c : \infty a : \infty b.$$

Digitized by Google

	Berechnet	Beobachtet Grailich	Rg.
o 2A =		*114° 30′	
o 2B =	103° 36′		103° 20′
o 2C =		*110 30	109 45
r : r =	85 20		
r : c =	132 40		
o : b =	122 45	122 4	122 30
o : c =	124 45		
o : r =	131 11		

a : b : c = 0.8749 : 1 : 0.94925.

GRAILICH hegte die Vermuthung, das System könne das zwei- und eingliedrige sein, und berechnete es in diesem Sinne. Die von ihm gefundene Neigung seiner Axen a und c = 91° 10′, welche bei der oben angenommenen Stellung, die von b und c sein würde, beruht doch wohl auf unvollkommener Beschaffenheit der Flächen, da die isomorphen Salze kein Merkmal zwei- und eingliedriger Symmetrie zeigen und auch ihr optisches Verhalten dem zweigliedrigen System entspricht.

Meine Krystalle waren nach b tafelartige Combinationen von o und b.

Beim Glühen des Salzes wird ein Theil des Zinks reducirt und verflüchtigt.

Auch WERTHEIM hat das Zinksalz in wohl ausgebildeten Krystallen erhalten, welche er jedoch leider nicht untersucht hat. Seine Analyse führt aber auf ein Hydrat mit nur 3 Mol. Wasser,

$$(ZnC^4H^6O^4 + 2UO^2.C^4H^6O^4) + 3aq.$$

	Berechnet		Gefunden
Zn =	65 =	6.39	7.13
2U	480	47.21	47.08
4O	64	6.29	
$3C^4H^6O^4$	354	34.80	
$3H^2O$	54	5.31	5.88
	1017	100	

Essigsaures Uranyl-Nickel.

Theils aus den beiden Acetaten, theils durch Kochen der Lösung von Uranylnitrat mit kohlensaurem Nickel und Lösen der Fällung in Essigsäure dargestellt. Durch Verdunsten bilden sich grüne rhombische Tafeln des Salzes.

Die Trennung des Urans vom Nickel bietet einige Schwierigkeiten dar. Wenn man die essigsaure Lösung durch Schwefelwasserstoff

Digitized by Google

fällt, oder die Lösung in kohlensaurem Ammon mit Ammonhydrosulfür versetzt, so lässt sich das gefällte Schwefelnickel nicht auswaschen. Am besten dient kohlensaurer Baryt.

1. 1.946 verloren bei 240° 0.239 Wasser. Der Rest hinterliess beim Glühen an der Luft 1.168. Es wurden ferner 0.141 NiO und 0.995 U^3O^8 erhalten.

2. 5.003 hinterliessen beim Glühen 2.997 und gaben 0.315 NiO.

3. 1.868 = 0.123 NiO

4. 2.446 = 1.277 U^3O^8

5. 2.136 = 1.12 U^3O^8.

Weselsky hat dasselbe Salz untersucht. Es verlor weder über Schwefelsäure, noch bei 100° Wasser, was erst bei 180° der Fall ist. Er bestimmte nur das Uran und das Wasser.

	1	2	3	4	5	Weselsky (Mittel)
Nickel.....	5.68	4.94	5.26			
Uran.....	43.41			44.33	44.51	43.81
Wasser.....	12.28					11.60
Glührückstand	60.02	59.90.				

Die Formel

$$(NiC^4H^6O^4 + 2\,UO^2.C^4H^6O^4) + 7\,aq$$

erfordert

Ni =	58 =	5.36
2 U	480	44.36
4 O	64	5.91
$3\,C^4H^6O^4$	354	32.72
$7\,H^2O$	126	11.65
	1082	100

Der Glührückstand = NiU^2O^7 muss = 60.08 Procent sein, was mit meinen Versuchen stimmt.

Ein fernerer Beweis für die Zusammensetzung liegt in der Isomorphie des Salzes mit dem Magnesium- und Zinksalz.

Grailich untersuchte die von Weselsky dargestellten Krystalle, und ich füge meine eigenen Messungen hinzu.

Zweigliedrige Combinationen von

$$o = a : b : c$$
$$^3p = 3a : b : \infty c$$
$$r = a : c : \infty b$$
$$a = a : \infty b : \infty c$$
$$b = b : \infty a : \infty c$$
$$a : b : c = 0.867 : 6 : 0.950.$$

Digitized by Google

		Berechnet	Beobachtet Grailich	Rg.
o	2 A =	114° 44′	114° 14′	114° 35′
	2 B =	103 4	103 40	103 50
	2 C =	110 50	110 51	110 30
	^{3}p : ^{3}p =	42 4		
	^{3}p : b =	158 58		160 ungef.
	r : r =	86 46		
	o : a =		*128 28	128 40
	o : b =	122 38	122 39	122 40
	o : r =		*147 22	147 10

Die Flächen r sind sehr schmal, die ^{3}p sind äusserst klein; dasselbe gilt von denen eines Oktaeders $\frac{1}{n}$ a : b : c.

Auf der Tafelfläche b herrscht Perlmutterglanz; der Dichroismus ist schwach.

Nach GRAILICH und LANG ist die optische Axenebene ab, die Mittellinie a.

Essigsaures Uranyl-Kobalt.

Seine Darstellung ist die der übrigen Salze. Aus der gelbbraunen Lösung schiesst es in ebenso gefärbten kleinen Krystallen an.

Es wurde von WESELSKY und auch von mir untersucht, und ist

$$(CoC^4H^6O^4 + 2UO^2.C^4H^6O^4) + 7aq.$$

	Berechnet		Weselsky	Rg.
Co =	59 =	5.45	5.04	5.75
2U	480	44.32	43.82—44.82	44.63
4O	64	5.90		
$3C^4H^6O^4$	354	32.70		
$7H^2O$	126	11.63	11.70—12.09	11.62
	1083	100		

Die Krystallform ist die der isomorphen Salze mit 7 aq.

a : b : c = 0.8756 : 1 : 0.9484

o = a : b : c

2p = 2a : b : ∞c

r = a : c : ∞b

a = a : ∞b : ∞c

b = b : ∞a : ∞c

Digitized by Google

	Berechnet	Beobachtet Rg.	Grailich
o 2A =		*114° 30′	114° 20′
o 2B =		*103 40	
o 2C =	110° 26′	110 ungef.	111 ungef.
2p : 2p =	59 28		
2p : a =	119 44		
2p : b =	150 16	149 42	
r : r =	85 26		
r : a =	137 17		
o : a =	128 10	128 8	128 43
o : b =	122 45	122 30	
o : r =	147 15		

An manchen Krystallen herrscht o vor, andere sind tafelartig nach b. Von Grailich wurde r, von mir 2p beobachtet.

Das optische Verhalten ist das des Nickelsalzes. Grailich fand $2Ha = 64° 30'$, also $2E = 103° 38'$. Die Dispersion $\rho < v$.

Wie es scheint, verwandelt es sich beim Glühen in ein Gemenge von Co^3O^4 und U^3O^8, wenigstens stimmt die Menge eines solchen, 60.54 Procent, mit der von mir gefundenen = 60.55 und 60.47 genau überein.

Dass Weselsky's Annahme von 7aq richtig, meine frühere von 6aq aber nicht richtig ist, unterliegt jetzt keinem Zweifel.

Essigsaures Uranyl-Eisen.

Zerlegt man essigsauren Baryt durch Eisenoxydulsulfat, und verdunstet ein Gemisch aus essigsaurem Uranyl und der Eisenlösung in gelinder Wärme, so tritt zwar eine partielle Zersetzung und Abscheidung von Eisenoxyd ein, jedoch erhält man das Doppelsalz in gelben Krystallen, deren Form mit der der vorhergehenden Salze übereinstimmt. Ich habe mich deshalb auf einige Versuche beschränkt.

Ein Salz

$$(FeC^4H^6O^4 + 2UO^2.C^4H^6O^4) + 7aq$$

muss 60.74 Procent Glührückstand von uransaurem Eisenoxyd liefern. Der Versuch gab 60.61 Procent.

Die Form der Krystalle gleicht vollkommen der der analogen Salze. Es sind Combinationen von o und b, letzteres als Tafelfläche vorherrschend, zu denen c untergeordnet hinzutritt.

	Beobachtet
o : b =	122° 30′
o : c =	123 ungef.

Digitized by Google

Die Lösung zersetzt sich beim Stehen oder Erhitzen an der Luft sehr bald und es krystallisirt zuletzt essigsaures Uranyl aus.

Essigsaures Uranyl-Kadmium.

Es wird am besten aus den beiden Acetaten direct erhalten und wurde schon von WESELSKY untersucht.

1. 2.688 verloren bei 230° 0.375 und gaben 0.52 CdS = 0.4044 Cd und 1.096 U^3O^8.

2. 3.335 gaben 1.274 U^3O^8.

Dieses Salz hat Form und Zusammensetzung des Mangansalzes II.,

$$(CdC^4H^6O^4 + UO^2.C^4H^6O^4) + 6aq.$$

			Rg. 1	Rg. 2		Weselsky	
Cd =	112	= 15.39	15.05			15.93	
U	240	32.97	34.62	32.43	32.42	33.85	34.08
2O	32	4.40					
$2C^4H^6O^4$	236	32.41					
$6H^2O$	108	14.83	13.95		13.56	13.30	
	728	100					

Der Probe 1 war etwas Uranacetat beigemengt.

Die Krystalle, schon von GRAILICH bestimmt, sind zweigliedrige Combinationen von

o = a : b : c
p = a : b : ∞c
2p = 2a : b : ∞c
q^2 = b : 2c : ∞a
r = a : c : ∞b
a = a : ∞b : ∞c
b = b : ∞a : ∞c

a : b : c = 0.6289 : 1 : 0.3904.

		Berechnet	Beobachtet Grailich	Rg.
o	2A =	143° 18′		
	2B =	119 56		
	2C =	72 30		
p : p =			*115° 40′	115° 40′
p : a =		147 50		
p : b =		122 10	122 10	122 0
2p : 2p =		76 58		
2p : b =		141 31	141 30	
q^2 : q^2 =		104 2		
q^2 : b =		127 59	128 0	

Digitized by Google

r : r =	*116° 20′	116° ungef.
r : a = 121° 50′	122	
o : a = 120 2		
o : b = 108 21		
o : p = 126 15	126 10	
o : r = 161 39	161 40	

S. Fig. 6—8.

Die Krystalle sind kurzprismatisch nach der Horizontalzone; in der Endigung herrschen die r, während die o sehr zurücktreten. Öfter verschwinden diese und q^2 der einen Seite fast ganz; die von mir untersuchten waren in der Endigung theils von den r, theils von q^2 vorherrschend begrenzt. Sie sind gelb und zeigen grüne Fluorescenz. Die Ebene der optischen Axen ist bc, die Mittellinie c; der Charakter der Brechung ist negativ, $2Ha = 57° 54'$ für Roth, $54° 24'$ für Blau. (Grailich und Lang.)

Das Salz ist vollkommen isomorph dem Mangansalz II und enthält also 6aq, nicht 5aq, wie Weselsky angenommen hatte.

Wenn Derselbe sagt, es sei dem Magnesiasalz isomorph, so beruht dies wahrscheinlich auf einer Äusserung Grailich's, denn Weselsky hat nur das Salz I untersucht, in welchem Mg : 2U : 12aq, während die Krystalle, welche Grailich von ihm erhielt und die nur von Wertheim analysirt waren (Salz II), Mg : 2U : 7aq enthalten.

Mit keinem dieser beiden Salze ist wohl das Kadmiumsalz zu vergleichen; der Irrthum[1] rührt daher, dass die Wiener Physiker an dem Magnesiasalz I nicht o, sondern $o^4/_5$ beobachteten, für welches

$$a : b : c = 0.7468 : 1 : 0.4066$$

ist, während dies Verhältniss beim Kadmiumsalz

$$0.6289 : 1 : 0.3904$$

ist.

Essigsaures Uranyl-Blei.

Sowohl aus der Lösung der beiden Acetate als auch durch Kochen von Uranylnitrat mit kohlensaurem Blei und Lösen des gefällten rothen uransauren Bleis, welches nach Wertheim PbU^2O^7 ist, erhält man das nämliche Salz, welches jedoch je 1 At. beider Metalle enthält. Es bildet sehr feine dünne gelbe Prismen, welche zu strahligen Aggregaten vereinigt sind und sich in Wasser leicht lösen. Schon von 200° an verliert das Salz Essigsäure; bis 230° erhitzt, zeigt es eine dunkle Farbe und lässt beim Auflösen in kaltem Wasser einen rothen Rückstand.

[1] Grailich u. V. v. Lang Untersuchungen. Wien 1858 S. 52.

Digitized by Google

Die Lösung des Salzes scheidet beim Erhitzen rothes uransaures Blei ab.

a) 3.231 = 1.278 $PbSO^4$ und 1.17 U^3O^8

b) 3.19 = 1.261 $PbSO^4$ und 1.155 U^3O^8

c) 1.885 = 0.714 $PbSO^4$ und 0.664 U^3O^8

d) 2.16 desselben Salzes verloren bei 200° 0.213. Nach dem Glühen 1.412 rother Rückstand

e) 1.66 = 0.671 $PbSO^4$ und 0.586 U^3O^8.

Oder

	a	b	c	d	e
Blei	27.02	27.00	26.94		27.61
Uran	30.74	30.74	29.91		29.97
Verlust bei 200°.				9.86	
Glührückstand ..				65.37.	

Die Formel

$$(PbC^4H^6O^4 + UO^2.C^4H^6O^4) + 4aq$$

verlangt

Pb	= 207	= 26.30
U	240	30.50
2O	32	4.05
$2C^4H^6O^4$	236	30.00
$4H^2O$	72	9.15
	787	100

Wasserbestimmungen bei höherer Temperatur haben über 12 Procent Verlust ergeben, allein es hatte dann stets schon eine sehr merkliche Entwickelung von Essigsäure stattgefunden.

Bestände der Glührückstand aus $PbUO^4$, so müsste er 64.93 Procent betragen.

Das dem Äusseren nach ganz ähnliche Salz, welches WERTHEIM untersucht hat, soll 6 Mol. Wasser enthalten, die bei 275° entweichen.

Die Formel verlangt	Gefunden ist
Pb 25.15	25.19
U 29.16	29.11
H^2O 13.12	12.91.

Die von mir erhaltenen Krystalle lassen keine genauere Bestimmung zu; man erkennt nur, dass sie dünne, rechtwinklig vierseitige Tafeln sind, mit zweifacher Zuschärfung der Ränder, und dass dieselbe gegen die Tafelfläche unter etwa 100°, resp. 111° geneigt ist.

Essigsaures Uranyl-Kupfer.

WERTHEIM gelang es nicht, ein Doppelsalz dieser Art darzustellen und ich kann bestätigen, dass trotz vielfacher Abänderung der Mengen-

Digitized by Google

verhältnisse, der Concentration und der Temperatur die beiden Acetate stets nebeneinander anschiessen.

Fügt man ihnen aber essigsaures Natron in dem Verhältniss hinzu, dass auf 3 At. Uran 1 At. Kupfer und 1 At. Natrium vorhanden sind, so erhält man aus der grünen Lösung schöne durchsichtige smaragdgrüne Krystalle, interessante Combinationen des sechsgliedrigen Systems, welche eine Verbindung zweier Doppelsalze, des essigsauren Uranyl-Kupfers und des essigsauren Uranyl-Natrons darstellen.

Sie verlieren ihr Krystallwasser bei 200° und fangen bei 250° an, sich zu zersetzen, indem sie sich braun färben und Essigsäure entwickeln.

1. 1.846 verloren 0.189 Wasser und hinterliessen nach dem Glühen an der Luft 1.147. Diese, in Chlorwasserstoff- und etwas Salpetersäure gelöst, gaben 0.09 Cu^2S = 0.07186 Cu, und 1.01 U^3O^8 = 0.85755 U.

2. 2.283 gaben 0.237 Wasser, 0.116 Cu^2S und 1.245 U^3O^8 = 1.057 U. Das Filtrat hinterliess 0.082 NaCl = 0.03224 Na.

Hieraus folgt:

$$\left.\begin{matrix} NaC^2H^3O^2 + UO^2.C^4H^6O^4 \\ CuC^4H^6O^4 + 2\,UO^2.C^4H^6O^4 \end{matrix}\right\} + 9\ aq.$$

	Berechnet		Gefunden 1	2
Na =	23	= 1.44		1.41
Cu =	63.4	3.97	3.90	4.00
3 U =	720	45.14	45.37	46.30
6 O =	96	6.02		
9 $C^2H^3O^2$ =	531	33.28		
9 H^2O =	162	10.15	10.24	10.39
	1595.4	100		

Wenn das Salz beim Glühen $Na^2Cu^2U^6O^{21}$ giebt, muss dies 61.08 Procent betragen. Der Versuch hat 62.13 gegeben.

Ich habe dieses eigenthümliche Salz bereits im Jahre 1872 beschrieben,[1] übersah damals aber den allerdings geringen Natrongehalt, welcher von dem angewandten Uranylacetat herrührte, welches eine gewisse Menge essigsauren Uranyl-Natrons enthielt.

Die Krystalle gehören, wie schon gesagt, dem sechsgliedrigen System an. Es sind Combinationen eines Rhomboeders r (als Hauptrhomboeder betrachtet), dem ersten schärferen $^2r'$, einem Dihexaeder zweiter Ordnung d aus der Diagonalzone von $^2r'$, dem vierfach schärferen Rhomboeder erster Ordnung ^4r, den beiden Prismen p und a und der Endfläche c. Fig. 9.

[1] Poggend. Ann. 145, 158.

Digitized by Google

$$r = a : a : \infty a : c$$
$$^4r = a : a : \infty a : 4c$$
$$^2r' = a' : a' : \infty a : 2c$$
$$d = a : {}^1/_2 a : a : {}^4/_3 c$$
$$p = a : a : \infty a : \infty c$$
$$a = a : {}^1/_2 a : a : \infty c$$
$$c = c : \infty a : \infty a : \infty a$$

		Berechnet	Beobachtet	
2A	p =	109° 36′	109° 38′	
	$^2r'$ =	81 52		
	^4r =	67 0		
d	2A =	126 32	125 55	
	2C =	128 14	127 50	
r : c =			*138 16	
r : p =		131 44		
$^2r'$: c =		119 16	119 18	
$^2r'$: p′ =		150 44		
r : $^2r'$ =		102 28	102 22	Endk.
		130 56	130 30	Seitk.
^4r : c =		105 40	106	ungef.
^4r : r =		147 24	147 20	
d : c =		115 53	115 40	
d : a =		154 7	154 0	
d : $^2r'$ =		153 16	153 5	

$$a : c = 1 : 0.7725.$$

Die Krystalle sind oft tafelartig nach c. Unter den Rhomboedern herrscht $^2r'$ vor, während ^4r nur ganz schmale Abstumpfungen der horizontalen Combinationskanten von r und $^2r'$ bildet.

Beziehungen zwischen Form und Zusammensetzung.

Die beschriebenen Doppelsalze sind wegen dieser Beziehungen von grossem Interesse.

Wir finden zunächst die Gruppe der Alkalidoppelsalze, in welchen (ausgenommen das Thalliumsalz) stets 1 At. Alkalimetall gegen 1 At. Uran enthalten ist. Auch das Silbersalz gehört hierher.

Von diesen Salzen sind das Natron- und das Ammoniaksalz wasserfrei, das Kali-, und das Silbersalz enthalten 1 Mol. Wasser. Das Natronsalz ist regulär, die übrigen sind viergliedrig.

Isomorph sind das Kali- und Silbersalz, denn ihre Hauptaxen verhalten sich = 5 : 6, und ein Oktaeder $a : a : {}^5/_6 c$ beim Silbersalz würde mit a : a : c des Kalisalzes vollkommen übereinstimmen, insofern

Digitized by Google

	o$^5/_6$ Silbersalz	o Kalisalz
2 A =	103° 30′	103° 26′
2 C =	122 14	122 21

Dagegen dürfte das wasserfreie Ammoniaksalz mit jenen beiden wohl nicht isomorph sein, wiewohl die Winkel seines dreifach schärferen Oktaeders und die des Hauptoktaeders des Silbersalzes Annäherungen zeigen.

	o^3 Ammonsalz	o Silbersalz
2 A =	101° 34′	100° 2′
2 C =	126 50	130 38.

Es wurde auch bereits hervorgehoben, dass das Ammoniaksalz in der That wasserfrei ist.

Die Salze von Baryt, Strontian und Kalk, welche 2 At. Uran und 6 Mol. Wasser enthalten, bilden offenbar eine besondere isomorphe Gruppe. Während die Form des Barytsalzes sich nicht gut bestimmen lässt, stimmen die beiden anderen, wie ich im Vorhergehenden zeigte, derart überein, dass sie, trotz der Verschiedenheit des Krystallsystems, als isomorph anerkannt werden müssen.

Am meisten entwickelt aber ist die Isomorphie bei den Salzen der sogenannten Magnesiumreihe. Meine Untersuchungen haben die Thatsache festgestellt, dass das Magnesium sowohl wie das Mangan zwei verschiedene Salze geben, und dass hier überhaupt folgende Gruppen zu unterscheiden sind:

A. Salze mit je 1 At. R und U und 6 Mol. Wasser. Sie sind zweigliedrig.

	a : b : c
a) das Mangansalz II	0.633 : 1 : 0.394
b) das Kadmiumsalz	0.629 : 1 : 0.390

B. Salze mit 1 At. R und 2 At. U und 7 Mol. Wasser. Gleichfalls zweigliedrig.

a) das Magnesiasalz II	0.894 : 1 : 0.992
b) das Zinksalz	0.875 : 1 : 0.949
c) das Nickelsalz	0.867 : 1 : 0.950
d) das Kobaltsalz . . .	0.875 : 1 : 0.948
e) das Eisensalz	Sehr nahe ebenso.

C. Salze gleicher Art, jedoch mit 12 Mol. Wasser. Ebenfalls zweigliedrig.

a) das Magnesiasalz I	0.747 : 1 : 0.508
b) das Mangansalz I	0.753 : 1 : 0.496.

Digitized by Google

Fig. 1.

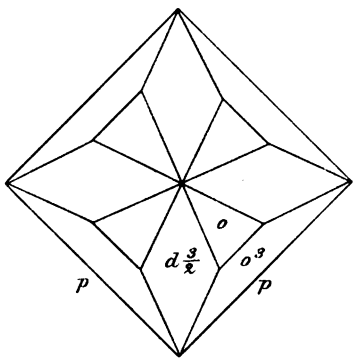


Fig. 2.

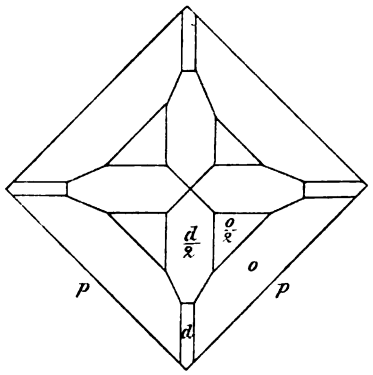


Fig. 4.

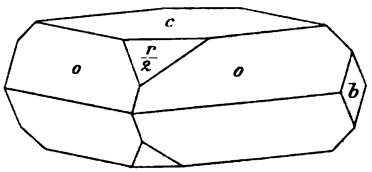


Fig. 3.

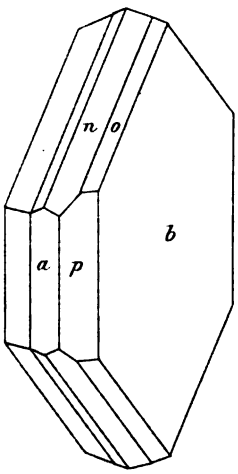


Fig. 5.

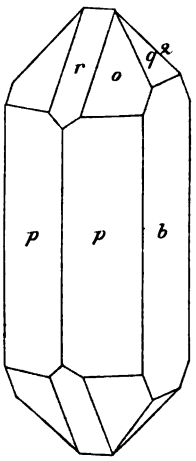


Fig. 6.

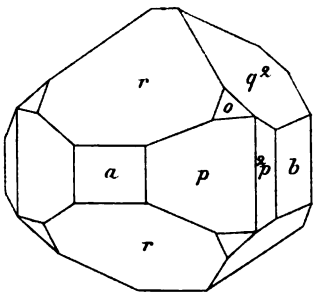


Fig. 7.

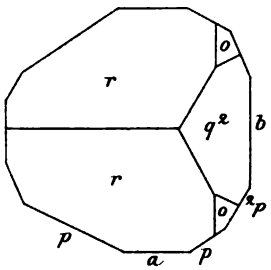


Fig. 8.

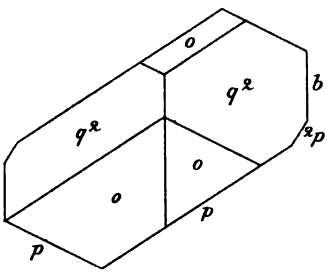
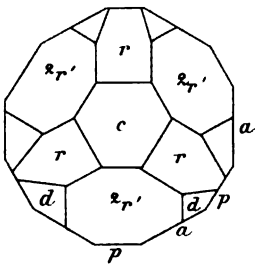


Fig. 9.



Rammelsberg: Ueber die essigsauren Doppelsalze des Urans.

Digitized by Google

Digitized by Google

Zur Analyse von Uranverbindungen.

Die vorliegende Arbeit gab Anlass, Erfahrungen über die Trennung des Urans von anderen Elementen zu sammeln.

Von Kalium, Natrium oder Lithium trennt man das Uran am besten, indem man das Salz glüht und das uransaure Alkali nach H. ROSE mit Chlorammonium gemischt in Wasserstoff erhitzt. Wasser zieht das Alkalichlorid aus.

Thallium wird durch Jodkalium gefällt.

Baryum, Strontium, Calcium und Blei werden durch Schwefelsäure, eventuell unter Zuzatz von Alkohol, gefällt.

Die Fällung des Urans durch kohlensauren Baryt ist bei Magnesium und Zink nicht anwendbar. Im ersten Fall bleibt häufig etwas Uran, auch bei Wiederholung der Operation, in der Flüssigkeit, und Zink wird durch kohlensauren Baryt theilweise mit niedergeschlagen. Nur bei Nickel und Kobalt habe ich mich dieser Trennungsmethode bedient.

Magnesium trennt man von Uran dadurch, dass man die schwach saure Lösung mit frischbereitetem Ammonhydrosulfür fällt, welches frei von kohlensaurem Ammon sein muss.

Mangan scheidet man, indem man die Lösung mit kohlensaurem Ammon im Ueberschuss versetzt und mit Ammonhydrosulfür fällt. Ebenso verfährt man beim Zink.

Kadmium und Kupfer werden aus saurer Lösung durch Schwefelwasserstoff gefällt. Jenes wird als Schwefelmetall bestimmt.

Digitized by Google

Digitized by Google

38. Bericht über eine Reise in den centralen chileno-argentinischen Andes.

Von Dr. Paul Güssfeldt
in Berlin.

(Vorgelegt von Hrn. Auwers am 10. Juli; — gedruckt im Bericht vom 24. Juli [St. XXXVIII]; — ausgegeben am 31. Juli.)

1. Einleitung. Reisegebiet. — 2. Bedingungen der Reise. — 3. Liste der Instrumente und Beobachtungsverhältnisse. — 4. Gesundheitszustand. — 5. Die centralen chileno-argentinischen Andes; Bau-, Physiognomie-, Vegetations- und Eis-Verhältnisse; nieve penitente. — 6. Astronomische Ortsbestimmungen. — 7. Barometrische Höhenmessungen. — 8. Trigonometrische Höhen- und Distanzmessungen: *a.* Vermessung im Cypressenthal; *b.* Vermessung des Vulcan Overo; *c.* Vermessung des Vulcan Maipo; *d.* Vermessung der Ramadakette; *e.* Vermessung des Aconcagua. — 9. Erdmagnetische Messungen. — 10. Photographische Aufnahmen. — 11. Einwirkung der dünnen Luft auf den menschlichen Körper. — 12. Sammlungen. — 13. Schlusswort.

Anlage I: Prof. Dr. Ascherson's Bericht über die Pflanzensammlung. — Anlage II: Notiz über Vegetationsgrenzen und die Schneegrenze.

1. Einleitung. Reisegebiet.

Der folgende Bericht fasst die Resultate einer Reise zusammen, welche in den Monaten November 1882 bis März 1883 in den centralen chileno-argentinischen Andes von mir ausgeführt wurde. Das Gebiet liegt zwischen dem 32. und 35. Grad südlicher Breite, wird im Osten durch die argentinische Pampa, im Westen durch den stillen Ocean begrenzt; es trägt ein wildes Hochgebirge, das sich in dem Aconcagua (6970^{m}) zum höchsten Gipfel America's erhebt, das nur in den unteren Theilen oder längs weniger, quer hinüber gelegter Maulthierpfade bekannt ist und eine wissenschaftliche Exploration allen Zufälligkeiten einer Pionierreise aussetzt. Es handelte sich für mich darum, eine Reihe fundamentaler Fragen zu beantworten, welche das Hochgebirge im Allgemeinen charakterisiren und deshalb Vergleichspunkte zu anderen Hochgebirgen liefern. Die grossen Züge des Gebirgsbaues, die Physiognomie der Landschaft, die Eisverhältnisse oberhalb der Schneegrenze, der Charakter der Vegetation und die Erscheinungsformen der Verwitterung, das waren die Punkte, die ich stets im Auge behielt, die ich täglich in wechselnden Formen beobachtete, und welche sich schliesslich aus einer Summe von Einzeleindrücken

Digitized by Google

mit typischer Schärfe heraushoben. Ausgedehnte Messungsreihen, mit geprüften Präcisionsinstrumenten erhalten, gaben den allgemeinen Betrachtungen eine exacte Zahlenunterlage.

Die Anschauungen und Erfahrungen, welche ich in den Alpen Europa's gesammelt hatte, bildeten das natürliche Fundament für meine Thätigkeit in den Andes Südamerica's; für die Auswahl, Behandlung und Verwerthung der Messungsinstrumente blieb maassgebend, was Reisen in Nord- und Aequatorial-Africa mir an die Hand gegeben hatten. Alle Aufzeichnungen wurden unter dem unmittelbaren Eindruck des Geschehenen gemacht und durch eine grosse Zahl photographischer Aufnahmen unterstützt.

2. Bedingungen der Reise.

Wenn auch die Mittheilung persönlicher Erlebnisse diesem Bericht entzogen bleibt, so müssen doch die allgemeinen Bedingungen, unter denen die Reise sich vollzog, hier eine Stelle finden. In erster Linie ist dabei hervorzuheben, dass das Reisen in den centralen chilenoargentinischen Andes nur während weniger Monate des Jahres — von Mitte December bis Mitte März — möglich ist, ja dass für die höchsten Theile des Gebirges diese Zeit noch Einschränkungen erleidet. Es erscheint daher doppelt erwünscht, dass man rechtzeitig ein festes Programm aufstellt und alle Vorbereitungen so trifft, dass kein Tag der guten Jahreszeit verloren geht. Aber bei meiner Landung in Chile war es nicht möglich, ein solches Programm aufzustellen, weil der natürliche Anhalt dafür: die zuverlässige Information fehlte. Es giebt nur eine bekannte Strasse über das Gebirge, die Strasse von Uspallata, welche den Verkehr zwischen Chile und Argentinien vermittelt; alle übrigen Pfade sind fast unbetreten und nur von einzelnen Eingeborenen benutzt, die ganz ausser Stande sind, den Reisenden zu orientiren. Ich konnte daher meinem Reiseplan nichts als die allgemeine Idee zu Grunde legen, die Andeskette möglichst oft hin und her zu überqueren und auf dem Wege passende Standquartiere zu nehmen; die Wahl des Weges musste von der Kenntniss und dem guten Willen der Begleiter abhängig gemacht werden, und erst in den Standquartieren konnte die eigene Initiative zur Geltung kommen.

Die Unbewohntheit der Cordillere und die schlechten Wege — soweit dieselben überhaupt vorhanden sind — machen für den Reisenden eine Karawane von Maulthieren und Pferden nöthig, sowie eine entsprechende Begleitmannschaft. Die Beschaffung solcher Karawanen zu Explorationszwecken ist im mittleren Chile mit grossen Schwierig-

Digitized by Google

keiten verbunden und eigentlich nur möglich, wenn die Grossgrundbesitzer sich dazu verstehen, dem Reisenden passende Leute und Thiere aus ihren eigenen Ländereien zur Disposition zu stellen. Die Zusammenstellung einer Karawane, ihre Verproviantirung u. s. w. erfordert Zeit, und weil es nicht möglich ist, während der ganzen Campagne dieselbe Karawane beizubehalten, so geht durch den Wechsel inmitten der guten Jahreszeit ein Theil der allein brauchbaren Zeit verloren. Im Laufe dreier Monate musste ich zweimal mit den Thieren, einmal mit den Leuten wechseln.

3. Liste der Instrumente und Beobachtungsverhältnisse.

Über die instrumentale Ausrüstung und die bei den Beobachtungen maassgebenden Verhältnisse ist Folgendes hervorzuheben.

Aus Europa hatte ich mitgebracht:

a) ein Universal-Instrument mit fünfzölligen Kreisen und mikroskopischer Ablesung,
b) einen sechszölligen Sextanten,
c) ein Magnetometer,
d) einen Prismencompass,
e) zwei Quecksilber-Barometer FORTIN'scher Construction,
f) fünf Kochthermometer von BAUDIN,
g) drei Aneroide,
h) eine Anzahl BAUDIN'scher Thermometer,
i) zwei Ankeruhren zur Zeitübertragung und ein Taschen-Chronometer für die astronomischen Beobachtungen,
k) eine photographische Camera,
l) eine zusammenschiebbare Stange aus Messing von 6^m Länge (für Basismessungen).

Alle diese Instrumente mussten in dem schwierigen Terrain auf dem Rücken der Maulthiere fortgeschafft werden; sie blieben in stetem Gebrauch und erhielten sich, Dank der zweckentsprechenden Verpackung, in vorzüglichem Zustand. Die zeitübertragenden Uhren kamen nie zum Stillstand und wurden täglich zu derselben Stunde aufgezogen.

Von den Quecksilber-Barometern blieb das eine an dem Ausgangspunkt der Expedition zurück und diente bei der Rückkehr als Control-Instrument für etwa eingetretene Veränderungen an dem Reise-Barometer. Dieses trug ich stets selbst, sowohl im Sattel wie bei Fusswanderungen, und erreichte dadurch, dass es nicht nur unzerbrochen blieb, sondern dass auch die Correction sich nicht änderte. Die Erfahrung ergiebt, dass bei richtiger Lage die Stösse und schütteln-

Digitized by Google

den Bewegungen des Reitens und Marschirens dem Instrument nicht schädlich, vielleicht sogar nützlich sind, weil möglicherweise ein Austreiben eines eingetretenen Luftbläschen stattfinden kann. Da auch alle trigonometrischen Höhenmessungen sich auf die Angaben des Barometers gründeten (die Höhenlage der Endpunkte der trigonometrischen Basis wurde barometrisch bestimmt), so musste der Erhaltung des leicht zerbrechlichen Instruments jede denkbare Sorgfalt gewidmet werden. Leider wird der Reisende dadurch während eines Marsches der Gefangene seines Barometers; seine Beweglichkeit, das Sammeln von Pflanzen und Schlagen von Gesteinen wird empfindlich beschränkt. Bei der exacten Construction der modernen Kochthermometer und der befriedigenden Übereinstimmung ihrer Messungsresultate mit denen des Quecksilber-Barometers wird sich für erste Explorationen der ausschliessliche Gebrauch dieser nützlichen, leicht und sicher transportirbaren Instrumente empfehlen.

Für die astronomischen Ortsbestimmungen, trigonometrischen Vermessungen und photographischen Aufnahmen muss die Reinheit der Atmosphäre während des Hochsommers als bester Bundesgenosse des Reisenden angeführt werden; nur ist dabei zu betonen, dass im Innern der Cordillere lang anhaltende Unwetter und Schneegestöber vorkommen können, und dass auf eine absolute Zuverlässigkeit des Wetters nicht gerechnet werden darf. Der fast continuirlich wehende, oft zum Sturm gesteigerte Wind giebt der Witterung ihren eigentlichen Stempel und greift am tiefsten in die Existenz und die Thätigkeit des Reisenden ein; er verbietet den Gebrauch eines Zeltes, macht denselben wenigstens so ungewiss, dass ich lieber ganz und gar darauf verzichtete. Nahezu 60 Biwaks, zum Theil in Höhen von 3000—5300^{m}, mussten aus diesem Grunde ohne Zelt durchgemacht werden, oft bei bitterer Kälte: ein Umstand, welcher die physische Elasticität naturgemäss beeinträchtigt. Eine grosse Zahl von Beobachtungen wurde störend von dem Winde beeinflusst; ja diese mussten zuweilen ganz unterbrochen werden, weil Instrument und Stativ in Gefahr standen, umgeweht zu werden. Einstellungen und Ablesungen wurden erschwert durch das Zittern des Instruments, die Schwankungen des Körpers, das Thränen des Auges, das allmähliche Starrwerden der Hände. Das unstäte Hin- und Herspielen des Höhenniveau's wurde bei dem Gebrauch des Universalinstruments oft zu einer Fehlerquelle für die beobachteten Zenitdistanzen. Photographische Aufnahmen konnten häufig nur dadurch erzielt werden, dass das Einlullen des Windes für wenige Secunden abgewartet wurde. Das Herausnehmen der exponirten Platten aus den Cassetten, das Einlegen neuer Platten, das Verpacken der alten erforderten einen

Digitized by Google

dunklen Raum, welcher in meinem zeltlosen Biwak nur schwer herzustellen war, und dessen minime Dimensionen den vom Tagesritt oder Tagesmarsch ermüdeten Körper oft zu schmerzhaften Contractionen verurtheilten.

Unter solchen Umständen können die Messungsresultate nicht denselben Grad von Genauigkeit beanspruchen, wie die mit denselben Instrumenten von demselben Beobachter auf einer Sternwarte erhaltenen. Da jedes Resultat aus einer Reihe von Einzelbeobachtungen erhalten ist, deren jede berechnet wurde, so lässt sich das Maass der Zuverlässigkeit der Beobachtung stets direct entnehmen. Die Genauigkeit hätte viel weiter getrieben werden können, als sie es wurde. Ich verzichtete aber darauf nach dem Princip, dass ein Reisender nicht genauer beobachten soll, als es der Zweck gebietet. So thöricht ein Rechner erscheint, der mit sechsstelligen Logarithmen rechnet, wo fünf Stellen genügen würden, so wenig kritisch und seinen anderweitigen Obliegenheiten präjudicirend geht der Reisende zu Werke, wenn er nach Zehnteln von Secunden strebt, wo Zehntel von Minuten ausreichen.

4. Gesundheitszustand.

Abgesehen von dem Umstande, dass ich auf kurze Zeit von einer Zahnfistel heimgesucht wurde, blieb ich während der ganzen Dauer der Reise gesund und habe meine Arbeiten an keinem Tage zu unterbrechen brauchen. Immerhin waren die Anforderungen, welche die Reise gleichzeitig in physischer und geistiger Beziehung stellte, verbunden mit Aufregungen und Fährlichkeiten aller Art, so gross und wurden durch eine angeschlossene Reise nach Bolivien so wenig abgeschwächt, dass mit der Rückkehr nach Europa die unverkennbaren Folgen der Überanspannung zu Tage traten.

5. Die centralen chileno-argentinischen Andes; Bau, Physiognomie, Vegetations- und Eis-Verhältnisse; nieve penitente.

Bleibt man sich der Rolle bewusst, welche die klimatischen und meteorologischen Factoren in der Gestaltung der Landschaftsphysiognomie spielen, so muss man für die Andes Südamerica's eine grosse Verschiedenheit der einzelnen Gebirgsabschnitte erwarten, denn bei ihrer meridionalen Erstreckung durchschneidet die fast eintausend Meilen lange Cordillere 62 Breitegrade, von denen etwa 33 dem Tropengebiet angehören, und der Rest in subtropischen, gemässigten und antarktischen Zonen liegt; während im Norden Palmenwälder den

Digitized by Google

Fuss des Gebirges schmücken, erreichen im Süden Gletscher das Niveau des Meeres. So theilt der meridionale Verlauf der Andes dieses Gebirge in eine Folge natürlicher Breiten-Zonen, in deren jeder die Wirkungen der Sonne, der Tageslänge, der Niederschläge, der Luftbewegung, der mittleren Jahrestemperatur und der täglichen Temperatur-Curve ihren physiognomischen Ausdruck finden.

Eine solche natürliche Zone ist die der centralen chileno-argentinischen Andes; sie wird annähernd durch den 32. und 35. Grad südlicher Breite bestimmt; nördlich von derselben liegt ein durch Trockenheit, südlich ein durch reiche Niederschläge ausgezeichnetes Gebirgsland.

Das Gebiet der centralen chileno-argentinischen Andes würde in einer schematischen Zeichnung durch zwei Parallelketten charakterisirt werden, denen auf der Seite des Stillen Oceans eine Küsten-Cordillere vorgelagert ist. Die westliche Kette trägt die Wasserscheide des pacifischen und atlantischen Meeres, und die östliche Kette wird an mehreren Stellen von den Wasserläufen durchbrochen, welche in der Mulde zwischen beiden Ketten entspringen. Der Bau dieser Mulde ist möglicher Weise einfach, und wenn er erst völlig entziffert sein wird, mit wenigen Strichen zu zeichnen. Dem Auge des Reisenden, den kein Kartenbild unterstützt, erscheinen bei dem ersten Besuch die Verhältnisse sehr complicirt. Ein klar ausgesprochenes Hochthal zwischen beiden Ketten existirt nicht; nur auf gewissen Strecken kann eine Längsthalbildung zwischen beiden Ketten verfolgt werden, im Übrigen setzen die aufgeworfenen Querriegel immer wieder Joche an die Stelle der Thalsohle. Die genauere Durchforschung dieser Mulde würde die natürliche Fortsetzung der von mir eingeleiteten Forschung sein; aber die Schwierigkeiten dieses wesentlich orographischen Problems sind grosse: das zu untersuchende Terrain hat eine Längserstreckung von vierzig deutschen Meilen, es ist völlig unbewohnt, seine mittlere Erhebung übersteigt wahrscheinlich den Werth von 3000^{m}; es wird nur an wenigen Stellen in transversaler Richtung von Maulthierpfaden durchschnitten, bietet in longitudinaler Richtung Wegeschwierigkeiten, denen kaum ein Alpenwanderer gewachsen ist, und die von der unentbehrlichen Maulthier-Karawane überwunden werden sollen; die Existenz vereinzelt auftretender Futterplätze ist unbekannt, und höchstens drei Monate des Jahres können für die Exploration benutzt werden. Für eine energische Durchführung der Aufgabe genügen die einheimischen Begleiter allein nicht, obwohl sie sehr brauchbar sind; ohne europäische Alpenführer bleibt der Reisende ein gefesselter Mann und wird ihm das Betreten aussichtsreicher Gipfelpunkte, auf welche die Aufgabe hinweist, nur ausnahmsweise möglich. Ob aber die aus Europa übergeführten Leute sich bewähren

Digitized by Google

werden, ist im Voraus mit Sicherheit nicht zu ermessen, selbst wenn sie in der Heimath die schwersten Proben bestanden haben.

Auch die Aussenflanken der beiden Hauptketten, also die Rahmen der soeben erwähnten Mulde, stellen einen complicirteren Bau dar, als die herrschenden Vorstellungen vermuthen lassen. Gegen den Stillen Ocean sendet die westliche Haupt-Cordillere Seitenketten aus, die nur selten recktwinklig zur Hauptaxe stehen und welche durch eine ganze Reihe von Verzweigungen niederer Ordnung ein vielgliedriges Alpenland erzeugen. Zwar ist die Anzahl der Flüsse, welche die Cordillere verlassen und dann in künstlichen Rinnsalen das Vorland befruchten, eine beschränkte, aber ihre Entstehung aus Gletscher- und Gebirgsbächen eine sehr mannigfaltige. Das Stromgebiet eines jeden dieser Flüsse ist eine Alpenlandschaft, zu deren gründlicher Untersuchung die Zeit eines Hochsommers kaum ausreicht. Nicht eine ansteigende Fläche, sondern ein Wirrsal hinter einander aufgebauter Kämme vermittelt den Übergang von dem Fuss dieser Andes zu ihrer Kammlinie, und nur ausnahmsweise enthüllt sich dem Blick aus der Tiefe das Profil der grossen Meeresscheide; im Allgemeinen wird die scheinbare Kammlinie, wie sie das Auge gegen den Himmel projicirt, von Seitenketten gebildet.

Ein charakteristischer Zug in der Bildung der Thäler wird durch die Sprache selbst angedeutet; nicht *valle* — Thal —, sondern *cajon* — Kasten — werden viele der Hauptthäler genannt; das will aussagen, dass dieselben in ihrem unteren Gebirgslaufe verhältnissmässig geringes Gefäll haben und zu einem Kessel mit steilen Wänden führen, welche in einer Vegetationszone aufsetzen und im ewigen Eise enden. Auch in dem Aufbau der Thalgehänge ist man berechtigt von einem Grundtypus zu sprechen; die aufbauenden Elemente sind hier die Geröllhalde und das mauerartig durchbrechende Gestein; das anstehende Gestein lässt in den meisten Fällen deutliche Schichtungen oder bankartige Plattenbildungen erkennen, während die Halden durch vortretende, nahezu horizontale Leisten gegliedert sind. Diese Bildungen werden in Relief gesetzt durch die Verschiedenheit der oft lebhaften Färbungen. Die Farben von Schutt und Gestein spielen eine grosse Rolle in dem Gesammteindruck der Landschaft, und zwar nicht nur durch ihre Mannigfaltigkeit und reichen Wechsel, sondern auch wegen der untergeordneten Rolle, welche der Vegetation zukommt. So kräftig die letztere ist, so üppig der Pflanzenwuchs an einzelnen Stellen gedeiht, so grosse Freude der bunte Blüthenschmuck dem Wanderer bereitet: die Landschaft erscheint doch kahl, und nur der Unterlauf der Thäler, wo künstliche Bewässerung das ihrige thut, zeigt weite grüne Weideflächen und üppige Weizenfelder; aber jenseits

Digitized by Google

der Mauer, welche diesen Culturen als Einfriedigung dient, hört das gleichmässig bedeckende Pflanzenkleid auf, und entspriessen dem harten Thonboden nur einzelne Baumgruppen, Dorngesträuch, Bromeliaceen und Quisco-Cactus.

Die sporadische Vertheilung der Vegetation erschwert die Feststellung der oberen Vegetationsgrenze. Wo eine gleichmässig ansteigende Halde in Höhenregionen hineinragt, welche kein Pflanzenleben mehr zulassen, sind die Übergänge zu dem völligen Verschwinden der Gewächse so allmähliche, dass sich allenfalls eine Grenz-Zone, nicht aber eine Grenz-Linie bestimmen lässt. Wie bei der Schneegrenze, so wirken auch bei der Vegetationsgrenze nicht ein, sondern viele Factoren mit, die in verschiedenen Localitäten mit verschiedener Intensität wirken und den Mittelwerth bald im negativen, bald im positiven Sinn beeinflussen. Denn zu den rein klimatischen Factoren treten noch diejenigen der Bodengestaltung d. h. der grösseren oder geringeren Abschüssigkeit, ferner der Bodenzusammensetzung, der azimutalen Orientirung, und endlich des Windes, als eines mechanischen Factors.

So nothwendig auch für eine grosse zusammenfassende Betrachtung die Begriffe von Vegetations- und Schneegrenze sind, so muss doch der Reisende seiner eigentlichen Lebensquelle, der Anschauung, Rechnung tragen; er muss daran erinnern, dass vor dem leiblichen Auge die typischen Begriffe sich auflösen zu jener Mannigfaltigkeit, welche jedem Theil der Erdoberfläche das ihm eigenthümliche, locale Gepräge giebt (siehe Anlage II.).

Was nun die höchsten Regionen der centralen chileno-argentinischen Andes betrifft, so interessiren dabei in erster Linie die absoluten Höhenangaben und die Verhältnisse der Eisbedeckung.

An den vier Punkten, wo ich die Wasserscheide überschritt, hat die Messung folgende Höhen ergeben: Atravieso de la Leña 4107^m, Paso del Maipo 3473^m, Cumbre Iglesia 3750^m (Uspallataweg), Boquete del Valle hermoso 3565^m; zwischen diesen Höhen steigt die Kammlinie zu 6000^m und darüber auf. Die Pässe auf der zweiten Kette erreichen ähnliche Werthe (4200^m, 3741^m, 2894^m). Die höchsten Erhebungen finden sich nahe oder in dem Gebiete des Valle hermoso; sie treten meines Dafürhaltens aus Ketten hervor, die weder der Ost- noch der West-Cordillere angehören, sondern als laterale Abzweigungen der westlichen Hauptkette angesehen werden müssen; sie gehören der bereits erwähnten grossen Andes-Mulde an, von welcher ein Theil durch das Valle hermoso entwässert wird. Das Gebirgsland, welches die linke nördliche Seite des Valle hermoso bildet, enthält die Ramada-Kette, deren Gipfel höher als 6000^m sind; der höchste ist 6413^m hoch.

Digitized by Google

Der Vulcan Aconcagua erhebt sich in der Nähe des Ursprungs des Valle hermoso zu einer Höhe von 6970^{m}. Diese Angaben deuten darauf hin, dass die Kammlinien in ihrem Verlauf starke Höhenunterschiede zeigen, dass die Joche bedeutend von den Gipfeln überragt werden. In der That bildet der abrupte Verlauf der architektonischen Linien einen Grundzug des gewaltigen Baues, und das Mauerartige der Flächen drückt dem Ganzen den Stempel der Unnahbarkeit auf. Nur gewisse Vulcane, z. B. der Maipo, in einigen Theilen auch der Aconcagua, treten in Gegensatz zu der allgemeinen Zerrissenheit der Berglandschaft und zeigen geschwungene Linien.

Die Firn- und Eisbedeckung der centralen chileno-argentinischen Andes weicht im Allgemeinen von dem Typus, welchen die Alpen zeigen, stark ab. Dies ist vielleicht weniger auf die Niederschlagsmengen zurückzuführen, als auf die soeben angedeutete Gestaltung der höchsten Theile, welche der Ansammlung grosser, gletschererzeugender Firnmassen wenig günstig ist. Dass auch der Wind eine bedeutende Rolle bei der Wegführung des gefallenen Schnees spielt, kann kaum bezweifelt werden; nur so lässt sich beispielsweise erklären, dass die Nordwestseite des Aconcagua in einer Zone von 6000 bis 6600^{m} fast ganz schneefrei ist, obwohl sie eine riesige Halde darstellt, auf welcher sich der Schnee sehr gut halten könnte.

Wenn Felsmulden des Hochgebirges in einer Höhenzone verlaufen, deren Klima die Existenz von Gletschereis überhaupt möglich macht, d. h. wenn sie passend liegen; wenn sie ferner sanft geneigt und breit sind; wenn die oberen Firn-Reservoire, die als Quellseen dienen, grosse Massen Schnee aufspeichern können; und wenn die Grundbedingung einer zureichenden Niederschlagsmenge erfüllt ist: so werden wir grosse Gletscher haben. Diesen Anforderungen genügen die centralen chileno-argentinischen Andes am wenigsten in Bezug auf passend liegende und passend geneigte Felsmulden. Die Betten, in denen ein grossartiger Gletscher fliessen könnte, erfüllen entweder die klimatischen Bedingungen nicht mehr, d. h. sie liegen zu tief; oder sie liegen hoch genug, und dann sind sie zu stark geneigt. Man sieht die Grenzzone des ewigen Schnees nach unten durchbrochen von steilen, zwischen Felsmassen eingekeilten Eisläufen, die weit oberhalb der Thalsohlen enden; auch da, wo breitere Mulden in ein mit ewigem Schnee bedecktes Gehänge eingelassen sind, verschwindet das niederfliessende Eis, noch ehe die Basis erreicht ist. Die höchsten Gipfel zeigen nur selten eine continuirliche Schneebedeckung; die abrupten Felsformen wiederholen sich zu häufig, als dass nicht aller Orten das nackte Gestein zu Tage träte. Firnbrüche und Eiszerreissungen sind daher eine häufige Erscheinung, und die Umbildung des Schnees in

Digitized by Google

Eis ist bis in die höchsten Höhen zu verfolgen. So erhöht die Anordnung der Schneebedeckung das Unstäte in der Landschaft, deren öde Wildheit durch nichts gemildert wird, weder durch Wälder noch durch den Anblick von Wohnstätten oder Strassen.

Die Annahme, dass weniger die klimatischen Verhältnisse als die Tektonik eine verkümmerte Gletscherbedeckung für die centralen chileno-argentinischen Andes bedingen, wird durch eine Ausnahme bestätigt. In dem Cajon de los Cipreses fand ich die unverkennbaren Spuren einer früheren gewaltigen Gletscherbedeckung vor, und diesem Winke folgend, entdeckte ich einen noch vorhandenen grossen Gletscher erster Ordnung, den Ada-Gletscher, dessen Bett sowohl der Bildung wie der Höhenlage nach die Bedingungen für einen derartigen Gletscher erfüllt. Die genaueren Angaben finden sich in dem Abschnitt über die trigonometrischen Messungen.

Es muss hier noch einer absonderlichen Erscheinungsform des Hochschnees in den centralen chileno-argentinischen Andes Erwähnung gethan werden. Die Eigenthümlichkeit besteht in einer Umgestaltung der Schnee-Oberfläche zu parallelen Furchen und aufgeworfenen Furchenkämmen, welch' letztere zu den bizarrsten Eisfiguren ausgearbeitet sind; dieselben haben zuweilen eine Höhe, dass ein Reiter dazwischen verschwindet, wie zwischen den hochschaftigen Gräsern einer africanischen Savane. Wie charakteristisch diese Bildungen sind, beweist schon der Umstand, dass man ihnen einen besonderen Namen gegeben hat; sie heissen auf spanisch: *penitentes,* Arme Büsser. Begreiflicherweise begegnet man der beschriebenen Oberflächengestaltung in sehr verschiedener Ausbildung und in allen möglichen Übergangsstadien; auch fehlt es nicht an Schneehängen, welche frei von Furchung sind. In dem Phänomen spiegeln sich die besonderen meteorologischen Verhältnisse jener Andes wieder: kräftige Winde, welche Furchen und Rippen erzeugen, und eine starke Insolation, welche die Rippen zu Figuren modellirt. Dass die Insolation so wirkungsvoll ist, beruht auf drei Momenten: auf der geographischen Breite, welche zur Zeit des Hochsommers einen Zenitabstand der Sonne von nur 10° bedingt; auf der dünnen Luft, welche wenig absorbirt; endlich auf dem Umstand, dass gerade während der Monate des höchsten Sonnenstandes der Himmel nur selten bewölkt ist. In der Sohle breiter Hochthäler fand ich die Erscheinung des nieve penitente am vollendetsten entwickelt, und zwar in der Höhenzone von 3500 bis 4200^{m}; aber auch an den Hängen sah ich mächtige Felder dieser Art und verfiel anfänglich in den Irrthum, dort als Gletscher anzusprechen, was in Wirklichkeit ein Feld von nieve penitente war.

Digitized by Google

6. Astronomische Ortsbestimmungen.

Es wurden ausgeführt:

Polhöhe-Bestimmungen, Zeit- und Azimut-Bestimmungen. Das Universal-Instrument kam fast ausschliesslich zur Verwendung; vorübergehend wurde der sechszöllige, auf Excentricität geprüfte Sextant gebraucht; in der Regel wurde die Sonne beobachtet, Sterne nur ausnahmsweise. Die Polhöhen wurden ausschliesslich aus Circummeridian-Höhen abgeleitet, in dem Zeitintervall 10^m vor bis 10^m nach der Passage. Die Zeitbestimmungen wurden aus Zenitdistanzen erhalten; nur in den Baños de Cauquenes wurden auch Meridianpassagen beobachtet. Des Azimut A eines terrestrischen Objectes wurde aus der Formel hergeleitet:

$$A = M - S + a$$

wo M und S die azimutalen Ablesungen des Objectes und des Gestirns bedeuten und a das Azimut des letzteren; a ergiebt sich durch Rechnung, da der Stundenwinkel durch die Zeitbestimmungen bekannt ist.

Die Längendifferenzen sind durch Zeitübertragungen ermittelt worden; als Fundamental-Meridian diente der Meridian des Hauses Calle Compañia 167, Santiago, welches 4^s östlich von dem Observatorium der Quinta normal liegt. Die Leistungsfähigkeit der zeitübertragenden Uhren und die Anordnung des Weges, welcher für jede Einzel-Expedition eine Schleife bildet und die Herleitung mittlerer Gänge ermöglicht, erwiesen sich dieser Methode der Längenbestimmung besonders günstig.

Im Allgemeinen ist jedes Beobachtungsresultat aus 6 oder 4 Beobachtungen bei beiden Kreislagen des Instruments abgeleitet. Jede Beobachtung wurde einzeln von mir berechnet.

Im Ganzen sind berechnet worden:

234 Zenit-Distanzen für Zeitbestimmungen,
103 desgl. für Polhöhebestimmungen,
62 Azimuteinstellungen,
6 Meridian-Passagen,
1 Zeitbestimmung aus 3 Paaren correspondirender Höhen.

Die Resultate sind in den folgenden Tafeln enthalten.

Digitized by Google

A. Beobachtete Uhrcorrectionen.

E_χ = Taschen-Chronometer von Harburg & Weil, London, schlägt 0.40 Secunden,
E = Anker-Uhr " " " " " " 0.22 "
T = Anker-Uhr " Tiede, Berlin, " 0.20 "

Beobachtungsort	1882/83	δE_χ	δE	δT
		m s	m s	m s
Santiago (Compañia 167)	Nov. 20. 4h N.	— 4 12.7	+ 0 35.3	— 0 32.3
" "	" 23. 3.5 "	— 4 58.4	+ 1 2.4	— 0 42.6
" "	" 24. 3.3 "	— 5 7.9	+ 1 14.5	— 0 44.3
Baños de Cauquenes	" 26. 3.9 "	— 5 6.5	+ 2 0.3	— 0 28.0
" " "	" 27. 3.6 "	— 5 17.5	+ 2 14.9	— 0 43.9
" " "	Dec. 2. 3.4 "	+ 0 17.4	+ 3 11.5	— 1 6.5
" " "	" 5. 3.4 "	— 0 23.7	+ 3 52.4	— 1 22.9
" " "	" 5. 4.0 "	— 0 20.4	+ 3 56.1	— 1 19.6
" " "	" 6. 9.6 V.	— 0 27.9	+ 4 2.7	— 1 20.0
" " "	" 6. 3.8 N.	+ 0 31.1	+ 4 12.8	— 1 20.1
Agua de la Vida	" 12. 8.4 V.	+ 0 24.6	+ 5 44.1	— 1 3.2
" " "	" 20. 9.1 "	+ 0 25.4	+ 7 16.4	— 1 55.3
Baños de Cauquenes	" 24. 4.2 N.	+ 1 43.2	+ 7 36.2	— 3 8.8
" " "	" 27. 7.8 V.	+ 1 7.3	+ 8 11.0	— 3 51.5
" " "	" 27. 9.1 "	+ 1 10.3	+ 8 13.9	— 3 50.4
" " "	" 28. Mittag	+ 0 57.5	+ 8 31.5	—
" " "	" 29. "	+ 0 44.9	+ 8 46.0	— 4 6.7
" " "	" 30. "	+ 0 28.0	+ 8 57.4	— 4 14.6
" " "	" 31. "	+ 0 12.9	+ 9 12.6	— 4 17.2
Maitenes	Jan. 2. "	+ 10 11.5	+ 10 22.0	— 3 51.7
Yeso-Biwak	" 3. 9h o N.	+ 10 51.6	+ 11 37.4	— 3 10.8
" "	" 3. 10.9 "	+ 10 55.9	+ 11 44.6	— 3 6.1
Laguna Argentina-Biwak	" 5. 8.2 "	+ 11 7.7	+ 12 33.5	— 3 6.2
Guanacostein-Biwak	" 7. 9.0 V.	+ 12 1.5	+ 13 35.1	— 2 39.5
" "	" 7. 10.2 "	+ 12 5.9	+ 13 32.3	— 2 44.5
Basalt-Biwak	" 9. 9.8 N.	+ 13 6.0	+ 15 2.1	— 2 26.4
Ranchito-Biwak	" 11. 9.6 "	+ 16 40.2	+ 16 12.9	— 1 52.9
Yaucha	" 14. 9.8 V.	+ 17 44.7	+ 17 55.3	— 1 4.5
"	" 14. 3.5 N.	+ 17 40.7	+ 17 59.2	— 1 3.3
"	" 15. 3.0 "	+ 17 49.3	+ 18 21.5	— 0 57.1
Maipo-Biwak	" 18. 3.5 "	—	+ 16 2.7	— 4 36.9
" "	" 20. 4.7 "	—	+ 16 29.5	— 4 52.8
Baños de Cauquenes	" 26. 3.8 "	+ 6 0.6	+ 15 6.4	— 9 10.4
" " "	" 27. Mittag	+ 5 58.4	+ 15 26.6	— 9 34.5
" " "	" 30. "	+ 5 28.5	+ 16 20.8	— 10 17.5
" " "	" 31. "	+ 5 12.3	+ 16 29.9	— 10 36.2
Santiago (Compañia 167)	Febr. 3. 3.7 N.	+ 4 12.0	+ 16 58.2	— 11 27.2
Hacienda Vicuña	" 12. 10.3 V.	+ 7 12.9	+ 19 22.3	— 13 22.0
" "	" 14. 8.8 "	+ 4 39.4	+ 19 49.0	— 13 48.7
Aconcagua-Biwak	" 20. 9.4 "	—	+ 23 39.8	— 12 28.0
" "	" 23. 9.2 "	—	+ 23 56.9	— 12 41.4
Caleta-Biwak	" 25. 9.4 "	—	+ 23 59.4	— 13 11.9
Valle hermoso-Biwak	" 27. 10.0 "	—	+ 24 37.9	— 13 0.5
" " "	März 2. 8.8 "	—	+ 25 1.9	— 13 28.4
Aconcagua-Biwak	" 6. 9.3 "	—	+ 25 46.2	— 13 31.9
" "	" 8. 8.5 "	—	+ 26 1.8	— 13 41.2
Hacienda Vicuña	" 12. 8.6 "	—	+ 23 58.7	— 16 42.1
" "	" 15. 8.4 "	+ 7 46.8	+ 24 41.6	— 16 50.6
" "	" 15. 3.3 N.	+ 7 49.8	+ 24 48.2	— 16 48.7
Santiago (Compañia 167)	" 16. 3.4 "	+ 8 3.9	+ 25 16.3	— 16 43.9
" "	" 21. 3.4 "	+ 7 28.2	+ 26 19.8	— 17 26.3

Digitized by Google

B. Polhöhen.

Ort	1882/83	Polhöhe.
Baños de Cauquenes.....	Dec. 6	34° 14′ 25″ Süd
" " "	" 7	34 14 55 "
Agua de la Vida	" 14	34 30 42 "
Maitenes	Jan. 2	34 19 29 "
Yeso-Biwak.....	" 3	34 25 8 "
Laguna Argentina-Biwak.....	" 5	34 30 14 "
Guanacostein-Biwak	" 7	34 35 10 "
Basalt-Biwak.....	" 9	34 33 33 "
Ranchito-Biwak.....	" 11	34 41 58 "
Yaucha	" 15	34 7 50 "
Maipo-Biwak.....	" 18	34 13 55 "
Hacienda-Vicuña.....	Febr. 16	32 35 44 "
Aconcagua-Biwak	" 23	32 31 20 "
Caleta-Biwak	" 25	32 20 11 "
Valle hermoso-Biwak.....	" 27	32 16 2 "

Aus Tabelle A folgt direct:

C. Mittlerer täglicher Gang der Uhren *E* und *T*.

Ort der Beobachtung	Epoche	Tage	Gang von *E*	Gang von *T*	
			s	s	
Santiago	Nov. 20 bis März 21	121	+ 12.76	— 8.38	
"	" 20 " Febr. 3	75	+ 13.11	— 8.73	
"	Febr. 3 " März 21	46	+ 12.21	— 7.81	
"	März 16 " " 21	5	+ 12.70	— 8.48	Ruhe
"	Nov. 26 " Jan. 31	66	+ 13.18	— 9.22	
Baños de Cauquenes.	" 26 " Dec. 31	35	+ 12.35	— 6.55	
" " "	Dec. 31 " Jan. 31	31	+ 14.11	— 12.23	Andes-Expedition
" " "	" 31 " " 27	27	+ 13.85	— 11.75	
" " "	Jan 27 " " 31	4	+ 15.83	— 15.42	Ruhe
" " "	Nov. 26 " Dec. 5	9	+ 12.46	— 6.10	
" " "	Dec. 5 " " 24	19	+ 11.58	— 5.75	Andes-Expedition
" " "	" 24 " " 31	7	+ 14.06	— 9.97	Ruhe
Agua de la Vida ...	" 12 " " 20	8	+ 11.54	— 6.51	Besteigungen
Hacienda Vicuña ...	Febr. 14 " März 12	26	+ 9.60	— 6.67	Andes-Expedition
" " ...	" 12 " Febr. 14	2	+ 13.85	— 13.70	Ruhe
" " ...	März 12 " März 15	3	+ 14.30	— 2.83	Ruhe
Aconcagua-Biwak ..	Febr. 20 " " 8	16	+ 8.89	— 4.59	Aconcagua-Exploration
" " ..	" 27 " " 2	3	+ 8.13	— 9.40	

Digitized by Google

Durch Ausgleichung ergeben sich folgende

D. Angenommene mittlere Gänge.

Strecke	Epoche	Tage	Gang von E	Gang von T	
			s	s	
Cauquenes-Vicuña	Jan. 31 bis Febr. 12	12	+ 17.59	— 10.68	
Santiago-Vicuña	Febr. 3 » » 12	9	+ 18.33	— 10.99	
Cauquenes-Yaucha	Dec. 31 » Jan. 14	14	+ 13.00	— 10.62	Andes-Expedition
Yaucha-Cauquenes	Jan. 14 » » 27	13	+ 14.75	— 12.97	» »
Vicuña-Aconcagua Bk. .	Febr. 14 » Febr. 20	6	+ 10.77	— 11.76	» »
Aconcagua Bk.-Vicuña .	März 8 » März 12	4	+ 10.77	— 6.39	» »

Mit Hülfe der Tabellen A, C, D sind die folgenden Längendifferenzen berechnet:

E. Längendifferenzen für den Meridian Santiago, Calle Compañia 167.

	m	s	
Cauquenes (Baños)	0	19.8	Ost
Maitenes	1	4.1	»
Yeso-Biwak	2	4.0	»
Laguna Argentina-Biwak ..	2	30.0	»
Guanacostein-Biwak	3	9.9	»
Basalt-Biwak	4	2.0	»
Ranchito-Biwak	4	50.4	»
Maipo-Biwak	3	4.2	»
Yaucha	6	1.9	»
Agua de la Vida	3	51.0	»
Aconcagua-Biwak	2	25.0	»
Valle hermoso-Biwak.....	2	32.9	»
Caleta-Biwak	2	9.3	»
Hacienda Vicuña	0	16.9	West

Santiago Observatorio $4^h\ 42^m\ 42^s$ W. von Greenwich (= 70° 40′ 30″).
Calle Compañia 167 liegt 4^s E. vom Observatorio.
Santiago Calle Compañia 70° 39′ 30″ W. von Greenwich.

Aus den Tabellen B und E und mit Heranziehung der barometrischen und trigonometrischen Höhenmessungen, welche weiter unten hergeleitet sind, folgt:

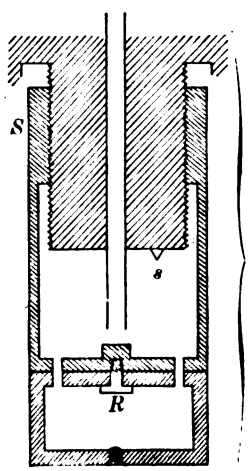
Digitized by Google

F.

Ort	Länge West v. Greenwich	Polhöhe Süd	Abs. Meereshöhe
Santiago (Observatorio)	70° 40′5	33° 26′7	535 m
" (Compañia 167)	70 39·5		
Baños de Cauquenes	70 34·5	34 14·7	766
Agua de la Vida	70 26·7	34 30·7	1628
Maitenes	70 23·5	34 19·5	1106
Yeso-Biwak	70 8·5	34 25·1	2220
Laguna Argentina-Biwak	70 2.0	34 30.2	3441
Guanacostein-Biwak	69 52.0	34 35.2	3024
Basalt-Biwak	69 39.0	34 33.6	1968
Ranchito-Biwak	69 26.9	34 42.0	1540
Maipo-Biwak	69 53·4	34 13·9	3306
Yaucha (Pampa)	69 9.0	34 7.8	1443
Aconcagua-Biwak	70 3.2	32 31.3	3582
Valle hermoso-Biwak	70 1.3	32 16.0	2913
Caleta-Biwak	70 7.2	32 20.2	3027
Hacienda Vicuña	70 43·7	32 35·7	906
Maipo, zweiter Zacken = β	69 51.6	34 10.0	5313
Aconcagua, höchste Spitze = N	69 59·5	32 39·0	6970
Ramada-Kette, Punkt r	70 2.7	32 4.1	6228
" " " c	70 0.6	32 6.1	6153
" " " e (Montenegro)	69 57.1	32 5.5	6414
Cerro Overo (Vulcan)	69 58.8	34 34·0	4740

7. Barometrische Höhenmessungen.

Die beiden Quecksilber-Barometer, welche zu den Höhenmessungen in der Cordillere verwandt wurden, waren zu dem Zweck der Reise von Negretti und Zambra in London construirt; es sind Gefäss-Barometer mit den Nummern 1088 und 1310. Instrument 1088 trägt die gewöhnliche Einrichtung FORTIN'scher Barometer (Ledersack und Endschraube); Instrument 1310 hat eine davon verschiedene Einrichtung, welche den Gebrauch bei niedrigem Luftdruck erleichtert: das Gefäss *V* besitzt am unteren Ende eine leere Kammer *R*, zerfällt also in die Theile *V*-*R* und *R*; sie sind durch eine doppelte Scheidewand von einander getrennt, deren jede zwei kleine Öffnungen besitzt. Bei einer bestimmten Stellung der drehbaren Kammer *R* fallen dieselben paarweise auf einander und bewirken eine Verbindung zwischen *V*-*R* und *R*. Hängt



Digitized by Google

man das Instrument alsdann auf, so fliesst das Quecksilber aus dem oberen Theil in die leere Kammer R, und es bedarf zur Einstellung der Spitze s einer um so viel geringeren Anzahl von Schraubendrehungen, als das Verhältniss der Höhe von R zu der Höhe eines Schraubenganges beträgt. Die einstellende Schraube S ist in einen eisernen Kolben eingeschnitten, die Schraubenmutter in die innere Wandung des Gefässes, so dass eine drehende Bewegung des letzteren die Einstellung der Spitze s bewirkt. Ein identisch construirtes Instrument wurde von Hrn. A. Stübel, der es in dieser Form ersann, bei seiner Forschungsreise in den tropischen Andes Südamerica's gebraucht. Da ich abwechselnd beide Barometer gebrauchte, so kann ich mein erfahrungsmässiges Urtheil dahin zusammenfassen, dass das Barometer mit dem Reservegefäss (1310) in grossen Höhen dem andern von gewöhnlicher Construction vorzuziehen ist; namentlich bei Kälte und Wind, wo es auf schnelles Arbeiten ankommt, wird das lange Drehen der Ledersack-Schraube zu einer peinlichen Beschäftigung.

Die beiden Barometer wurden unter einander und mit einem in Santiago befindlichen Normal-Instrument genau verglichen; da die Prüfung am Ende einer jeden Expedition ihre gute Erhaltung ausser Frage stellte, so kann die Fehlerquelle einer falschen Correction oder des Eintritts von Luft in den Tubus als nicht vorhanden angesehen werden. Die Fehlerquellen der barometrisch abgeleiteten Höhen liegen vielmehr in den Schwankungen des Luftdrucks für denselben Ort; die Berechnungen wurden unter der Voraussetzung des mittleren Luftdrucks von 716^{mm} für Santiago (535^{m}) durchgeführt. Sobald die synchronischen Beobachtungen des Observatoriums zu Santiago veröffentlicht sein werden, wird den von mir berechneten Werthen eine kleine Correction zugefügt werden. Es sei bemerkt, dass die mit dem Observatorio de Santiago verbundene meteorologische Station seit einer Reihe von Jahren (1869) ein Anuario de la Oficina Central meteorolójica herausgiebt, in welchem alle Beobachtungen in extenso publicirt sind. Die Veröffentlichung ist aber stark im Rückstand; auch darf derselben vorläufig wohl noch nicht das Gewicht beigelegt werden, wie analogen Veröffentlichungen unserer grossen europäischen Institute, bei welchen die Zuverlässigkeit der Instrumente Hand in Hand mit der Gewissenhaftigkeit der Beobachter geht.

Die Höhe der Baños de Cauquenes ist durch gleichzeitige barometrische Beobachtungen ermittelt worden; der Prof. der Physik Hr. Zegers beobachtete im physikalischen Cabinet der Universität Santiago, während ich in Cauquenes beobachtete.

Durch barometrische Ablesungen sind zunächst alle Biwak- und Lagerplätze bestimmt worden; ferner der eine oder die beiden End-

Digitized by Google

punkte der trigonometrischen Basen. Wo die Schwierigkeit des Terrains das Zurücklassen des Barometers rathsam erscheinen liess, kamen BAUDIN'sche Kochthermometer zur Verwendung; dieselben sind in o°1 C getheilt, und machen das Schätzen von Hundertel-Graden noch recht wohl möglich.

Mittels des Quecksilberbarometers allein, ohne Zuhülfenahme trigonometrischer Messungen wurden folgende Höhenzahlen gefunden:

Ort	Höhenzahl m	
Santiago de Chile	535	
Baños de Cauquenes	766	
Haus Chacayes	956	
Maitenes	1106	(Zusammenfluss Cypressen- u. Cachapualthal.)
Agua de la Vida	1628	
Mündung des Cortaderal in den Cachapual	1499	
Yeso-Biwak	2220	
Plazilla-Biwak (chilenische Seite)	2747	
Wasserscheide Atravrieso de la Leña	4107	
Laguna Argentina-Biwak (argentin. Seite)	3441	
Guanacostein-Biwak	3024	
Wiesen-Biwak	2626	
Basalt-Biwak	1968	
Regen-Biwak	2515	
Ranchito-Biwak	1540	
Yaucha (Pampa)	1443	
Schieferthon-Biwak	3163	
Pass Piedra Cruz (Ostkette)	3781	
Maipo-Biwak	3306	
Maipo-Basis (trigonometrische)	3483	
Chacayes-Biwak (Maipothal)	1756	
San Felipe Stadt	693	
Hacienda Vicuña	906	
Chaleco-Biwak	2254	
Rio Putaendo-Biwak	2424	
Wasserscheide Boquete Valle hermoso	3565	
Aconcagua-Standbiwak	3582	
Caleta-Biwak	3027	
Valle Hermoso-Biwak	2913	
Paguencillo-Biwak	2685	
»Letztes« Biwak	1434	

Digitized by Google

Mit Aneroiden, welche vorher und nachher in nahezu gleichen Höhen wie die bestimmten mit dem Quecksilber-Barometer verglichen wurden, fand ich:

Ort	Höhenzahl m	
Atravieso Laguna bei Piedra Cruz	3741	
Wasserscheide Maipo.....	3473	
Laguna del Diamante (Maipo Hochebene).....	3361	
Cajon ancho-Pass.....	3606	Pässe zwischen Hochthälern auf dem Wege von Biwak Laguna Argentina zum Guanacostein-Biwak.
la Iglesia	3638	

Die vorstehend gegebenen Werthe liefern die Fundamental-Punkte für das Profil des zurückgelegten Weges.

8. Trigonometrische Höhen- und Distanzmessungen.

Bei den trigonometrischen Messungen wurde die Basis nach einem Verfahren gemessen, dessen Vorzug in der Unabhängigkeit von der Ungunst des Terrains liegt; es beruht auf dem Princip der Vergrösserung einer bekannten kleinen Basis durch Winkelmessungen und wurde bereits mit Erfolg von Hrn. W. Reiss in den Andes von Columbien und Ecuador angewandt. Der genannte Reisende überliess mir die Messstange, welche auch ihm als »kleine Basis« gedient hatte, für meine Arbeiten; sie besteht aus sechs in einander schiebbaren messinggefertigten Hohl-Cylindern von je 1^m Länge, stellt also im ausgezogenen Zustand eine Länge von 6^m vor, die vor der Abreise durch Hrn. Prof. Dr. Fischer in dem geodätischen Laboratorium zu Steglitz verificirt wurde. In der Regel wurden die beiden Miren, welche die Enden der Messstange markiren, in einem Abstand von 5.9^m aufgesetzt. Diese Miren liessen sich mit dem Fernrohr des Universal-Instruments aus der Entfernung von einem Kilometer noch mit Sicherheit einstellen. Zum Zwecke der Basismessung muss die Stange vertical von einem Gehülfen gehalten werden; diese Bedingung wird zuverlässig dadurch erfüllt, dass gerade die verticale Haltung den geringsten Kraftaufwand erfordert; auch die Schwankungen, welche der Wind erzeugt, sind kaum störend, weil die obere Mire alsdann einen kleinen Bogen hin und her beschreibt, dessen Scheitel man einstellt. Ich

Digitized by Google

trachtete im Allgemeinen darnach, das Universal-Instrument in der Entfernung von einem Kilometer von der Messstange aufzustellen. Die Formel, welche der Berechnung zu Grunde liegt, ist:

$$b = \frac{V}{\sin(z_u - z_o)} \cdot \sin z_u \sin z_o$$

wo b die horizontale Basis, V die Länge der Messstange, z_u die Zenitdistanz der unteren, z_o die Zenitdistanz der oberen Mire bedeuten; für $z_u = 90$ geht die Formel über in $b = V \operatorname{tg} z_o$.

Für die Messung giebt es zwei Controlen: einmal das Beobachten in beiden Kreislagen, wodurch der Werth $\sin(z_u - z_o)$ zweimal erhalten wird; und dann das Vertauschen von Instrument und Messstange in den beiden Basis-Endpunkten. Zur Beurtheilung der Genauigkeit sei angeführt:

es bewirkt 1″ Fehler in dem Werthe $z_u - z_o$
bei einer Basis von 500^m Länge $0^m.2$
» » » » 750^m » 0.45
» » » » 1000^m » 0.9.

Bei ruhiger Luft und entsprechend ruhigem Höhenniveau lässt sich durch wiederholtes Einstellen eine Genauigkeit von 2″ erreichen, was für eine Basis von 1 Kilometer Länge einer Genauigkeit von etwa 2^m entsprechen würde. Bei besonders ungünstigen Verhältnissen wurde die Zahl der Einstellungen stark vergrössert.

Die angegebene Methode der Basismessung liefert gleichzeitig die Niveaudifferenz $a - b$ der Basis-Endpunkte A, B. Da das trigonometrische Verfahren, durch die in A und in B genommenen Zenitdistanzen einer Bergspitze S, die Erhebungen h_a bez. h_b von S über A bez. B liefert, so besteht für alle Höhenmessungen die Controlgleichung: $a - b = h_b - h_a$.

Auf trigonometrischem Wege wurde vermessen:

der Circus des oberen Cypressenthals,
der bis dahin unbekannte Vulcan Overo,
der Krater des Vulcan Maipo,
die Ramadakette,
der Aconcagua.

Unter »Ausgangspunkt« wird im Folgenden der astronomisch bestimmte Punkt verstanden, gegen welchen die beiden Basisendpunkte durch Azinut, horizontale und Vertical-Distanz festgelegt sind. Durch Einführung des Ausgangspunktes lassen sich alle von den Basisendpunkten anvisirten Punkte in geographischen Coordinaten ausdrücken.

Digitized by Google

a. Vermessung im Cypressenthal.

Die Vermessung des oberen Cajon de los Cipreses giebt für die wichtigen Gletschervorkommnisse daselbst einen Anhalt. Ausgangspunkt ist der als Agua de la Vida bezeichnete Punkt, welcher auf der linken Seite der Thalsohle, am Fusse eines gletschergeschliffenen Felsens, in 1628^m Höhe liegt. Die Basis wurde in beiden Richtungen gemessen, das eine Mal zu 978^m.14, das andere Mal zu 979^m.44, also im Mittel zu 978^m.8 gefunden. Daran wurden drei Fundamentaldreiecke angeknüpft; die Abweichung der Winkelsumme jedes der drei Dreiecke von 180° beträgt bez. 26″, 17″, 13″. Im Ganzen legte ich neunzehn Punkte fest, welche den Lauf des Thales erkennen lassen, die Höhe der bemerkenswerthesten Bergspitzen geben und Aufschluss ertheilen, sowohl über die frühere, wie über die heutige Ausdehnung des Ada-Gletschers; letzterer erfüllt die höchste Stufe des Cypressenthals. Das Thal ist ein linkes Seitenthal des Cachapual, hat einen etwa zehnstündigen Verlauf und eine Durchschnittsrichtung von Süd nach Nord; innerhalb der Firnregion, etwa drei Stunden unterhalb seines Ursprungs, ändert es seine Richtung für eine Strecke von 6 Kilometern fast um 90°, zeigt also eine ähnliche Krümmung wie der Rhein im Rheingau; 3 Kilometer unterhalb der Stelle, wo das Thal aus der Ost-West-Richtung wieder in die Süd-Nord-Richtung übergeht, liegt Agua de la Vida.

Der Ursprung des Thales und des Ada-Gletschers ist circa 3900^m hoch gelegen; letzterer zieht sich zwischen steilen Felsen von 4200^m Höhe etwa 15 Kilometer weit geradlinig und spaltenlos nach Norden und biegt hier in 3240^m Höhe nach Westen um. Die Biegungsstelle ist der Mittelpunkt eines grossartigen Firncircus, dessen höchster Berg, der Gran Onorado 4516^m hoch ist; gerade von Norden her fliesst ein steiler Gletscher aus 4000^m Höhe zu dem Circus nieder, nebst andern Gletschern aus Osten und Südosten; die Landschaft hat ganz den Charakter einer grossartigen Firnlandschaft in den Alpen. An der charakteristischen Biegungsstelle treten die Felsen der gegenüberliegenden Thalseiten eng aneinander, der Boden bildet eine Terrassenstufe, es entsteht eine Felsschlucht, durch welche die vereinigten Firnströme ihre Eismassen auf einem Wege von 2600^m Länge zur Tiefe hinabzwängen. Der Fall erscheint sehr steil, doch ist die gemessene mittere Neigung nur 22° 15′; die mittlere Breite des Gletscherfalls beträgt 500^m.

In dem Niveau von 2200^m erreicht der Gletscherfall sein Ende, die phantastische Zerklüftung hört auf, die Gletscherzunge nimmt ihren Anfang; sie ist 1300^m lang und besitzt einen Fall von 12° 45′.

Digitized by Google

In 1920^{m} Höhe lag im December 1882 das Gletscherthor, dem der Fluss entspringt. Ein breiter, fast ebener Boden mit aufgesetzten transversalen Schuttwällen bildet hier die Thalsohle; das linke Gehänge zeigt eine Anzahl alter Strandlinien, welche parallel untereinander verlaufend die früheren Stände des Gletschers markiren; gegen das rechte Gehänge lagern sich in convexem Bogen alte Seitenmoränen, die noch 4 Kilometer unterhalb des heutigen Gletscherthors nachzuweisen sind.

Der Fall des Thalbodens, vom Gletscherthor abwärts, beträgt 4° 7′; in der Entfernung von 1730^{m} unterhalb des Thores liegt ein grosser rother Block (piedra colorada), den mein sechzigjähriger Gefährte unaufgefordert als die Grenzmarke bezeichnete, bis zu welcher er den Gletscher vor 30 Jahren habe vorstossen sehen. Aus der Angabe würde folgen, dass der Ada-Gletscher in der genannten Epoche im Jahre durchschnittlich um 58^{m} zurückgewichen ist.

Den am meisten in's Auge springenden Beweis für die einst mächtigere Ausdehnung des Gletschers bilden die Gletscherschliffe des Felsens von Agua de la Vida. Der Fels ist mehrere Hundert Fuss hoch und trägt überall die deutlichsten Spuren früherer Gletscherbearbeitung, wie auch nach dem blossen Anblick der aufgenommenen Photographie von Hrn. JUSTUS ROTH bestätigt ist. Die Basis des Felsens liegt 1628^{m} hoch, 289^{m} unter dem heutigen Gletscherthor und 5½ Kilometer von demselben entfernt. Die Angaben gestatten eine Vorstellung über die Ausdehnung, welche die Gletscherbedeckung einst besass; und es muss hier bemerkt werden, dass ich im Laufe meiner Reise ein zweites ähnliches Vorkommen nicht habe entdecken können.

Die Bergketten, welche das Cypressenthal einfassen, steigen unterhalb Agua de la Vida nicht höher an als 3200^{m}; nur der in nächster Nähe gelegene Terrassenberg (3298^{m}) macht eine Ausnahme. In dem Bergkranz, oberhalb Agua de la Vida, ergaben sich für die am meisten in's Auge springenden Höhen:

Rechtes Ufer: Bandberg 3432^{m}, Colorado 4147^{m}, Cerro Onorado 4516^{m}.

Linkes Ufer: Mettelhorn 3176^{m}, Dent blanche 4168^{m}, Mono (durch einen errichteten Steinmann kenntlich) 3566^{m}, Erstling 3417^{m}.

Der Erstling und Mono liegen auf einem Felsgrat, um dessen Nordende der Ada-Gletscher die erwähnte Biegung nach Westen vollführt; durch die Erreichung des Erstlings wurde der Ursprung des Ada-Gletschers entdeckt.

Digitized by Google

b. Messung des Vulcan Overo.

Ausgangspunkt ist das

Guanacostein-Biwak: 69° 52′.0 W. L. Gr.; 34° 35′.2 S. Br.; Höhe 3024^m.

Die Basis wurde doppelt gemessen; wegen des Windes bei der zweiten Messung erhält letztere halbes Gewicht, und es ergiebt sich:

	568^m.4		
	568.4	A über B	50^m.9
	565.5	B unter A....	51.1
Basis A B....	567.4	Mittel	51.0

Weiter folgt:

Vulcan Overo über B....	1684^m.2	
A....	1733.4	
Differenz....	49.2	Controle... 51^m.0
Mittel	1708.8	
Höhe Basismitte..	3031.0	
Höhe Cerro Overo	4739.8	

Ferner ist ermittelt:

Azimut des Vulcan Overo vom Guanacostein aus 101° 49′.9

Horizontal-Entfernung des Vulcan Overo vom Guanacostein aus 10583^m.

Hieraus und aus der bereits bekannten Lage des Guanacostein folgt:

Vulcan Overo: 69° 58′.8 W. L. Gr.; 34° 34′.0 S. Br.; Höhe 4740^m.

c. Messung des Vulcan Maipo.

Ausgangspunkt ist das

Maipo-Biwak: 69° 53′.4 W. L. Gr.; 34° 13′.9 S. Br.; Höhe 3306^m.

Die anvisirten Zacken des Maipo-Kraters sind bezeichnet:

β, α (höchster), ε, k, D.

Basis A B nur einmal gemessen = 1153^m.5

(bei Kreis Rechts erschienen die 5^m.9 von einander entfernten Miren unter 17′ 36″, bei Kreis Links unter 17′ 34″).

B über A = 4^m.0.

Digitized by Google

Höhen von:	β	α	ε	k	D
Über B	1826.5	1900.9	1581.6	1654.2	1600.1
» A	1831.8	1905.5	1587.1	1658.3	1604.7
Differenz	5.3	4.6	5.5	4.1	4.6
Mittel	1829	1903	1584	1656	1602
Höhe Basismitte	3483	3483	3483	3483	3483
Abs. Höhe	5312	5386	5067	5139	5085
Horiz. Distanzen von A	7518	7878	7225	7943	7502
» » » B	7137	7471	6739	7392	6909

Vom Maipo-Biwak aus sind nur die Zacken β, D sichtbar, und zwar ist vom Biwak aus:

	Azimut	Horizontal-Distanz
für β	200° 7.0	7796 m
» D	209 52.9	8364

woraus folgt:

Maipo-Zacken β: 69° 51.6 W. L. Gr.; 34° 10.0 S. Br.

Auf dem Zacken α (trigonometrisch = 5386 m hoch) wurde 1883 Jan. 19. 1h 15m N. die Temperatur des kochenden Wassers 82.60, der Luft — 12.0 gefunden, was einer Höhe von 5416 m entspricht.

d. Messung der Ramada-Kette auf der linken Seite des Valle hermoso.

Ausgangspunkt ist das

Valle hermoso-Biwak: 70° 1.3 W. L. Gr.; 32° 16.0 S. Br.; Höhe 2913 m.

Die anvisirten Punkte sind bezeichnet a, r, b, c, d, e. a, r, b sind wahrscheinlich Zacken eines Schnee-erfüllten Kraters, gehören also demselben Berge an, dessen abgestumpfter Gipfel einer wenig geneigten Ebene gleicht; daher der Name *ramada* = Laube aus Zweigen. Die ganze Kette ist photographirt.

Basis A B nur einmal gemessen = 735.7 m

A 3.1 m höher als B. Abs. Höhe A = 2914 m.

Höhe von:	a	r	b	c	d	e	Contrl.
Über A	3342.9	3313.0	3174.0	3238.4	2579.0	3499.3	
» B	3245.5	3315.9	3177.3	3240.9	2581.0	3501.5	
Differenz	1.6	2.9	3.3	2.5	2.0	2.2	3.1 m
Mittel	3244.7	3314.5	3175.7	3239.7	2580.0	3500.4	
Höhe Basismitte	2912.4	2912.4	2912.4	2912.4	2912.4	2912.4	
Abs. Höhe	6157.1	6226.9	6088.1	6152.1	5492.4	6412.4	
Horiz. Distanz von A	21947	22346	21226	18633	16150	20782	
» » » B	21771	22132	20957	18312	16242	20296	

Digitized by Google

	r	c	e
Azimut von A aus	174° 21′.1	183° 33′.5	198° 39′.6
Westliche Länge von Greenwich .	70 2.7	70 0.6	69 57.1
Südliche Breite	32 4.1	32 6.1	32 5.5.

Die Spitze e = Montenegro wurde bei der ersten Aconcagua-Ersteigung mit einem Horizontalglas anvisirt und lag in gleichem Niveau mit dem am Aconcagua erreichten höchsten Punkte; diesem kommt also hiernach die Höhe von 6413^{m} zu.

e. Messung des Aconcagua.

Überschreitet man von Westen her die Wasserscheide der Cordillere bei etwa 32° 20′ südlicher Breite in dem Boquete del Valle hermoso (3565^{m}), so steigt man durch ein Seitenthal in wenigen Stunden zu dem Valle hermoso nieder und erreicht seine Thalsohle bei dem Sandsteinfelsen von la Caleta in dem Niveau von 3000^{m}. Das Thal, welches aus Süden kommt und in 30 Kilometer Entfernung entspringt, biegt hier nach rechts um und folgt der Nord-Nordost-Richtung Ich folgte dem Thal in der Bergrichtung, im Anblick des Aconcagua, der in der Entfernung von 31 Kilometern in Süd-Südost-Richtung isolirt aufragt, und errichtete ein Standquartier, welchem ich den Namen des Aconcagua-Biwaks gab, und dessen Lage ist:

70° 3′.2 W. Länge Gr.; 32° 31′.3 S. Br.; 3582^{m} Höhe.

Den höchst gelegenen Theil des Valle hermoso, von seinem Ursprung bis zum Aconcagua-Biwak nenne ich das Valle Penitente; es ist sehr wild, seine Thalsohle ist durch Quebraden (Schluchten) zerrissen, die rechte Thalseite wird von einer 5200—5300^{m} hohen unzugänglichen Felskette, der Penitente-Kette gebildet; hinter derselben liegt der Aconcagua, getrennt von der Kette durch eine weite Firnmulde. Ich entdeckte einen Übergang über die Kette, den Portezuelo del Penitente in 4970^{m} Höhe, der den Schlüssel der Aconcagua-Besteigung liefert. Der weite Firnkessel und die Schwierigkeit seiner Erreichung gestatteten nicht, den Aconcagua jenseits des Portezuelo trigonometrisch zu vermessen; nach langem Suchen wurde auf dem linken Hang des Valle Penitente, 6 Kilometer oberhalb des Aconcagua-Biwak in der Höhe von 4100^{m} eine Basis gemessen, von deren Endpunkten aus die Spitzen des Aconcagua nicht durch die Penitente-Kette verdeckt wurden. An den Hängen des Aconcagua selbst hatte ich zuvor eine directe Höhenmessung mittelst des Baudin'schen Kochthermometers Nr. 174 in dem höchsten von mir erreichten Punkt vor-

Digitized by Google

genommen; das Wasser kochte bei 78°9 C., die abgeleitete Höhe von 6410^m stimmt gut mit der vorhin angegebenen trigonometrisch abgeleiteten des Montenegro der Ramadakette.

Ausgangspunkt der Messung ist das

Aconcagua-Biwak: 70° 3′.2 W.L.Gr.; 32° 31′.3 S.Br.; Höhe 3582^m.

Die drei sichtbaren Spitzen des Vulcan Aconcagua werden mit $\bar{N}$, $\bar{M}$, $\bar{S}$, der Portezuelo del Penitente mit $\bar{P}$ bezeichnet.

Basis A B ist zweimal gemessen:

1. Univ.-Instrument in A ergiebt A B = 792^m.4; A unter B: 108^m.4
2. » » » B » A B = 794.2; B über A: 108.7

Basis A B = 793.3; B über A: 108.6.

Höhe von:	$\bar{N}$	$\bar{M}$	$\bar{S}$	$\bar{P}$	Controle
Über A	2924^m.1	2805^m.4	2848^m.3	950^m.8	
» B	2815.2	2696.8	2740.1	842.4	
Differenz	108.9	108.6	108.2	108.4	B über A: 108^m.6.
Mittel	2869.7	2751.1	2794.2	896.6	
Höhe Basismitte	4098.6	4098.6	4098.6	4098.6	
	+ 1.3	1.3	1.3	1.3	(Corr.' wegen Stativ).
Abs. Meereshöhe	6969.6	6851.0	6894.1	4996.5	
Horiz. Distanz von A	10580	10652	10882	4547	
» » » B	10341	10379	10581	4181	
Winkel gegenüber A B	4° 8′ 40″	4° 3′ 30″	3° 55′ 10″	9° 42′ 23″	

$\bar{N}$ und $\bar{S}$ sind die Eckspitzen des dachförmig gestalteten Aconcagua; ihre Entfernung beträgt 925^m; die Richtung N S ist N 39° 27′ E — S 39° 27′ W, oder mit anderen Worten: das in $\bar{N}$ genommene Azimut von $\bar{S}$ ist 39°27′.

Die Punkte *A*, *B* der Basis konnten vom Aconcagua-Biwak aus nicht anvisirt werden, wohl aber die Aconcaguaspitzen. Unter Mitbenutzung der barometrisch ermittelten Niveaudifferenz zwischen dem Biwak und dem Basispunkt *B* wurde gefunden:

Aconcagua-Biwak (3582^m)

	$\bar{N}$	$\bar{S}$	Punkt B der Basis A B
Horizontal-Distanz von	15295^m	15750^m	5955^m
Höhenunterschied	3388	3312	517
Azimut	337° 25′.0		4° 17′.5

Hieraus folgt:

Aconcagua höchste Spitze $\bar{N}$: 69° 59′.5 W.L.Gr.; 32° 39′.0 S.Br.; Meereshöhe 6970^m.

Digitized by Google

Der Portezuelo del Penitente ist ein Einschnitt im Kamm der Penitentekette; in der Mitte des Einschnitts erhebt sich ein Felszahn von etwa 25^m Höhe; die Spitze des Felszahns ist das oben eingeführte $\bar{P}$ (4997^m). Die Basis des Felszahns wurde mittels des Kochthermometers Nr. 174 zu 4970^m Höhe ermittelt.

9. Erdmagnetische Messungen.

Für die Bestimmung der Elemente des Erdmagnetismus diente ein Magnetometer von C. Bamberg in Berlin. Es sind in den Jahren 1873 — 75 analoge Messungen mit demselben Instrument in Westafrica, in 5° südlicher Breite von mir vorgenommen worden. Vor der Ausreise nach Südamerica wurde das Instrument auf der Seewarte in Hamburg, Anfang Juli 1882, verglichen.

Der Horizontalkreis des Magnetometers ist in ganze Grade getheilt und besitzt 2 Nonien, welche eine directe Ablesung von 5′ gestatten. Der Verticalkreis ist in ganze Grade getheilt und besitzt keine Nonien; Bruchtheile eines Grades werden durch Schätzung erhalten. Zu dem Instrument gehören zwei Declinationsnadeln, zwei Inclinationsnadeln, zwei Stabmagnete zum Ummagnetisiren der Inclinationsnadeln und zwei Ablenkungsschienen für Intensitätsbestimmungen. Jede der beiden Schienen kann in doppelter Weise aufgesetzt werden, und die dadurch bewirkten Drehungen der Declinationsnadel erfolgen in entgegengesetztem Sinn, so dass das Mittel der entsprechenden Ablesungen die Ablesung des magnetischen Meridians ist, ihre halbe Differenz aber den Werth des Ablenkungswinkels liefert.

Es entsprechen also den beiden Declinationsnadeln D_1, D_2 und den beiden Schienen ASI, $ASII$ vier Ablenkungswinkel ϕ $(= \phi_1' \phi_1'' \phi_2' \phi_2'')$, aus denen sich die Horizontal-Intensität $H(= H_1', H_1'', H_2', H_2'')$ viermal berechnen lässt mittels der Formel $H = K_i \operatorname{cotg} \phi_i$.

Die vier Werthe $K_i = K_1', K_2', K_2'', K_2''$ wurden in Hamburg aus dem bekannten Werthe H_0 der Horizontal-Intensität und aus den vier beobachteten Winkeln $\phi (= \phi_1', \phi_1'', \phi_2', \phi_2'')$ ermittelt wie folgt:

$$K_1' = 0.6639;\ K_1'' = 0.6957;\ K_2' = 0.6639;\ K_2'' = 0.6914.$$

Bei der Beobachtung der Declination wurde genau so verfahren, wie bei dem Vergleich in Hamburg zur Bestimmung des Collimationsfehlers der Nadeln, d. h. es wurde nur die Nordspitze der Nadel eingestellt und abgelesen.

Zum bessern Einblick in die unten zusammengestellten Resultate sei eine vollständige Bestimmung mit Declinationsnadel 1 hier gegeben;

Digitized by Google

wobei nur zu bemerken ist, dass alle auf den Horizontalkreis bezüglichen Zahlen die Mittel von vier Ablesungen sind.

Baños de Cauquenes 1883 Januar 31, 8h V.

	Wahres Azimut Mire II	216°	20'.3
	Ablesung Mire II	289	11.5
a)	Declinationsnadel I (magn. Nordpunkt)	268	21.0
b)	Ablenkungsschiene I, erste Lage	280	41.0
	» » zweite Lage	255	56.8
	Mittel (magn. Nordpunkt)	268	18.9
	Halbe Differenz $= \phi_1'$	12	22.1
c)	Ablenkungsschiene II, zweite Lage	255	42.5
	» » erste Lage	280	54.0
	Mittel (magn. Nordpunkt)	268	18.3
	Halbe Differenz $= \phi_1''$	12	35.7
d)	Declinationsnadel I (magn. Nordpunkt)	268	21.3
	Ablesung Mire II	289	11.0.

Die Inclination wurde aus acht verschiedenen Lagen der Inclinationsnadel abgeleitet, und da beide Spitzen abgelesen wurden, so stellt die aus jeder Nadel hergeleitete Inclination das Mittel von sechzehn Zahlen vor.

Die acht verschiedenen Lagen ergaben sich daraus, dass a) der Inclinationskreis durch Drehung um 180° auf doppelte Weise mit der Ebene des magnetischen Meridians coincidiren kann; b) dass die Axe der Inclinationsnadel auf den Lagern umlegbar ist; c) dass durch das Ummagnetisiren der Nadel das obere Ende derselben zum unteren gemacht wird. Die beiden Fälle a. werden durch E. W. (sichtbare Seite der Nadel gegen Ost, West); b. durch v. h. (Marke der Nadel vorn, hinten); c. durch o. u. (Marke oben, unten) unterschieden; dann sieht das vollständige Tableau einer Inclinationsbestimmung so aus:

Baños de Cauquenes 1883 Januar 31, 9h bis 10h V.

Inclinationsnadel I			Inclinationsnadel II		
u. h. E.	35°0,	35°4	u. v. E.	34°0,	33°8
» » W.	34.8,	35.6	» » W.	33.0,	34.0
» v. W.	34.6,	35.4	» h. W.	33.5,	34.8
» » E.	35.2,	35.2	» » E.	33.0,	33.4
o. v. E.	33.3,	33.5	o. v. E.	34.0,	33.8
» » W.	32.4,	34.0	» » W.	35.0,	34.1
» h. W.	33.0,	34.1	» h. W.	34.6,	33.2
» » E.	33.4,	33.2	» » E.	34.7,	35.0
Incl. I	33.96,	34.53	Incl. II	34.00,	34.00

Digitized by Google

Also Incl. I 34°25
» II 34.00
Inclination 34.13 Süd.

Zusammenstellung aller auf die erdmagnetischen Elemente bezüglichen Beobachtungs-Resultate.

Es bedeuten: λ Länge von Greenwich W; φ Polhöhe Süd; h Meereshöhe, D 1, D 2 Declinations-Resultat aus Nadel 1, Nadel 2; J 1, J 2 Inclinations-Resultat aus Nadel I., Nadel II.; H Horizontal-Intensität; i Totale Intensität.

	H	i	Declination	Inclination
Santiago 1882 Nov. 23. 7^h — 8^h V. λ 70°40′.5; φ 33°26′.7; h 535^m	2.947;	3.534	D 1 } fehlt D 2 }	J I 33°.62 Süd J II 33.14 (halbes Gewicht)
Cauquenes 1882 Dec. 5. 7^h — 8^h V. λ 70°34′.5; φ 34°14′.7; h 766^m	3.025;	3.657	D 1 15° 24′.7 Ost D 2 15 29.0 15 26.9	J I 34°.4 Süd J II 33.9 34.15
Cauquenes 1882 Dec. 29. 8^h — 9^h V.	3.035;	3.668	D 1 15° 28′.9 D 2 15 40.3 15 34.6	J I 34°.3 J II 34.0 34.15
Cauquenes 1882 Dec. 29. 4^h — 5^h N.			D 1 15° 32′.7 D 1 15 35.7 15 34.2	
Cauquenes 1883 Jan. 31. 3^h — 4^h N.	3.075;	3.668	D 1 15° 30′.3 D 2 15 41.9 15 36.1	J I 34°.3 J II 34.0 34.15
Agua de la Vida 1882 Dec 12. 9^h-11^h V. λ 70°26′.7; φ 34°30′.7; h 1628^m	2.952;	3.547	D 1 15° 46′.4 D 2 15 49.1 15 47.8	J I 30°.8 J II 33.6 33.7
Guanacostein 1883 Jan. 7. 1^h N.... (Vulcanisches Gebiet) λ 69°52′.0; φ 34°35′.2; h 3024^m	2.810;	3.473	D 1 16° 52′.8 D 2 fehlt	J I 36°.2 J II fehlt
Yaucha 1883 Jan. 15. 3^h — 4^h N.. λ 69°9′.0; φ 34°7′.8; h 1443^m	2.980;	3.565	D 1 15° 4′.4 D 2 15 18.9 15 11.7	J I 33°.5 J II 33.1 33.3

Die in obiger Tabelle gegebenen Werthe von H sind die Mittel der folgenden Werthe von $H_1' H_1'' H_2' H_2''$, welche mit den Ablenkungswinkeln $\phi_1' \phi_1'' \phi_2' \phi_2''$ berechnet sind:

Digitized by Google

	Nov. 23	Dec. 5	Dec. 29	Jan. 31	Dec. 12	Jan. 7	Jan. 15
H_1' ..	2.951	3.022	3.018	3.028	2.936	2.789	2.953
H_1'' ..	933	047	065	114	977	831	3.006
H_2' ..	951	012	022	043	940		2.964
H_2'' .	951	017	035	114	956		2.997
H ...	2 947	3.025	3.035	3.075	2.952	2.810	2.980

Die entsprechenden Ablenkungswinkel sind:

ϕ_1'	12°40.′7	12°23.′4	12°24.′4	12°22.′1	12°44.′5	13°23.′5	12°40.′1
ϕ_1''	13 20.6	12 51.6	12 47.4	12 35.7	13 9.3	13 48.5	13 2.0
ϕ_2'	12 40.0	12 25.5	12 23.1	12 18.2	12 43.4		12 37.3
ϕ_2''	13 11.1	12 54.4	12 50.0	12 31.1?	13 9.9		12 59.5.

Auf der Expedition zum Aconcagua musste das Magnetometer wegen nicht ausreichender Zahl der Lastthiere zurückgelassen werden.

Mit einem sehr träge schwingenden Prismen-Compass (Bamberg 169) wurde bestimmt:

Valle hermoso-Biwak 1883 März 2. 7^h V. λ 70° 1.′3 W.; ϕ 32° 16.′0 S.; h 2913^m.

Declination 14° 47′ Ost. Mittel aus sechs verschiedenen Miren.

Aconcagua-Biwak 1883 März 8. Vormittags. λ 70° 3.′2 W.; ϕ 32° 31.′3; h 3582^m.

Declination 16° 4′ Ost. (Mittel aus sechs verschiedenen Miren).

Diese beiden Resultate haben geringen Werth; ihr Mittel 15°.4 stimmt indess gut mit den Resultaten des Magnetometers.

Für Hamburg 1882 April war:

Magn. Declination	13° 1.′6 W.	Jährliche Änderung	− 8.′0
Inclination	67° 50′ N.	» »	− 1.′0
Horizontal-Intensität	1.8108	» »	+ 0.0022

Es war beobachtet 1882 Juli 5 (mit dem Bamberg'schen Magnetom.):

D 1	12° 57.′3	J I	67°.84
D 2	12 57.1	J II	67.75
D	12° 57.′2 W.	J	67°.80 N.

ϕ_1' 20° 2.′5; ϕ_1'' 20° 56.′5; ϕ_2' 20° 3.′3; ϕ_2'' 20° 49.′5.

Die Correctionen für die beiden Inclinations- und Declinations-Nadeln, welche sich hieraus ableiten lassen, sind in den für Südamerica hergeleiteten Resultaten nicht angebracht.

Für Bussole 169 wurde als Index-Correction gefunden − 0°.5.

Für den benutzten Taschencompass − 0°.6.

Digitized by Google

10. Photographische Aufnahmen.

Auf der Reise in Südamerica wurden 85 Platten in den centralen chileno-argentinischen Andes exponirt und 68 in Bolivien und Peru.

Die Grösse der Platten (»London« ordinary dry plates von WRATTEN & WAINWRIGHT) ist $6^1/_2 \times 4^3/_4$ englische Zoll. Es wurden eine DALLMEYER- und eine Ross-Linse gebraucht; beide erster Qualität. Das Verfahren war erst zum Zweck der Reise von mir erlernt worden. Eine kurze Übungsreise in den Alpen gab gute Resultate, und in der That ist von den Aufnahmen in America kaum eine verloren gegangen. Der Apparat war so eingerichtet, dass ich ihn selbst tragen konnte, und dass im Laufe eines Tages acht Platten zur Disposition standen. Ein später angenommenes Verfahren setzte mich in den Stand, auch bei Tage den Plattenwechsel in einem lichtdichten Sack vorzunehmen. Ich hatte in den Alpen (bei Zermatt) mit demselben Apparat und denselben Platten gearbeitet wie in den Andes und fand die Expositionszeit in den Andes nur halb so gross wie in den Alpen. Bei kleinster vorhandener Blende pflegte ich mit der DALLMEYER-Linse in den Alpen 4", in den Andes 2"; mit der Ross-Linse in den Alpen 3", in den Andes 1"5 zu geben. Die Platten der ersten Serie wurden in Santiago entwickelt, woselbst auch die Duplicate, in den Händen des Hrn. SPENCER, zurückblieben; die bolivianischen Platten konnten erst in Berlin, 3—4 Monate nach der Aufnahme, hervorgerufen werden, und hier zeigten sich bei einigen derselben Spuren von Zersetzung. In der Verpackung war ich so glücklich, dass nur ein einziges Glas einen Sprung erhielt.

Die sämmtlichen Original-Platten wurden zum Zwecke späterer Veröffentlichung Hrn. J. B. OBERNETTER in München übergeben.

Durch die zuverlässige Treue der heimgebrachten Bilder werden alle physiognomischen Landschaftsschilderungen wesentlich ergänzt. Namentlich wird es dem Geologen möglich sein, eine Vorstellung von der Rolle zu gewinnen, welche die Schichtung in dem Aufbau des von mir besuchten Gebirges spielt. Zwar erwecken die Bilder unvollständige Vorstellungen, insofern ihnen der lieblichste Schmuck der Cordillerenlandschaft: die Farbe fehlt; dafür aber macht ihre richtige Zeichnung die oft unbewusst geübte Fälschung übertriebener Formen unmöglich, und gestattet ihre Schärfe, die Formen bis in's Detail zu verfolgen. Zum ersten Male — um ein Beispiel anzuführen — wird hier der höchste Andesgipfel, von drei verschiedenen Standpunkten aus, in seiner wahren Gestalt dem Auge vorgeführt; und zwar ist eines der Bilder von dem bereits erwähnten 4970^m hohen Portezuelo del Penitente aus aufgenommen, in 6000^m horizontalem und 2000^m verticalem Abstand vom Aconcagua. Auch der trigonometrischen Ver-

Digitized by Google

messung kam die photographische Thätigkeit dadurch zu Gute, dass die meisten der anvisirten Punkte sich auf den Bildern wiederfinden.

Mögen daher die erhaltenen Resultate zu Gunsten der Ansicht sprechen, dass die photographische Camera ein sehr wirksames Hülfsmittel in der Hand des wissenschaftlichen Reisenden ist.

11. Einwirkung der dünnen Luft auf den menschlichen Körper.

Bei den stark auseinandergehenden Angaben, welche von Reisenden über die Einwirkung der verdünnten Höhenluft auf den Organismus gemacht worden sind, erscheint es mir nothwendig, dass auch ich die an mir und meinen Begleitern gemachten Erfahrungen mittheile.

In Südamerica nennt man den Zustand, in welchen die meisten Leute durch das Eintreten in dünnere Luftschichten versetzt werden, Puna oder Soroche. In Chile haben wenige Leute, welche von der Puna sprechen, eine grössere Höhe als 3750^{m} resp. 3900^{m} erreicht; in Bolivien dagegen überschreitet der Maulthierpfad zwischen Tacna und la Paz eine Höhe von 4600^{m}. Sicher ist, dass langsame Gewöhnung gegen die Empfänglichkeit für die Puna abstumpft, auch dass ein mit den Rauheiten des Hochgebirges vertrauter Reisender eine ganz andere Widerstandskraft besitzt, als die oft verweichlichten, jeder körperlichen Anstrengung abholden Südamericaner. Einer betet dem anderen die Schrecken der Puna nach und entwirft sensationelle Schilderungen aus Höhen von dem Niveau des Monte Rosa, auf dessen Gipfel ein trainirter Alpinist sich eines normalen oder gar eines gesteigerten Wohlbefindens erfreut. Wurden doch selbst bei uns, als man noch nicht so wie heute mit den höchsten Alpengipfeln vertraut war, übertriebene Vorstellungen von der Einwirkung der Höhenluft unterhalten, und glaubten doch Viele, dass zu einer normalen Montblanc-Besteigung das Austreten von Blut aus Nase und Ohren gehöre. Man darf sich also nicht wundern, dass die Südamericaner, wenn die Nothwendigkeit sie einmal in die Höhenregionen geführt hatte, sich für die erlittenen Unbequemlichkeiten durch Schilderungen ihrer Punaleiden entschädigten.

Die Puna theilt allerdings das mit der Seekrankheit, dass ihr die verschiedenen Individuen in verschiedener Weise unterworfen sind, so dass auch da, wo Übertreibung ausgeschlossen ist, die Schilderungen nicht übereinstimmen.

Als Wirkungen der Puna werden angegeben: Übelkeit, Beklemmung, Kurzathmigkeit, Kopfschmerz, Ermattung, Gliederschmerzen. Die Übelkeit ist vermuthlich nur Folge der physischen Anstrengung

Digitized by Google

des Steigens; die Beklemmung Folge eines nicht normalen oder nicht hinreichend geübten Respirationsorganismus.

Ich habe schädigende Einflüsse der dünnen Luft nur am Aconcagua bei mir wahrgenommen.

Bei der Maipo-Besteigung (19. Januar 1883), die mich das Niveau von 5400^{m} erreichen liess, fühlte ich wohl einen Einfluss der dünnen Luft auf meinen Athmungsprocess, aber durchaus keine Beschwerden: weder Kopfweh, noch Übelkeit, noch Gliederschmerzen. Nur die Lunge musste heftiger arbeiten; dadurch indessen, dass ich den Schritt beim Aufstieg stark verlangsamte, vermied ich den Zustand des Röchelns. Dazu erschwerte noch sturmartiger Wind das Athmen, und sank die Temperatur auf 12° C. unter Null. Ein Gefühl von Mattigkeit hatte ich erst im Laufe des Abstiegs; das brauchte aber nicht auf die dünne Luft bezogen zu werden, sondern erklärte sich einfach aus dem an sich anstrengenden Marsch (die Niveaudifferenz zwischen dem Biwak und der Spitze betrug 2100^{m}), aus dem Mangel an Nahrung und dem allgemein aufreibenden Leben in den Biwaks. Meine beiden chilenischen Begleiter zeigten sich weniger widerstandsfähig und konnten mir nicht bis zur Spitze folgen. Derjenige von ihnen, welcher mir am weitesten gefolgt war und kaum eine Marschstunde unterhalb des Gipfels liegen blieb, klagte über nichts anderes, als über Schmerzen in den Beinen. Ich beobachtete an ihm Schlafsucht und sehr bleiches Aussehen; letzteres werde ich wohl auch zur Schau getragen haben; denn fast alle Leute verändern die Farbe in der Höhe.

Auf dem Aconcagua habe ich zwei Mal folgende Wahrnehmungen an mir machen können.

Der erste Ersteigungsversuch fand statt am 20. und 21. Februar 1883. Am Abend des 20. Februar begann die Besteigung in einer Höhe von 4500^{m}; wir erkletterten zunächst den Portezuelo del Penitente (4970^{m}) und überschritten während der Nacht das 2$^{1}/_{2}$ Stunden breite Firnfeld, welches die Basis des Aconcagua-Kegels berührt. Bis zur Höhe von 6000^{m} war mein Befinden normal; dann fühlte ich, dass der Athem zuweilen kurz wurde, und eine röchelnde Bewegung der Lunge mir allein momentane Erleichterung gewährte; die Oberschenkel schmerzten, und zwar am meisten, wenn nach einer kurzen Pause der Marsch wieder aufgenommen wurde. Es erschien mir jeder Zeit als eine Erleichterung, beim Niederlegen den Mund dicht über Schnee zu halten und dann heftig zu röcheln. So erreichte ich mit einem Begleiter die Höhe von 6410^{m}, wo ich noch im Stande war, den Kochapparat der Hypso-Thermometer in Gang zu setzen. Wenn ich niederlag und auch meiner Lunge durch langsames Athmen eine Erholung gönnte, so überfiel mich plötzlich Athemnoth: ein Beweis, dass

Digitized by Google

nur eine übermässige Thätigkeit der Lunge dem Körper das nothwendige Quantum an Sauerstoff zuführen konnte.

Die Höhe von 6410^{m} wurde am 21. Februar Mittags um 1^{h} erreicht, 16$^{1}/_{2}$ Stunde nach Beginn des Aufstiegs. Mein Begleiter befand sich in einem ähnlichen Zustande wie ich. Ich glaube nun, dass mein eigener leidender Zustand nur zum geringen Theil durch die dünne Luft erzeugt wurde, sondern dass zwei andere Ursachen mitwirkten. Einmal war die Sorge um das Zustandebringen der Expedition und die Befürchtung für ihren Verlauf so gross, dass ich während der vierzehn vorangegangenen Tage wenig Schlaf gefunden hatte; das Betragen meiner Begleiter hatte mir steten Verdruss bereitet; ich war schlecht genährt — und in diesem Zustande begann ich die Besteigung. Andererseits wurden während der Besteigung meine Kräfte ungebührlich dadurch beansprucht, dass meine Begleiter (ursprünglich zwei) sich oft ohne hinreichenden Grund niederwarfen, schon bei Sonnenaufgang wenig Lust zum Weitergehen verspürten und mich dadurch zwangen, sie alle zehn Minuten durch eine Rede anzutreiben; das wirkte moralisch lähmend auf mich, erschöpfte auch die physischen Kräfte, weil die Lunge durch das Sprechen angestrengt wurde. Bei zuverlässigen Begleitern, bei besserer vorangegangener Pflege wäre mein Zustand jedenfalls dem bei der Maipo-Besteigung geschilderten ähnlich gewesen. Es ist noch zu bemerken, dass auch in 6410^{m} weder bei mir noch bei meinem Begleiter ein Austreten von Blut aus Ohren oder Nase stattfand.

Bei der zweiten Besteigung biwakirte ich auf Felsen in 5300^{m} Höhe in der Nacht vom 4/5. März 1883. Eine Zahnfistel, die sich mittlerweile bei mir ausgebildet hatte und mir zu Zeiten unerträgliche Schmerzen bereitete, setzte mich in einen schlechten Zustand. Ich beobachtete nun schon in der Höhe des Biwaks die oben geschilderten Einflüsse der Puna, hatte aber während des Marsches am 5. März, unmittelbar nach den periodisch wiederkehrenden, acuten Schmerzzuckungen des Zahnnerven, die Empfindung, als ob ich von jeder Puna-Wirkung befreit wäre und mich ganz normal befände.

Die Summe meiner Erfahrungen über die Puna ist die, dass ein gesunder, durch Anstrengung trainirter, aber nicht erschöpfter Organismus die Wirkungen der dünnen Luft nur in der Intensität der Lungenthätigkeit zeigt, und dass die Ueberanstrengung der Lunge Mattigkeit und Gliederschmerzen zur Folge hat; dass der moralische Zustand, das Zutrauen zu den Begleitern und zu dem Erfolg das wirksamste Mittel gegen die Puna sind, und dass der Reisende, welcher in 6410^{m} noch arbeiten konnte, sehr wohl im Stande ist, die Höhe von 6970^{m} (Aconcagua-Spitze) zu erreichen, wo der Sauerstoffgehalt nur um 6$^{2}/_{3}$ Procent geringer als in 6410^{m} ist.

Digitized by Google

12. Sammlungen.

Was von den gesammelten Pflanzen nach Europa gelangte, wurde in gutem Zustand dem Königlichen botanischen Museum zu Berlin überreicht und von Hrn. Prof. Ascherson mit dankenswerther Bereitwilligkeit untersucht. Der genannte Gelehrte hat das vorläufige Resultat seiner Untersuchung in einem kurzen Memoire zusammengestellt, welches diesem Bericht als Anlage beigegeben ist; es geht daraus hervor, dass 190 Nummern gesammelt sind, welche sich auf 163 Arten vertheilen.

Die Gesteinssammlung ist dem Königlichen mineralogischen Museum übergeben worden. Hr. Justus Roth hat die besondere Güte gehabt, die Untersuchung der Gesteine selbst zu übernehmen, und sich eine Mittheilung an die Königliche Akademie vorbehalten. So wenig umfangreich die Sammlung ist, so hat sie doch Hrn. Roth in den Stand gesetzt, die vulcanische Natur des Aconcagua festzustellen.

13. Schlusswort.

In dem vorstehenden Bericht haben meteorologische Aufzeichnungen keine Stelle gefunden, weil der stete Ortswechsel längere Beobachtungsreihen an demselben Ort verbot, und weil vereinzelte Temperatur- etc. Angaben, falls sie nicht zu Höhenbestimmungen dienen, eher in das Gebiet der persönlichen Erlebnisse, als wissenschaftlich verwerthbarer Daten fallen. Zudem ist das Charakteristische der Sommerwitterung gelegentlich bereits erwähnt und kann hier noch einmal mit den wenigen Worten zusammengefasst werden: geringe, meist verschwindende Bewölkung des Himmels, noch geringere Niederschläge, nur in den Höhen zuweilen heftige Schneestürme; constante Winde aus Nord bis Nordwest, oft mit grosser Gewalt wehend.

Die auf Grund der Messungen und Compass-Peilungen entworfene Karte des Reisegebiets ist dem Bericht nur deshalb nicht beigefügt, weil sie erst nach Abschluss aller Berechnungen in Angriff genommen werden konnte. Binnen kurzem wird sie vollendet sein.

Dass die heimgebrachten Sammlungen einen nur geringen Umfang haben, ist weder auf einen Mangel an Interesse, noch an Verständniss für ihre Bedeutung zurückzuführen. Aber ein Reisender, dem nie eine andere Hülfe zu Gebote stand, als die vier Leute, welche die Reit- und Lastthiere zu besorgen hatten, muss sich Beschränkung auferlegen. Die Messungsarbeiten, wenn ihnen wissenschaftlicher Werth zuerkannt werden soll, erfordern mehr Zeit, als die dürren

Digitized by Google

Zahlen des Resultats erkennen lassen; die topographische Exploration, welche dieser Arbeit voraufgeht, nimmt die geistigen und physischen Kräfte gleich stark in Anspruch; nur dadurch, dass das Auge unaufhörlich über die Landschaft schweift und die verschiedenen Eindrücke combinirt, erhält man Anhaltspunkte, die in explorirten Ländern die Karten liefern. Zum systematischen Sammeln bleibt keine Zeit.

Gerade für Reisende gilt das Wort, dass sich in der Beschränkung der Meister zeige; und nur, wer viele Jahre seinen Reisezwecken widmen kann, darf seine Thätigkeit vielseitiger gestalten. In der hohen Cordillere des centralen Chile stehen dem Reisenden nur Monate zur Disposition; ich habe sie ohne Rücksicht auf meine Person auszunutzen versucht und übergebe der Königlichen Akademie dankbar und ehrerbietigst diesen Bericht mit der Versicherung, dass er das Resultat redlicher Mühe und unerschrockenen Handelns ist.

Anlage I.

Bericht des Hrn. Prof. Dr. Ascherson über die von Dr. Güssfeldt gesammelten Pflanzen.

Die von Dr. Paul Güssfeldt von seiner Reise in die chilenisch-argentinische Cordillere mitgebrachte Pflanzensammlung stammt von acht verschiedenen Localitäten:

1. Cajon de los Cipreses.
2. Daselbst in der Nähe der Moräne.
3. Daselbst in der Nähe der Gletscherzunge.
4. Paso de la Leña.
5. Oberes Thal des Rio Negro (Argentinien, Nebenfluss des Rio Diamante).
6. Pampa.
7. Maipo-Passage.
8. Aconcagua-Expedition.

Im Ganzen sind daselbst circa 190 Nummern gesammelt, die (eher um einige zu niedrig, als zu hoch geschätzt) 165 Arten angehören, die sich auf folgende Familien vertheilen:

Dikotylen	140
Berberideen (Berberis empetrifolia Lmk.)	1
Cruciferen	7
Malvaceen	2

Digitized by Google

Caryophyllaceen	2
Tiliaceen (Aristotelia Maqui L'Hér.)	1
Tropaeolaceen (Tropaeolum polyphyllum Sw.)	1
Oxalidaceen (Oxalis)	5
Zygophyllaceen (Larrea)	2
Rhamnaceen	3
Papilionaceen	12
Mimosaceen (Acacia)	1
Rosaceen	6
Onagraceen (Gayophyton)	1
Halorrhagidaceen (Myriophyllum elatinoides Gaud.)	1
Loasaceen	3
Portulacaceen (Calandrinia)	5
Cactaceen (Opuntia)	1
Grossulariaceen (Ribes)	1
Saxifragaceen (Escallonia pulverulenta R. P.)	1
Umbelliferen	4
Loranthaceen (Loranthus)	1
Rubiaceen	2
Valerianaceen	1
Compositen	39
Calyceraceen	3
Ericaceen	1
Gentianaceen	1
Hydrophyllaceen (Phacelia circinata Jacq.)	1
Labiaten (Stachys)	1
Verbenaceen	6
Solanaceen	5
Scrophulariaceen	10
Plantaginaceen (Plantago)	1
Nyctaginaceen (Bougainvillea n. sp.)	1
Chenopodiaceen (Chenopodium chilense Schrad.)	1
Polygonaceen	2
Santalaceen	3
Euphorbiaceen (Colliguaya odorifera Mol.)	1
Monokotylen	20
Orchidaceen	1
Iridaceen	3
Amaryllidaceen	4
Liliaceen	2
Juncaceen (Juncus)	1
Gramineen	9
Gymnospermen	1
Gnetaceen (Ephedra)	1
Gefäss-Kryptogamen	2
Polypodiaceen	2
Zell-Kryptogamen	2
Laubmoose	2

Bei den Familien, die mehr als eine Gattung, resp. Art enthalten, ist noch Folgendes zu bemerken.

Digitized by Google

Cruciferen: 2 Draba-Arten, Hexaptera pinnatifida Gill. u. Hook. und H. spathulata Gill. u. Hook. (die Gattung ist in den extratropischen Andes Südamericas endemisch), 1 Lepidium, 1 Brassica.

Caryophyllaceen: 1 Cerastium.

Malvaceen: 1 Sphaeralcea, 1 Cristaria.

Rhamnaceen: 2 Colletia-Arten, darunter die hochandine C. nana Clos. 1 Tralguenea (in Chile endemische Gattung).

Papilionaceen: Anarthrophyllum umbellatum (Clos), (die Gattung endemisch-chilenisch), Medicago sativa L., 2 Astragalus, 5 Adesmia (charakteristische Gattung für die chilenisch-argentinischen Cordilleren, wegen der gekrümmten Dornen cuerno de cabra, und wegen der gelben, wachsartigen Rinde leña amarilla genannt), 2 Vicia, 1 Lathyrus.

Rosaceen: 1 Geum, 5 Acaena.

Loasaceen: 2 Loasa, Cajophora coronata Hook. Arn.

Umbelliferen: 1 Bowlesia, 1 Azorella, 1 Pozoa, 1 Mulinum (chilenisch-argentinisch).

Rubiaceen: Oreopolus citrinus Schdl. (endemische Gattung der chilenischen Andes), 1 Galium.

Compositen: 2 Haplopappus, 2 Baccharis, 1 Gnaphalium, Podanthus Mitiqui Lindl. (die Gattung endemisch chilenisch), Helianthus (Flourensia) corymbosus Poepp., Anthemis Cotula L., 10 Senecio, 1 Werneria, 1 Mutisia, Chuquiraga oppositifolia Gill. et Don., 1 Chaetanthera, 1 Aldunatea, 4 Leuceria, 1 Proustia, 2 Clarionea, 2 Nassavia, Triptilium spinosum R. et Pav. (siempreviva), 1 Achyrophorus.

Calyceraceen: 1 Boopis.

Verbenaceen: 1 Lippia, 5 Verbena, deren habituelle Verschiedenheit um so auffälliger, als 4 derselben nebeneinander in den Pampas gesammelt wurden. Eine derselben (V. erinoides L.?) ist ein weichblättriges Kraut, an die bekannten Garten-Verbenen erinnernd; V. aphylla Hook. et Gill. (wohl zu Grisebach's Gattung Neosparton gehörig) ist ein fast blattloser, ruthenästiger Strauch; V. juniperina Lag., ebenfalls strauchig, hat stechende dreitheilige Blätter; V. seriphioides Hook. et Gill. wiederholt die Tracht mancher, den Steppen Vorderasiens angehöriger Salsolaceen, indem die dornigen Blätter der Hauptachse Kurzzweige kleiner, saftiger Blättchen in ihren Achseln tragen, welche den Stamm dicht bedecken. Endlich stellt die hochandine V. caespitosa Hook. et Gill. (ob identisch mit V. nubigena Poepp., einer in der botanischen Literatur übersehenen Art?) eine polsterförmige Alpenpflanze von der Tracht unserer Silene acaulis dar.

Solanaceen: 1 Solanum (wilde Kartoffel, papilla del campo), wohl S. Maglia Mol.; 1 Lycium, 1 Fabiana, Trechonaetes laciniata Miers (die Gattung chileno-argentinisch), Schizanthus Grahami Gill. (die Gattung endemisch chilenisch).

Scrophulariaceen: 6 Calceolaria, 2 Mimulus, 1 Ourisia, 1 Gerardia

Polyganaceen: 1 Rumex, Mühlenbeckia chilensis Meisn., 1 Arjona (chil. argent.), 1 Quinchamalium, Myoschilos oblongum R. P. (endemisch chilenisch). Die Zahl von drei Arten (2 p. Ct.) ist hoch für diese kleine Familie.

Amaryllidaceen: 2 Alstroemeria.

Liliaceen: 1 Triteleia, 1 Cumingia (end. chil.).

Gramineen: 1 Vilfa, 1 Agrostis, 1 Gynerium, 1 Avena, 2 Festuca, 1 Hordeum.

Digitized by Google

Polypodiaceen: Adiantum scabrum Kaulf., Lomaria alpina Spr. var. serrulata Mett.

Laubmoose: Pottia Güssfeldtii Schlieph., Bryum pendulum Schpr.

Was die specielle Verbreitung der gesammelten Arten betrifft, so ist zu bemerken, dass keine einzige Art der Aconcagua-Expedition im Cajon de los Cipreses resp. in den angrenzenden Theilen der Cordillere gesammelt wurde; da diese Localitäten zu beiden Seiten der klimatischen Grenze liegen, welche das regenreiche Süd-Chile von dem dürren nördlichen Landestheil trennt, so ist dies wohl erklärlich. In dem höchsten, an die Cordillere stossenden Saum der Pampas ausschliesslich gesammelt sind die Gattungen Sphaeralcea, Larrea, Acacia, Mulinum, Proustia, Lycium, Bougainvillea, denen sich die aus Europa eingeschleppten Arten von Brassica, Medicago (unsere Luzerne) und Anthemis anschliessen: auch die bei den Bädern von Cauquenes (766^{m}) im unteren Cachapual-Thal gesammelte Avena ist eine aus Süd-Europa eingewanderte Art. Auffällig in den alpinen Höhen, aus denen der grösste Theil der Sammlung stammt, ist das Auftreten folgender Charakterpflanzen Chile's, die auch die Küstenstriche bewohnen: Aristotelia Maqui, Escallonia pulverulenta, Podanthus Mitiqui, Triptilium spinosum, Chenopodium chilense, Mühlenbeckia chilensis, Myoschilos oblongum, Colliguaya odorifera (mit Ausnahme des Triptilium und Chenopodium sämmtlich Holzgewächse). Hinsichtlich ihrer Gesammtverbreitung sind die dem chilenisch-argentinischen Florengebiete eigenen Gattungen bereits oben namhaft gemacht worden. Ganz oder nahezu ausschliesslich südamericanisch, und zwar meist extratropisch, sind die Gattungen Cristaria, Colletia, Adesmia, Escallonia. Bowlesia (1 Art auf den canarischen Inseln), Pozoa, Werneria, die Gruppe der Labiatifloren unter den Compositen, wohin die Gattungen Mutisia, Chuquiraga, Chaetanthera, Aldunatea, Leuceria, Proustia, Clarionea, Nassavia und Triptilium, zusammen 16 Arten, also nahezu die Hälfte aller in der Sammlung vorhandenen Compositen gehören, die Calyceraceen, Fabiana, Bougainvillea, Quinchamalium, Colliguaya, Alstroemeria, Gynerium (das bekannte Pampasgras unserer Gärten, spanisch cortadera). Americanisch von weiterer Verbreitung, und zwar hauptsächlich den wärmeren Theilen der neuen Welt angehörig, sind die Familien der Tropaeolaceen, Loasaceen (1 Art arabisch-südafricanisch) Cacteen (1 Art auch im Sudan und Indien), die Gattungen Sphaeralcea (einige Arten am Cap) und Baccharis; Beispiele der Übereinstimmung in der Vegetation zwischen den subtropischen, meist dürren Gebieten Nord- und Süd-America's (in den Tropen selten oder fehlend) bieten die Familien der Hydrophyllaceen und die Gattungen Larrea, Gayophyton, Haplopappus, Helianthus, Gerardia, Triteleia. Die Sammlung enthält auch eine Reihe von Belegen für die merkwürdigen Beziehungen zwischen den drei Hauptgebieten der extratropischen Flora auf der Südhemisphäre, welche Engler unter dem neuen (wohl etwas fragwürdigen) Namen der altoceanischen Flora zusammenfasst. Besonders ausgesprochen sind diese Beziehungen bekanntlich zwischen Südamerica und Australien (bez. Neu-Seeland), wo sie in der Verbreitung von Aristotelia, Acaena, Calandrinia, Azorella, Calceolaria (nur 2 Arten in Neu-Seeland), Mimulus, Ourisia, Mühlenbeckia und der Lomaria alpina zu Tage treten, welche letztere ausserdem auch die antarktischen Inselgruppen Tristan d'Acunha und Kerguelen bewohnt. Die Gattung Oxalis, artenreich in Südamerica und am Cap, bietet dagegen ein Beispiel der ungleich selteneren Übereinstimmungen zwischen den extratropischen Südspitzen des americanischen

Digitized by Google

und africanischen Continents; in Australien (und Neu-Seeland) ist sie nur durch die tropisch-kosmopolitische Oxalis corniculata L. und die eine südamericanische O. Magellanica Forst. vertreten, die übrigens der europäischen O. Acetosella L. sehr nahe steht.

Von den Gattungstypen, die der östlichen und westlichen Hemisphäre gemeinsam sind, und deren Verbreitung auf beiden den Äquator überschreitet, können nur wenige als wahrhaft kosmopolitisch bezeichnet werden, insofern sie annähernd die ganze Erdoberfläche und zwar heisse und kühle Klimate bewohnen; hierher gehören aus der vorliegenden Sammlung nur Myriophyllum (Wasserpflanze), Gnaphalium, Senecio, Solanum, Chenopodium, Juncus (Sumpfbewohner), Agrostis, Festuca; den wärmeren Klimaten angehörig, wenn auch vielfach die Wendekreise überschreitend, sind die Gattungen Acacia, Loranthus, Lippia, Lycium, Vilfa, Adiantum. Grösser ist die Zahl derjenigen Gattungen, die in den beiden gemässigten Zonen vertreten, in den Tropen sich in die Gebirge zurückziehen oder auch ganz fehlen, wie Berberis, Draba, Lepidium, Cerastium, Astragalus, Vicia, Lathyrus, Geum, Ribes, Galium, Achyrophorus, Stachys, Plantago, Rumex, Ephedra, Hordeum, von denen die gesperrt gedruckten Gattungen auch in unserer Hochalpenflora charakteristische Vertreter besitzen. Es sind namentlich diese Gattungen, welche in der Flora der hohen Andes Erinnerungen an die Vegetation der Heimat erwecken. Demnach ist unter allen Arten der Güssfeldt'schen Sammlung (abgesehen von den oben erwähnten vier Einwanderern aus Europa) nur eine einzige Species, das Laubmoos Bryum pendulum, welche auch in Europa, und zwar auch in Deutschland und bei Berlin vorkommt; die neue Pottia Güssfeldtii schliesst sich allerdings auch an europäische Typen an.

Anlage II.

Beobachtungen über Vegetations-Grenzen.

Im Cajon de los Cipreses, 34°5, wird die Vegetation oberhalb 2700^{m} zerstreut, oberhalb 3000^{m} treten Kräuter nur ganz sporadisch auf, in 3400^{m} wurde noch ein Pflanzen-Individuum gefunden; da die Beobachtungen im December angestellt wurden, so ist anzunehmen, dass im Januar-Februar die gegebenen Werthe sich noch etwas erhöhen. In dem Niveau 1550—1650^{m} der Thalsohle und an den Hängen bis zu 100^{m} hinauf werden die »Cipreses« (Libocedrus-Bäume) gefunden.

Bei dem Überschreiten der Cordillere von Chile nach Argentinien über den Atravieso de la Leña (4107^{m}) 34°5 s. Br. wurden folgende Beobachtungen gemacht.

Beim Aufstieg von Chile: in 3482^{m}, Eindruck, dass die Vegetation völlig aufgehört habe; doch wurde bei 3926^{m} noch ein vereinzeltes Kraut ohne Blüthe gefunden.

Auf der Passhöhe, 4107^{m}, völlige Vegetationslosigkeit.

Beim Abstieg nach Argentinien: in 3406^{m}, erstes Auftreten von Vegetation; keine Adesmien (Feuerungsmaterial).

Digitized by Google

Nach dem Überschreiten zweier Secundär-Pässe auf der argentinischen Seite:

Bei 3440m, Beginn spärlicher Vegetation.

Bei 3128m, Beginn einer Wiesenbedeckung der Thalsohle, Auftreten von Krüppel-Adesmien.

Bei 2880m, Auftreten von Adesmia-Gesträuch.

Bei 1900m, Auftreten hoher Weidenbäume in den Wadis der höchsten Pampa-Zone.

Bei dem Überschreiten der Cordillere (zwei Ketten) von Argentinien nach Chile über Piedra Cruz (3781m) und Maipo-Pass (3473m) wurde beobachtet:

Argentinische Seite.

Bei 2450m, untere Grenze der Adesmien.

Bei 3163m, Gesträuch hört auf: desgleichen die continuirliche Wiesenbedeckung der Thalsohle.

Bei 3640m, Wiederauftreten von kurzem Grase.

Bei 3781m, Passhöhe Piedra Cruz: Krüppel-Adesmien.

Bei 3300m, Hochebene am Fuss des Vulcan Maipo, dürftiges Gras in curvenförmigen Linien.

Chilenische Seite.

Bei 3306m, am Maipo-Biwak, in der Nähe des Baches, kräftige Vegetation blühender Kräuter.

Bei 4000m, am Maipo-Vulcan, einzelnes kräftig blühendes Kraut (Oxalis?).

Bei 3000m, obere Grenze der Sträucher.

Bei 2500m, Thalsohle des Maipoflusses, kräftige Strauchvegetation.

Bei 1756m, obere Baumgrenze.

Bei 1500m, hohe Bäume.

Bei 1450m, obere Grenze der Quisco-Cactus.

Bei 1270m, Beginn der Nussbäume, bald Pfirsiche und Wein.

Bei dem Cordilleren-Übergang von Chile nach Argentinien über den Boquete del Valle hermoso (3565m) wurde beobachtet:

Chilenische Seite, bei 32°5 im Mittel.

Bei 1200m, Grenze der Obstbäume und des Weins.

Bei 2254m, obere Baumgrenze.

Bei 3000m, die Vegetation wird spärlich.

Bei 3600m, hart unterhalb des Secundärpasses Cuzco, Krüppel-Adesmien, Gräser, Yareta.

Bei 2400m / Bei 2650m } Thalsohle des Rio Putaendo, kräftige Sträucher.

Bei 3200m, Tropaeola.

Bei 3565m, Boquete, Grasvegetation.

Argentinische Seite.

Bei 3000m, obere Grenze einer kräftigen Wiesenvegetation in der Thalsohle.

Bei 3600m, Futterplatz für die Thiere, Krüppel-Adesmien, obere Grenze.

Bei 3750m, vereinzeltes Wiesenstück.

Digitized by Google

Vorläufige Bemerkung über die Schneegrenze.

Im December wurde im Cajon de los Cipreses der erste Schnee in 2700^{m} angetroffen. Es ist nach den angestellten Erkundigungen wahrscheinlich, dass Ende Januar der Schnee im 34° S. Br., an einzelnen Orten bis 3000^{m} hinunterreicht, dass aber der Mittelwerth der Schneegrenze in 3500^{m} Höhe liegt.

Zwischen 32° und 33° S. Br. finden sich im Februar Schneeanhäufungen bei 3600^{m}; der Boquete del Valle hermoso (3565^{m}) wurde ganz schneefrei gefunden; in der Thalsohle des oberen Valle hermoso beginnt der Schnee bei 4000^{m} in einzelnen Feldern; die Schneegrenze muss in 4200^{m} gelegt werden.

Am Maipo-Vulcan (34° 10′) liegt die Schneegrenze 4000^{m} hoch.

Dass die Schneelinie der Andes zwischen 32° und 35° sich stark senkt, unterliegt keinem Zweifel.

Die gegebenen Werthe sollen nur einen ersten Anhalt geben; eine genauere Discussion wird vorbehalten.

Digitized by Google

Digitized by Google

39. Über die Lagerungsverhältnisse der älteren Schichten in Attika.

Von Prof. H. Bücking
in Strassburg i. E.

(Bericht an die Akademie über eine im Jahre 1883 mit Unterstützung derselben ausgeführte geologische Untersuchung des Hymettos. — S. Sitz. Ber. 1882 S. 740, 1883 S. 669, 1884 S. 931.)

(Hierzu Taf. IV. und V.)

Über das Alter der krystallinischen Schiefer in Attika existiren bekanntlich zwei weit auseinandergehende Ansichten. Nach der einen, welche früher namentlich von Sauvage,[1] in jüngster Zeit besonders von M. Neumayr[2] vertreten wird und welcher sich auch R. Nasse[3] anschliesst, sind die in Attika auftretenden krystallinischen Schiefer umgewandelte Kreidesedimente, während sie nach der andern Ansicht[4] ein weit höheres Alter besitzen. Bei dem hohen wissenschaftlichen Interesse, welches sich an die Frage nach der Entstehung der krystallinischen Schiefer überhaupt knüpft, schien es daher wünschenswerth, durch eine auf genauen topographischen Karten beruhende geologische Aufnahme ein objectives Urtheil darüber zu erhalten, ob die krystallinischen Schiefer in Attika sich mit den sicher als Kreide nachweisbaren Schichten identificiren lassen oder ob sie in keinerlei Beziehung zu echten Kreideablagerungen stehen.

Einem aus diesem Grunde von Prof. Lepsius in Darmstadt und dem Verfasser gestellten Antrage, die zur Ausführung einer solchen Kartirung erforderlichen Mittel zu gewähren, willfahrte die Königliche Akademie der Wissenschaften und stellte uns zugleich das neue vorzügliche Kartenmaterial, welches auf Veranlassung des deutschen

[1] Annales des mines; IV. série, tome X. Paris 1846. p. 120 etc.

[2] Denkschriften der K. Akademie d. Wissensch., math.-naturw. Classe, XL Wien 1880: auch besonders unter dem Titel: »Überblick über die geologischen Verhältnisse eines Theils der Ägäischen Küstenländer.«

[3] Zeitschrift der Deutschen geolog. Gesellsch. XXXIV. S. 151 etc.

[4] H. Bücking, ebenda, XXXIII. S. 118 etc.

Digitized by Google

archäologischen Instituts in Athen durch den deutschen Generalstab, unter specieller Leitung des Hrn. Vermessungsrath KAUPERT, von einem grossen Theil von Attika hergestellt worden ist, zur Verfügung.

Bereits Ende Februar 1883 konnte mit der geologischen Untersuchung der nächsten Umgegend von Athen begonnen werden.

Doch wurde durch die anhaltend rauhe Witterung unsere gemeinschaftliche Arbeit bald unterbrochen, da Prof. LEPSIUS erkrankte und von der weiteren Thätigkeit in Attika einstweilen zurücktreten musste. So blieb mir allein die Aufnahme des Hymettos und die Untersuchung, welche Stellung das Schichtensystem des Hymettos zu den Schichten bei Athen einnimmt, überlassen; ich trage deshalb auch allein die Verantwortung für die aus diesen Untersuchungen gezogenen und im Folgenden kurz zusammengestellten Resultate.

Als krystallinische oder metamorphische Schiefer sind in Attika seither ziemlich allgemein diejenigen Schiefer- und Marmorschichten bezeichnet worden, welche unter den Kalken der Hügel bei Athen in der Stadt Athen selbst zu Tage treten und namentlich im östlichen Attika, zumal am Hymettos und am Pentelikon, sowie in der Gegend von Laurion mächtig entwickelt sind. Doch hat man auch wohl jene jüngeren Kalke, aus welchen die Kuppen des Lykabettos, das Froschmaul, die Akropolis, der Areopag, die Museionhügel, sowie die weitausgedehnte Decke des Turkowuni bestehen, und die wir der Einfachheit halber als »Lykabettoskalk« bezeichnen wollen, wegen ihres krystallinischen Aussehens, als sogenannten »jüngeren Marmor« zu den metamorphischen Schichten hinzugezählt; und, weil für sie die Zugehörigkeit zur oberen Kreide — in Folge einiger Petrefactenfunde — als erwiesen galt, glaubte man die metamorphischen Schichten von Attika überhaupt als Äquivalente der im übrigen festländischen Griechenland unter der oberen Kreide lagernden älteren Kreidesedimente auffassen zu dürfen.

Unter dem Lykabettoskalke liegen unmittelbar die »Schiefer von Athen«, und zwar, wo deutliche Aufschlüsse an der Grenze eine Beobachtung zulassen, in durchaus gleichförmiger Lagerung, wie das zuletzt von NASSE an der Hand einer Reihe von schönen Profilen recht überzeugend nachgewiesen worden ist, und wie ich das entgegen meiner früheren Behauptung nach erneuter sorgfältiger Untersuchung nur bestätigen kann. Ausser an den von NASSE besprochenen Stellen lässt sich die concordante Überlagerung der Schiefer von Athen durch den Lykabettoskalk besonders deutlich an der Südwestspitze des Museionhügels und ziemlich gut an der Strasse nach Eleusis, westlich von der Pulverfabrik, erkennen. Es ist daher die Vermuthung

Digitized by Google

Nasse's, dass der Kalk des Aegaleos oder der Berge von Skarmanga und Daphni, welche die Attische Ebene von der Ebene von Eleusis trennen, sowie der Kalk des Turkowuni und der Hügel von Athen identisch seien, vollkommen bestätigt. Die jetzt von einander getrennten Hügel von Athen sind also nur Reste einer einst weit verbreiteten Kalkdecke, die mit dem Turkowuni und dem Aegaleos in Verbindung stand; der Lykabettoskalk ist gleichalterig den tiefen Lagen des Kalks vom Aegaleos und entspricht somit, wenn an der Altersbestimmung des Kalkes des Aegaleos als oberen Kreidekalkes festgehalten werden darf, was wohl keinem Zweifel unterliegt, dem oberen Kreidekalk.

Als »Schiefer von Athen« möchte ich mit Nasse die Schichten bezeichnen, welche in den Gräben und an den Abhängen der Hügel bei Athen sehr gut aufgeschlossen sind und bei einer ziemlich gleichmässigen Entwickelung sich bis zu den Vorhügeln des Hymettos erstrecken, aber östlich von Athen, meist von mächtigen Diluvialconglomeraten und Alluvialmassen bedeckt, nur an einzelnen Hügeln und in tiefen Wasserrissen zu Tage treten.

Die petrographische Entwickelung dieser Schiefer ist eine sehr eigenthümliche. Vorherrschend sind graue und dunkele Schieferthone, denen Bänke eines meist dunkelgrauen, oft ganz grauwackenähnlichen Sandsteins und eines blaugrauen, zuweilen marmorartigen Kalkes eingelagert sind. Der Kalk tritt auch häufig in Form von kleineren und grösseren Linsen auf. Die Schieferthone sind in der Regel dünngeschichtet, theils von fester Beschaffenheit, theils weich, mergelartig, und häufig erfüllt mit kleinen Schwefelkieskryställchen. Auch rothe, reichlich Quarzsand enthaltende und daher rauh anfühlbare Schieferthone treten hier und da untergeordnet auf. Namentlich die untere Abtheilung der Schiefer, welche in der Stadt Athen am Fusse des Lykabettos, bei Ampelokipi, im Bett des Ilissos und an den Hügeln östlich vom Ilissos zu Tage geht, zeichnet sich durch eine dunkele Färbung aus und enthält ziemlich reichlich Quarz in Schnüren, linsenförmigen Knauern und schwachen Zwischenlagen; auch grauwackenartige, auf dem Querbruch oft gneissähnliche Sandsteine sind häufiger eingelagert, seltener sind quarzitische Bänke.

Im Ganzen zeigen die Schichten ein sehr wechselndes Streichen und Fallen und an vielen Stellen eine deutliche Faltung, namentlich an der Grenze gegen den Lykabettoskalk. Letztere ist oft recht ausgeprägt, und da der klotzige Kalk meist selbst keine Schichtung und Faltung erkennen lässt, scheint er häufig discordant auf den steiler geneigten Schiefern aufzuruhen, während er sie in Wirklichkeit gleichförmig überlagert. Mit der Faltung geht offenbar eine besondere

Digitized by Google

Veränderung der Schiefer Hand in Hand, indem sich festere, von vielen Quarzadern durchzogene Gesteine herausbilden, welche durch den eigenthümlichen seidenartigen Glanz auf den Schicht- und Ablösungsflächen an die Thonglimmerschiefer oder Phyllite erinnern. Diese Gesteine verwittern im Ganzen schwerer als die weichen Schiefer; man begegnet ihnen daher in der Umgebung von Athen weit häufiger und hält sie leicht für das vorherrschende, frischere Gestein. Dies mag wohl auch die Veranlassung dazu gegeben haben, die unter dem Lykabettoskalke bei Athen auftretenden Gesteine zu den metamorphischen oder krystallinischen Schiefern zu stellen und sie mit den Glimmerschiefern vom Hymettos zu parallelisiren, mit denen sie von vornherein keinenfalls vereinigt werden dürfen.

Nördlich von Athen, am Lykabettos und am Turkowuni, sowie östlich vom Ilissos entwickelt sich aus der unteren Schieferzone durch Einschaltung zahlreicher von Brauneisen gefärbter Kalkschieferlagen eine äusserlich durch eine mehr braungelbe Farbe charakterisirte Abtheilung. An der Akropolis und dem Museionhügel scheint sie ganz zu fehlen oder nur ganz schwach entwickelt zu sein. Sehr mächtig dagegen und nicht zu verkennen ist sie an dem südlichen Abhang des Turkowuni und an einigen Hügeln östlich vom Ilissos, hier als ein gelber Mergelkalk ausgebildet, der nur eine undeutliche Schichtung besitzt, nach oben mit Mergeln von geringer Festigkeit wechsellagert und so allmählich wieder in Schichten übergeht, welche solchen der unteren kalkarmen Zone ähnlich sind. Die Kalkschiefer der oberen Abtheilung führen vielfach Quarz und Hornstein in Linsen und dünnen schichtförmigen Einlagerungen; auch Kalk, dem Lykabettoskalk vollkommen ähnlich, kommt in grösseren linsenförmigen Einlagerungen vor und wird, wie jener, in Steinbrüchen gewonnen (vergl. Profil 1 und 2).

Etwa eine Stunde südöstlich von Athen tritt unter den eben beschriebenen Schiefern — soweit sich bei den spärlichen und unter der weitverbreiteten Diluvialbildung der Attischen Ebene nicht immer deutlich entblössten Aufschlüssen beobachten lässt, concordant — ein noch näher zu besprechendes Schichtensystem hervor (vergl. Profil 3), welches ununterbrochen längs des westlichen Abhangs des Hymettos bis zum Nordende des Gebirges am Stawro (Profil 4) und von da längs der ganzen Ostseite bis in die Gegend von Koropi in durchaus charakteristischer Entwickelung verfolgt werden konnte. Dieses Schichtensystem, das ich wegen seiner grösseren Verbreitung unweit des Gutes Kara als die »Schichten von Kara« bezeichnen will, schliesst sich in petrographischer Beziehung dem Lykabettoskalk und den Schiefern von Athen auf das engste an, unterscheidet sich aber sehr scharf

Digitized by Google

von den Schichten, aus denen der Hymettos in seinem untersuchten Theile sich aufbaut. Es sind vorwiegend gelbe Mergelkalke, den gelben Mergelkalken an der Basis des Lykabettoskalkes nördlich von Athen in manchen Lagen nicht unähnlich, an anderen Stellen auch feste, ungeschichtete, stark eisenhaltige, meist compacte, aber zuweilen auch zellige, zerfressene Kalksteine, die in ihrem Äussern den Eisenkalksteinen und Rauchwacken unseres Zechsteines vergleichbar sind, auch wie letztere oft in grossen klotzigen Massen über ihre Umgebung hervorragen. Mit solchen Gesteinen kommen noch weichere, mergelige Schiefer von gelbbrauner Farbe vor, hier und da auch Kalkschiefer, sowie dunkele Schieferthone, welche an die analogen Gesteine in den Schiefern von Athen erinnern, sehr häufig aber einen Glanz besitzen, wie er den Kalk- und Thonglimmerschiefern eigen ist. Rothbraune, blaugrüne und grünlichbraune sandige Mergel treten nur untergeordnet auf. Ganz besonders charakteristisch sind aber für die Schichten von Kara, speciell für die Mergel, noch Serpentingesteine, welche an etwa 50 verschiedenen Punkten des nördlichen Hymettos, an den meisten in nur geringer, an einigen auch in grösserer Ausdehnung, nachgewiesen werden konnten. Einige dieser Serpentine stehen mit noch ziemlich frischem Diallag-Gabbro in genetischem Zusammenhange; andere scheinen bei weiter vorgeschrittener Zersetzung Anlass zur Bildung der eigenthümlichen Eisenkalksteine und Kieselkalke gegeben zu haben.

Während der gelbe Mergelkalk unten gegen die Hymettosschiefer sehr scharf abschneidet, ist die Grenze gegen die Schiefer von Athen oft weniger deutlich. Die gelben Mergelkalke gehen nämlich nach oben sehr häufig in festere Kalkbänke über, die eine gelbe oder auch graue Farbe besitzen, und sich von den Kalkbänken in den Schiefern von Athen nicht unterscheiden. Besonders häufig aber schliessen die Mergelkalke von Kara in ihrer oberen Abtheilung grössere linsenförmige Kalkmassen ein, die entweder deutlich schieferig sind, wie die oft röthlich gefärbten Kalkschichten am Kopanas und Fuchsberg zwischen Kara und Kaesariani, oder ganz denselben Habitus besitzen, wie die klotzigen Lykabettoskalke, auch gleiche Verwitterung und gleiche Bergformen zeigen wie jene. So sind die Kalke des Guri Korakut (vergl. Profil 4), des Tschako, der Berge am Stawro, bei Liopesi und Koropi, sämmtlich Einlagerungen in den Schichten von Kara, petrographisch vom Lykabettoskalk kaum zu unterscheiden. Zuweilen sind einzelne Lagen auch deutlich grob-krystallinisch ausgebildet und verdienen dann als Marmor bezeichnet zu werden, wie z. B. ein Theil der Kalke am Fuchsberg.

Die schieferigen sowohl wie die klotzigen Kalke aus dieser Zone

Digitized by Google

— wir wollen sie der Einfachheit halber nach ihrem Auftreten am Guri Korakut[1] als »Korakutkalke« bezeichnen — umgürten, in der Form von gewöhnlich sehr ansehnlichen Vorhügeln, den Hymettos auf der West-, Nord- und Ostseite. Es muss daher seltsam erscheinen, dass selbst ein so sorgfältiger Beobachter wie Nasse diese Kalke und ihre Stellung zu den Hymettosschichten nicht erkannt hat.

Wegen der Ähnlichkeit der letzterwähnten Kalke mit dem Lykabettoskalk, des gelben Mergelkalkes von Kara mit dem Mergelkalk in der oberen Abtheilung der Schichten von Athen, sowie der dunkelen Mergel und der an Thonglimmerschiefer erinnernden Gesteine in der letzterwähnten Zone mit den analogen Gesteinen in den Schiefern von Athen möchte ich beide Schichtensysteme zu einer grösseren Gruppe zusammenfassen, welche also zunächst lediglich durch die durchaus ähnliche petrographische Beschaffenheit und durch die gleichförmige Lagerung ihrer Glieder zusammengehalten wird. Dabei muss ich allerdings betonen, dass Serpentine in den Schichten von Athen nicht beobachtet wurden, und dass andererseits grauwackenähnliche Sandsteinschichten, die in letzteren häufiger sind, in den Schichten von Kara ganz zurücktreten, wenngleich sie nicht vollständig fehlen.

Unter den Schichten von Kara, von ihnen mantelförmig umschlossen, erhebt sich das System des Hymettos, ein etwa in nord-südlicher Richtung lang ausgedehnter Sattel von Marmor und Glimmerschiefer. Allenthalben, wo die Grenze deutlich sichtbar war, und es sind dies zahllose Stellen längs des westlichen, nördlichen und östlichen Abhangs, liegen die Schichten von Kara gleichförmig über den fast immer steil aufgerichteten Hymettosgesteinen. Unter letzteren waltet der Marmor entschieden vor; Glimmerschiefer und Kalkglimmerschiefer treten mehr zurück und erreichen nur auf der Westseite eine grössere Verbreitung.

Die Sattellinie entspricht im Allgemeinen dem Kamm des Gebirgszuges;[2] die tiefsten Schichten des Hymettos treten demzufolge auf dem Kamm zu Tage und liegen dort nahezu horizontal, werden aber allmählich immer mehr geneigt, je mehr sie sich dem Fuss des Gebirges nähern; am westlichen Abhang fallen die Schichten nach Westen, am östlichen Abhang nach Osten. An den Abhängen, von denen sich der

---

[1] Guri Korakut, albanesisch, zu deutsch Rabenstein.

[2] Bittner hebt in seiner Abhandlung »der geologische Bau von Attika u. s. w.« (Denkschriften der K. Akademie der Wiss., math.-naturw. Classe, XL, Wien 1880) auf S. 67 hervor, dass im Hymettos und vor Allem im Pentelikon geologisches und orographisches Streichen keineswegs übereinstimmen; für den Hymettos ist dies nicht zutreffend, aber im Pentelikon scheint es der Fall zu sein. Vergl. auch Neumayr l. c. p. 386 u. 389.

Digitized by Google

westliche ziemlich allmählich in die Attische Ebene senkt, während der östliche bei einer weit steileren Böschung (von durchschnittlich 30°) unvermittelt in die von Diluvial- und Tertiärablagerungen erfüllte weite Mesogia abfällt, treten über den tiefsten Hymettosschichten, dem Gipfelmarmor, die jüngeren Gebirgsglieder hervor. Diese sind namentlich am westlichen Abhange besonders deutlich entwickelt. Es folgen auf den mächtigen Gipfelmarmor zunächst Glimmerschiefer mit zahlreichen Marmoreinlagerungen; und auf diese dann ein weiterer mächtiger Marmorzug, der obere Marmor des Hymettos, dem in durchaus gleichförmiger Lagerung die Schichten von Kara sich anschliessen (vergl. Profil 3).

Dieser einfache Bau des Gebirges, der nirgends durch Verwerfungen von irgend welcher Bedeutung gestört erscheint, entspricht somit ganz der Auffassung von Gaudry, Bittner und Nasse; die von Fiedler und Russegger früher gemachten entgegenstehenden Angaben beruhen auf Beobachtungen localer Erscheinungen an einzelnen von Athen aus leichter zugänglichen Stellen, wo die Gebirgsschichten bei meist steilem Einfallen Faltungen und Überkippungen zeigen, die erst bei weiterer Untersuchung als solche zu erkennen sind. Auch die in den Fig. 5, 6 und 7 dargestellten Verhältnisse könnten, für sich betrachtet, leicht zu irrigen Ansichten führen; nach dem vorher Gesagten ist eine nähere Erläuterung derselben überflüssig.

Der Gipfelmarmor des Hymettos besitzt bei einer sehr feinkörnigen bis dichten Structur im Allgemeinen eine hellblaugraue oder weisse Farbe; dunklere Bänder parallel der Schichtung verleihen dem Gestein ein sehr charakteristisches Aussehen, so dass auch im verarbeiteten Zustande der Hymettische Marmor leicht wieder zu erkennen ist. Seine Mächtigkeit ist eine sehr beträchtliche; man kann sie in der tiefen Schlucht südlich von Kaesariani, Kakorhevma genannt, in dem tiefen Einschnitt zwischen Trachones und Koropi, der, nahezu senkrecht gegen den Gebirgskamm gerichtet, den nördlichen Hymettos, Trelowuni, von dem südlichen, dem Mawrowuni, trennt, auch am östlichen Abhang oberhalb Liopesi auf 1000—1500 Meter bestimmen.

Im Süden jenseits des tiefen Passes, in dem sogenannten kleinen Hymettos, treten unter dem weissgrauen Gipfelmarmor auch noch schwarze Marmore auf, nach denen offenbar der südliche Theil des Gebirges den Namen Mawrowuni (= schwarzer Berg) erhalten hat. Diese schwarzen Marmore, die aus Mangel an Zeit noch nicht näher untersucht werden konnten, erstrecken sich nach Süden bis zur Nymphengrotte, einer kleinen doppelkammerigen Tropfsteinhöhle, welche durch eine Reihe von alten Inschriften und Reliefs auch archaeologisches Interesse bietet, und stehen dort mit Kalkglimmerschiefer, der sich

Digitized by Google

bis nach Wari hin fortsetzt, in engster Beziehung. Der schwarze Marmor ist zuweilen sehr dicht und verdient dann eher die Bezeichnung Kalkstein; manche Varietäten sind dem bei Eleusis auftretenden schwarzen Kalke, der auf den Karten von Gaudry und Neumayr als gleichalterig mit dem Kalk des Aegaleos, also als oberer Kreidekalk, bezeichnet ist, täuschend ähnlich.[1]

Den unteren Marmor des Hymettos überlagert der Hymettosschiefer, eine Glimmerschieferzone, die auch in der Topographie des Gebirges recht scharf zum Ausdruck kommt. Aus der Ferne, schon von Athen aus, ist sie als ein breiter, bewaldeter Streifen zwischen den nur hier und da von niedrigem Gestrüpp bedeckten, meist nackten Marmorklippen des Hymettos erkennbar. Sie zieht sich von dem Kamm des Gebirges in der Gegend des Klosters Asteri allmählich bis zu der Diluvialebene in der Gegend von Kara herab, in dieser ganzen Erstreckung durch sanftere Bergformen vor dem vielfach zerklüfteten, schroff abfallenden Marmor ausgezeichnet. Auch der Aufenthalt an dem sonst so unwirthlichen, wasserarmen Hymettos wird wesentlich begünstigt durch das Vorhandensein der Glimmerschieferzone. Vielfach brechen frische Quellen aus ihr vor, deren Wasser zwar nach kurzem Laufe in dem lockeren Marmorschutt wieder versiegt, aber doch meist eine solche üppige Vegetation hervorruft, dass die Hirten mit ihren Heerden gern hier rasten und oft Monate lang im Winter verweilen. In alter Zeit gaben einige der Quellen frommen Männern Anlass zur Gründung stattlicher Klöster inmitten fruchtbarer Olivenhaine; Kaesariani, Asteri, Karyaes und Georgios sind die Namen dieser nun von den Mönchen verlassenen Wohnstätten. Nur Kaesariani hat sich noch als kleines Landgut erhalten; hier lässt noch die Umgebung der erquickenden Quelle die fleissige, sorgsame Hand der früheren Bewohner erkennen und erinnert an eine fern zurückliegende glücklichere Zeit. Von Asteri, Karyaes und Georgios sind nur noch Trümmer vorhanden, die den Hirten und ihren Heerden Schutz gegen die winterliche Kälte, den Arbeitern in den Steinbrüchen einen Zufluchtsort gegen die glühende Mittagssonne im Sommer gewähren.

Im südlichen Theil des Hymettos, da, wo nach dem Vorgange von Gaudry[2] auf der von Bittner und Neumayr veröffentlichten Übersichtskarte ein breiter, das Gebirge quer durchsetzender Schieferzug

---

[1] Ein antiker Steinbruch, etwa 1 Stunde südwestlich von Chasani, deutet darauf hin, dass ein Theil des schwarzen Marmors, vielleicht sogar der grössere Theil, der im alten Athen zu Bauwerken verwendet wurde, nicht wie die Archaeologen annehmen, von Eleusis, sondern von dem kleinen Hymettos stammt.

[2] Gaudry, animaux fossiles et géologie de l'Attique. Paris, 1862—67. — Geolog. Karte von Attika u. s. w.

Digitized by Google

eingezeichnet ist, entsprechend dem vorerwähnten tiefen Einschnitte, der den Trelowuni von dem Mawrowuni trennt, wurden nirgends Glimmerschiefer oder ähnliche Gesteine beobachtet. Nur die Terrainverhältnisse sind hier dadurch, dass der Gipfelmarmor in senkrecht abfallenden Wänden über den durch sanftere Bergformen ausgezeichneten schwarzen Marmor emporragt, so eigenartige, dass die Vermuthung, ein weicheres, leichter zerstörbares Gestein trete hier unter dem Marmor auf, für den aus der Ferne beobachtenden[1] und damals wohl noch nicht mit dem Bau des nördlichen Hymettos vertrauten Gaudry sehr nahe lag; eine aufmerksame Betrachtung des Schichtenfallens hätte ihm anderenfalls seinen Irrthum vor Augen führen müssen.[2]

Das Hauptgestein der Glimmerschieferzone ist ein Glimmerschiefer von vollkommen krystallinischem Aussehen, in welchem gewöhnlich der dunkele Glimmer den Quarz überwiegt. Häufig schliesst er körnigen Kalk in dünnen Lamellen und kleinen Linsen ein. Auch grössere Marmorlagen von linsenförmiger Gestalt, bald so wenig mächtig, dass ihre Auszeichnung auf der Karte, selbst bei dem Maassstab $^1/_{25000}$, nicht möglich ist, bald so gross, dass Steinbrüche in denselben angelegt werden können (wie z. B. an der Markoskapelle bei Kaesariani), durchschwärmen den Glimmerschiefer vielfach und häufen sich namentlich nördlich vom Kloster Asteri. Eine Abnahme in der Mächtigkeit der Glimmerschieferzone steht damit im engsten Zusammenhange.

Neben dem Glimmerschiefer, der zuweilen auch Quarz ausgeschieden enthält, in Form von Linsen und vielfach sich verästelnden Schnüren, sind auch Quarzitschiefer, im Ganzen aber von untergeordneter Bedeutung, zu finden. Besondere Aufmerksamkeit verdienen noch Gesteine, welche sich zwischen dem Kaesarianiberge und dem Kloster von Asteri zu dem vollkrystallinischen Glimmerschiefer an der oberen Grenze der Schieferzone gesellen, nämlich dunkele Thonschiefer und Thonglimmerschiefer. Sie besitzen an ihrer breitesten Stelle bei Kaesariani bei einem steilen Einfallen unter circa 80° eine Mächtigkeit von etwa 150 Meter und sind hier, ganz entsprechend der Beschreibung, welche bereits Bittner (l. c. p. 60) von dieser Fundstelle gegeben hat, graue, gelbliche und bläuliche, meist aber dunkelgefärbte Thonschiefer von theilweise holzartig faserigem Aussehen, die gern in

[1] Nach der Einzeichnung seiner Routen in der Karte zu urtheilen, hat Gaudry sich nur von Süden, von den Höhen des Mawrowuni, her einen Einblick in den Einschnitt verschafft, denselben aber nicht selbst betreten.

[2] Bittner (l. c. p. 61) hat seinen Weg durch den Einschnitt genommen, und, trotzdem er keinen Schiefer gesehen hatte, die Gaudry'sche Einzeichnung nicht zu corrigiren gewagt; er macht aber darauf aufmerksam, dass die Einzeichnung Gaudry's möglicherweise nicht correct sei.

Digitized by Google

griffelförmige Stücke zerfallen; nur untergeordnet sind eisenreiche Zwischenlagen, welche manchen Varietäten des Eisenglimmerschiefers nicht unähnlich sind. Auch Quarz enthalten die Thonschiefer hier und da in linsenförmigen Knauern eingeschlossen, und als Seltenheit dünne Calcitzwischenlagen. Auf der Schichtfläche ist häufig eine eigenthümliche Kräuselung bemerkbar, wie man sie in ähnlicher Weise an den palaeozoischen Schiefern unserer Gegenden beobachtet. Abgesehen von ihrer eigenthümlichen Ausbildung, welche sich so wesentlich von der der vollkrystallinischen Schiefer dieser Zone unterscheidet, erregen diese Thonschiefer noch ein besonderes Interesse dadurch, dass sie zuweilen auf ihren Schichtflächen kleine, von Brauneisen erfüllte, entfernt an Tentaculiten erinnernde, spitz kegelförmige Eindrücke zeigen, deren Deutung viele Schwierigkeiten darbietet. Reste unzweifelhaft organischen Ursprungs konnten nicht nachgewiesen werden.

Auch am Saumpfad nach Liopesi nördlich vom Kloster Asteri sind diese Thonglimmerschiefer, wenn auch weniger mächtig, so doch noch deutlich unter typischem Glimmerschiefer erkennbar; weiter nördlich wurden sie nicht mehr beobachtet.

An dem Pass, welchen der erwähnte Saumpfad überschreitet, setzt die Schieferzone, bei fortwährendem Wechsel des Streichens und vorwiegend steilem Einfallen stark gefaltet, auch in geringerer Mächtigkeit, auf den Ostabhang des Hymettos über. Hier wird durch mächtige Marmorzwischenlagen der Glimmerschiefer in mehrere Theile zersplittert; die nach Süden hin fortstreichenden keilen sich nach und nach aus, so dass von Liopesi an nach Süden bis weit über den tief eingeschnittenen Pass zwischen Chasani und Koropi der ganze östliche Abhang des Hymettos nur aus Marmor besteht, ohne irgend eine bemerkenswerthe Glimmerschieferzwischenlage. Während auch in nördlicher Richtung vom Pfad nach Liopesi der dem Ostabhang des Gebirges entsprechende Gegenflügel des Glimmerschieferzuges sich sehr bald auskeilt und nur wenige isolirte an Marmorzwischenlagen reiche Kalkglimmerschieferpartien zwischen dem Pass und dem nördlichen Abfall des Hymettos etwa das Niveau bezeichnen, welches der Glimmerschiefer bei vollkommen gleichbleibender, anhaltender Mächtigkeit einnehmen würde, setzt der andere Flügel, zunächst nur sehr wenig mächtig, bald wieder auf den Westabhang über und lässt sich dort bis zum Nordende des Hymettos, bis in die Nähe des Klosters Joannis Kynigos, verfolgen. In dieser ganzen Ausdehnung ist er aber weniger charakteristisch als in seinem südlichen Theile; namentlich stellen sich so viele zwischengreifende Lager von Marmor ein und nehmen allmählich an Mächtigkeit zu, dass man im Zweifel sein kann, ob man auf der Karte Glimmerschiefer oder Marmor auszeichnen soll. Beim Kloster

Digitized by Google

Joannis Kynigos tritt schliesslich der Glimmerschiefer ganz zurück. Man findet hier ebenso wie auf dem östlichen Gegenflügel nur Marmor mit wenigen isolirten linsenförmigen Einlagerungen von Kalkglimmerschiefer.

An dieser Stelle lässt sich demnach der obere Hymettosmarmor von dem unteren, von welchem er südlich von Kloster Asteri so leicht zu unterscheiden ist, nicht mehr trennen; es erscheint deshalb rathsam, den oberen und unteren Hymettosmarmor als »Hymettosmarmor« schlechthin zusammenzufassen und den Glimmerschieferzug als eine grosse im Norden mit dem Marmor in auskeilende Wechsellagerung tretende linsenförmige Einlagerung zu betrachten (vergl. auch Fig. 5, welche diese Deutung zulässt). Nur die etwas abweichende petrographische Ausbildung, die der obere Hymettosmarmor westlich vom Kloster Asteri zeigt, wo er am mächtigsten entwickelt ist, rechtfertigt seine besondere Betrachtung. Von Neumayr ist dieser letztgenannte Marmor mit den Kalken der Vorhügel des Hymettos vereinigt und als »oberer Marmor« mit dem Lykabettoskalk identificirt worden, was, wie bereits Nasse betonte und wie aus den hier auseinandergesetzten Lagerungsverhältnissen noch klarer hervorgeht, keinenfalls zulässig ist. Der obere Hymettosmarmor in der hier gemachten Beschränkung ist die Marmorzone zwischen den Schichten von Kara und dem Hymettosschiefer, welche sich vom Kloster Asteri aus in südlicher Richtung über den Kaesarianiberg bis in die Nähe des Landgutes Kara verfolgen lässt und von Asteri nach Süden hin immer mehr und mehr an Mächtigkeit abnimmt. In dieser ganzen Ausdehnung besitzt der Marmor eine sehr schöne blendend weisse Farbe, ist dabei sehr feinkörnig, nur selten deutlich geschichtet, wohl aber sehr stark zerklüftet und in parallelepipedische Stücke zertheilt — die Hauptursache, weshalb er nicht so vielfach verarbeitet wird, wie der Gipfelmarmor, der in grossen Werksteinen bricht.

Von Asteri aus in nördlicher Richtung nimmt der »obere« Marmor ganz allmählich die Beschaffenheit des Gipfelmarmors an; anfänglich sind nur die oberen Lagen an der Grenze gegen die Schichten von Kara jenen ähnlich; dann beobachtet man im Thal oberhalb des Klosters Joannis Theologos deutlichere Übergänge; endlich ist ein wenig nördlich von der Stelle, wo der Hymettosschiefer in geringer Mächtigkeit und reich an Marmorzwischenlagen über den Kamm des Hymettos auf die westliche Seite setzt, der obere Marmor in seinem Aussehen von dem Gipfelmarmor nicht mehr zu unterscheiden. Er wird hier, in gleicher Weise wie der letztere, in Steinbrüchen gewonnen und wie dieser verarbeitet. Auch beginnen hier zwischen den Marmorschichten Kalkglimmerschieferlagen, die theils schon bald sich wieder auskeilen, theils schärfer hervortreten und dann das gleiche Verhalten zeigen wie der vorher erwähnte

Digitized by Google

Schieferzug in diesem Theile des Gebirges. Ebensowenig wie hier ist auch auf der Nord- und Ostseite des Hymettos eine petrographische Unterscheidung des unteren und oberen Hymettosmarmor durchführbar.

Noch einer grösseren Linse von Kalkglimmerschiefer muss hier Erwähnung gethan werden, welche sich in der Nähe des verfallenen Klosters Joannis Theologos zwischen dem gelben Mergelkalke von Kara und dem oberen Marmor einschiebt. Sie ist namentlich am Abhang des Guri Korakut recht gut entblösst (vergl. Fig. 4) und zeigt hier und in den Gräben westlich von den Ruinen des Klosters eine ganz ähnliche Entwickelung wie der bereits erwähnte Kalkglimmerschiefer in der tieferen Region. Sie hat mit dem Hymettosschiefer vor Allem auch das reichliche Auftreten von Serpentin gemein, welcher, im Ganzen sehr reich an Chromeisenerz, bald in grösseren zusammenhängenden Massen, bald in kleineren Kuppen und linsenförmigen Einlagerungen sich findet. Von dem Serpentin in den Schichten von Kara scheint er verschieden zu sein. Ein Zusammenhang mit Gabbroähnlichen Gesteinen konnte wenigstens nicht nachgewiesen werden; doch ist eine genauere Untersuchung noch nicht zum Abschlusse gelangt. Am Kloster Joannis Theologos, in der jüngsten Kalkglimmerschieferzone, wurden 5, in den älteren Hymettosschiefern im Ganzen 22 von einander getrennte Serpentinvorkommen nachgewiesen. Aber auch im Hymettosmarmor liegt am östlichen Abhang in der Richtung von Kara auf Koropi an zwei nahe aneinander liegenden Stellen Serpentin; offenbar jedoch setzte der starre Marmor dem Empordringen der Serpentinmassen weit mehr Widerstand entgegen, als der weichere nachgiebige Glimmerschiefer, und letzterer immer noch mehr als der noch weichere Schiefer von Kara, in welchem, wie oben erwähnt wurde, an 50 verschiedene Serpentinvorkommen, trotz seiner geringeren horizontalen Verbreitung, aufgefunden wurden.

Während die Zugehörigkeit der Schichten von Kara und von Athen zur Kreideformation wegen verschiedener Reste von Petrefacten, welche in dem ihnen gleichförmig aufgelagerten Lykabettoskalke aufgefunden und als Kreidefossilien erkannt wurden, kaum zweifelhaft erscheint, wenn auch eine genauere Bestimmung ihres Alters noch nicht gelungen ist, lässt sich für die Schichten des Hymettos wegen ihres durchaus abweichenden petrographischen Charakters und gänzlichen Mangels an irgenwelchen deutlich erkennbaren Organismen noch keine Altersbestimmung vornehmen. Wichtig für die letzterwähnten Schichten ist nur, dass sie durchaus gleichförmig die Schichten von Kara unterteufen, dass in ihnen neben vollkrystallinisch ausgebildeten Glimmerschiefern und Marmoren auch untergeordnet Thonschiefer-

Digitized by Google

ähnliche Gesteine auftreten, die in ihrem Habitus an Thonschiefer älterer Formationen erinnern, auch dass in undeutlichen noch zweifelhaften Gebilden in Marmorschichten, welche bei Kaesariani jene Thonschiefer gleichförmig überlagern, von Bittner und Neumayr Korallen gesehen werden, die für das cretacische Alter des ganzen Schichtencomplexes beweisend sein sollen.

Eine mehrtägige Durchstreifung des Gebietes zwischen dem Nordende des Hymettos und dem Pentelikon einerseits, dem Landgut Pikermi und Kephisia andererseits, ergab nur rücksichtlich des Vorhandenseins der auf der »Tektonischen Übersichtskarte etc.« von Bittner, Neumayr etc.[1] angegebenen Bruchlinie zwischen Hymettos und Pentelikon ein negatives Resultat. Auch die Lagerungsverhältnisse im Gebiet des Turkowuni, am Nordabfall des Hymettos und am Südabhang des Pentelikon sind derart, das die Betrachtungen Neumayr's über die tektonischen Beziehungen der genannten Gebirge[2] unhaltbar werden. Dagegen erhält man Aufschluss über die Stellung des Glimmerschiefers und des Marmors des Pentelikon zu den Schichten des Hymettos. Ein Profil (Fig. 8), welches am Nordende des Hymettos am Kloster Joannis Kynigos über den Kreuzungspunkt der Strassen von Athen nach Marathon und nach Laurion (Stawro) in nordnordöstlicher Richtung bis zum Kloster Penteli gelegt wird, in dieser ganzen Ausdehnung nahezu senkrecht zu dem Streichen der Schichten,[3] wird die Verhältnisse am besten erläutern. Auf den Hymettosmarmor legen sich am Kloster Joannis Kynigos die Schichten von Kara mit vereinzelten Serpentinstöcken und einer ansehnlichen Einlagerung von Korakutkalk, um nördlich von dem Strassenkreuz unter den Diluvialconglomeraten und Tertiärschichten, welche die weite Ebene zwischen Hymettos und Pentelikon erfüllen, zu verschwinden. Nur an vereinzelten Hügeln in der Ebene tritt aus den jüngeren Schichten der Korakutkalk in typischer Ausbildung hervor; in zusammenhängendem Zuge erst wieder nordwestlich von dem Gute Galibo am Fuss des Pentelikon. Dann aber folgen in ganz normaler Entwickelung unter dem Korakutkalke die Mergel von Kara, reich an Einlagerungen von Eisenkalkstein, unter diesen die blaugrauen, deutlich gebänderten und geschichteten Hymettosmarmore, und unter letzteren, in durchaus gleichförmiger Lagerung, wieder Glimmerschiefer und Kalkglimmer-

[1] In dem oben citirten Werke von Neumayr.

[2] L. c. p. 398; vergl. auch Bittner, l. c. p. 71.

[3] Erst vom Kloster Penteli an nordwärts lenken die Schichten allmählich in ein nordöstliches Streichen ein, wie es Neumayr auf der tektonischen Übersichtskarte und im Texte angibt.

Digitized by Google

schiefer, welche das Hangende von typischem Pentelikonmarmor sind. Der letztere unterscheidet sich bekanntlich durch seine blendend weisse Farbe, sein etwas gröberes, gegenüber dem Parischen Marmor aber noch feines Korn, und durch häufigen Glimmergehalt leicht von dem Hymettosmarmor. In ähnlicher Weise, wie der letztere, zeigt er eine mannigfache Wechsellagerung mit Glimmerschiefer und Kalkglimmerschiefer. Gerade aus diesem Grunde muss es zunächst noch unentschieden bleiben, ob der zwischen dem Hymettosmarmor und der obersten Lage des Pentelikonmarmors liegende Glimmerschieferzug zu den Hymettos- oder den Pentelikonschichten gerechnet werden muss.

Aus diesen, im Profil 8 zur Anschauung gebrachten Lagerungsverhältnissen geht mit Bestimmtheit hervor, dass die Pentelikonschichten älter sind als die Hymettosschichten, ein Resultat, das auch in technischer Beziehung nicht ganz ohne Bedeutung sein dürfte.

Die erzreichen Schichten in Laurion nämlich entsprechen allem Anschein nach den Hymettosschichten, insbesondere ähnelt der Marmor vom Velaturiberg bei Thoricos, wo er auch im Eisenbahneinschnitt sehr deutlich entblösst wurde, dem Hymettischen Marmor in auffallender Weise. Nur scheinen in Laurion die einzelnen mit dem Marmor in Wechsellagerung tretenden Schieferschichten, an deren Grenzflächen bekanntlich reiche Erze auftreten, und die vielfach von Erzgängen durchsetzt sind, viel constanter zu sein als im Hymettos. Auch sind im letzteren Gebirge bis jetzt an dem Contact von Marmor und Schiefer noch keine Erze von irgend welcher Bedeutung gefunden worden, obschon es an Versuchen nicht gefehlt hat. Nur eines Erzganges im Marmor auf der Ostseite, ganz nahe der Grenze gegen die Mergelkalke von Kara, etwa in der Mitte zwischen Liopesi und Stawro, muss ich noch Erwähnung thun. Der Gang streicht in h. $2^3/_4$, fällt mit 70 bis 80° gegen O., ist etwa 1 bis $1^1/_2$ Meter mächtig und führt vorwiegend Galmei. Auch Bleiglanz und Zinkblende sollen auf ihm einbrechen, doch war an der Halde des Versuchsbaues nichts von diesen Mineralien zu bemerken.

Auch die Schichten von Kara kommen in Laurion noch recht typisch entwickelt vor; sie werden am Cap Sunion in der Nähe des berühmten Athenetempels in grösserer Ausdehnung, dann am Velaturiberge bei Thorikos, dessen Basis aus Hymettosmarmor besteht, beobachtet und finden sich ausserdem bei Keratea und Markopulo unter Verhältnissen, die es wahrscheinlich machen, dass die östlich von Markopulo liegenden Kalke wohl zu den Korakutkalken zu stellen sind. Von Markopulo endlich scheinen die Schichten von Kara längs der Südgrenze der weiten von Diluvialconglomeraten bedeckten Mesogia

Digitized by Google

in ununterbrochenem Zuge bis nach Koropi an den Ostfuss des Hymettos sich fortzusetzen.

Es geht aus diesen Angaben zur Genüge hervor, dass die geologische Karte von Attika, wie sie Gaudry entworfen hat, und wie sie ohne eine wesentliche Änderung von Bittner und Neumayr acceptirt worden ist, kein sehr treues Bild von den thatsächlichen Verhältnissen gibt und nach vielen Richtungen gar sehr der Verbesserung oder Umarbeitung bedarf.

Fasst man noch einmal kurz die Hauptresultate der vorjährigen Untersuchung zusammen, so ergibt sich etwa das Folgende:

1. Die metamorphischen Schichten in Attika besitzen eine viel geringere Ausdehnung als man nach den Untersuchungen von Gaudry, Bittner und Neumayr vermuthen sollte.

2. Die Kalke der Hügel von Athen, die Schiefer von Athen sowie die Kalke und Schiefer der Vorhügel des Hymettos sind unzweifelhaft sedimentäre Schichten, welche der Kreideformation nicht zuzurechnen zunächst kein zwingender Grund vorliegt. Es würden, wenn die Bestimmung der Kalke des Aegaleos als »Oberer Kalk der Cretacischen Bildungen« ausser allem Zweifel steht, die Kalke der Hügel bei Athen dem oberen Kreidekalk und die Schiefer von Athen und die Schichten der Hymettosvorhügel etwa den im übrigen festländischen Griechenland unter dem oberen Kreidekalk folgenden Macignoschichten und älteren Kreidekalken entsprechen können.

3. Unter diesen Schichten tritt das System des Hymettos als eine obere Abtheilung der metamorphischen Schiefer von Attika, in durchaus gleichförmiger Lagerung, hervor. Die Hymettosschichten bestehen vorherrschend aus Marmor, in welchem Kalkglimmerschiefer, Glimmerschiefer und Thonschiefer linsenförmige Einlagerungen bilden; ihre Mächtigkeit mag etwa 3000 Meter betragen.

4. Die Pentelikonschichten nehmen ihre Stelle unter den Hymettosschichten ein und entsprechen somit einer unteren Abtheilung der metamorphischen oder krystallinischen Schiefer Attikas, in welcher weisse zuckerkörnige Marmore mit Glimmerschiefer und Kalkglimmerschiefer wechsellagern. Ihre Mächtigkeit lässt sich zur Zeit selbst noch nicht annähernd bestimmen.

5. Serpentine finden sich hauptsächlich in zwei Niveaus; erstens in den weicheren Schichten der Vorhügel des Hymettos, wo sie mit Gabbros in Zusammenhang stehen, und zweitens in der tieferen Glimmerschieferregion, in welcher sie reich an Chromeisenerz sind.

6. Die erzführenden Schichten von Laurion entsprechen allem Anschein nach den Hymettosschichten; ein Auftreten der Pentelikonschichten in Laurion ist bis jetzt mit Sicherheit noch nicht bekannt.

Digitized by Google

Eine fernere Reihe von wichtigen Resultaten wird durch die Entscheidung der folgenden Fragen herbeigeführt werden, mit welchen die weitere geologische Untersuchung in Attika sich zunächst zu beschäftigen haben wird:

1. Sind im südlichen Hymettos der schwarze Marmor und die mit ihm in Verbindung stehenden Kalkschiefer bei Wari älter als der Gipfelmarmor des Hymettos oder entsprechen sie nur einer anderen Ausbildung der gleichen Schichten, und welche Stellung nehmen sie im ersten Falle zu den Pentelikonschichten ein?

2. Lässt sich der Hymettosmarmor rings um das Pentelikon verfolgen, oder geht er an einzelnen Stellen in anders ausgebildete Schichten über?

3. Geht der Korakutkalk am Stawro und am Pentelikon vielleicht im Streichen in den Lykabettoskalk des Turkowuni über dadurch, dass sich die oberen Mergelkalke von Kara und die Schiefer von Athen auskeilen, und wie verhält sich zu jenen Kalken der Kalkzug zwischen Kephisia und Stamata-Wrana, den Nasse mit dem Lykabettoskalk identificiren möchte?

4. Stehen die Schichten von Kara, wie sie am östlichen Abhang des Hymettos bei Liopesi und Koropi beobachtet werden, in nachweisbarem Zusammenhang mit den analog entwickelten Schichten bei Markopulo, Keratea und Thoricos?

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

Digitized by Google

KA

der Umg

AT

Maassst

1000 0 1000 200

Die eingeschriebenen Zahlen g
spiegel in Meter an, die mit o
beziehen sich auf die beigefüg

Digitized by Google

5

E
d
s

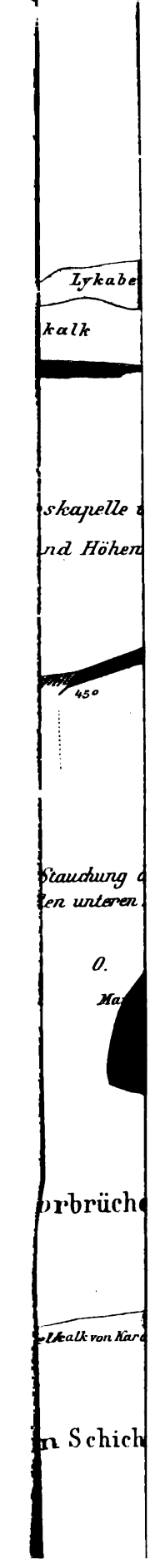
n
G
A
ir

v
S

le
d
v
zu
b

d
w
M

Digitized by Google



Digitized by Google

40. Die elektrische Leitungsfähigkeit des im Vacuum destillirten Wassers.

Von Friedrich Kohlrausch.

(Vorgelegt am 23. October; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XL]: — ausgegeben am 30. October.)

Die Frage nach dem elektrischen Leitungsvermögen des Wassers ist noch nicht erledigt. Durch eine Anzahl von Vorsichtsmaassregeln, durch besondere Sorgfalt in der Herstellung und Aufbewahrung gelang es mir allerdings schon früher, Wasser zu erhalten, dessen Leitungsvermögen bei 22° nur 72 Billiontel von demjenigen des Quecksilbers betrug.[1] Aber wenn auch dieser oder ein naheliegender Werth bei verschiedenen Destillationen wiederholt die erreichbare untere Grenze bildete, so liess sich doch nicht behaupten, dass derselbe nun wirklich das Leitungsvermögen des Wassers darstelle, weil die Herstellung ganz reinen Wassers auf gewöhnlichem Wege mit unüberwindlichen Schwierigkeiten verknüpft zu sein scheint.

Eins von den Hindernissen besteht nun wahrscheinlich in der Mitwirkung der Luft bei der Destillation. So wie man im Regenwasser Verbindungen von Stickstoff, Wasserstoff und Sauerstoff, z. B. salpetrigsaures Ammon gefunden hat, so könnten ja auch bei der künstlichen Destillation sich Spuren von ähnlichen Producten bilden. Und um das oben erwähnte Leitungsvermögen aus dieser Ursache zu erklären, genügen jedenfalls so geringfügige Mengen, dass dieselben chemisch nicht nachweisbar wären.

Auch ist ja nicht von vornherein ausgeschlossen, dass die blosse Absorption von Luft die Leitungsfähigkeit bedinge oder wenigstens vermehre. Ich habe bei derselben Gelegenheit zuerst darauf hingewiesen, dass die Elektrolyte ihr Leitungsvermögen wesentlich erst durch Mischung erhalten, und so könnte vielleicht der Zusatz eines Gases, auch wenn dieses selbst nicht leitet, schon einen Einfluss ausüben. Die Untersuchung dieser Frage mit der Luftpumpe scheiterte damals an anderen hierdurch eingeführten Fehlerquellen.

[1] Sitzungsberichte der mathem.-physik. Classe der K. b. Akademie d. Wiss. zu München. Bd. V. Jahrgang. 1875. S. 285; — Poggendorff's Annalen u. s. w. 1876. Bd. CLIX. S. 270.

Digitized by Google

In der That ergiebt sich nun, dass die Destillation von Wasser im Vacuum auf ein noch vielfach kleineres Leitungsvermögen als das früher gefundene führt.

Nach Art des sogenannten Wasserhammers ist ein solcher Destillationsapparat verhältnissmässig einfach herzustellen. Ein gläsernes Gefäss von 100 bis 200^{cc} Inhalt, welches als Retorte dienen soll, ist durch ein Glasrohr mit einem kleineren Gefässe verbunden, welches die Vorlage bildet und welches zum Zwecke der Widerstandsbestimmung des Destillates mit zwei platinirten Platinelektroden (von je etwa 5^{qcm} wirksamer Fläche) versehen ist. Die Widerstandscapacität des letzteren Gefässes bei der Füllung zu verschiedenen markirten Höhen war mittels einer äusserst verdünnten Salmiaklösung ermittelt worden, deren Leitungsfähigkeit anderweitig bekannt war. Die Gefässe waren alsdann gut ausgewässert worden.

Nun gab man beiden verbundenen Gefässen durch ein noch offenes Zuflussrohr eine frische Füllung mit einer passenden Menge schon sehr reinen Wassers, verband das Zuflussrohr mit der Quecksilber-Luftpumpe und liess das Wasser in deren Vacuum sieden, und als kein Sieden mehr eintreten wollte unter beständigem Schütteln bei mässiger Temperatur noch etwa eine Viertelstunde lang verdampfen. Gekühlte Schwefelsäure nahm den Wasserdampf auf. Um den Destillirapparat mit seinem Wasser kräftig bewegen zu können war die Verbindung mit der Quecksilber-Luftpumpe in der von Kundt angegebenen Weise mittels langer gebogener Glasröhren ausgeführt worden. Schliesslich wurde das frühere Zuflussrohr abgeschmolzen. Der Glaskünstler Hr. Otto Wiegand in Würzburg, welcher auch das Doppelgefäss hergestellt hatte, lieh bei diesen Operationen seine erfahrene Hülfe.

Das so erzielte Vacuum schätze ich auf höchstens 0.01^{mm} Luftdruck.

Im Apparat befindet sich jetzt noch so viel Wasser, dass dasselbe, in das grössere Gefäss gebracht, letzteres etwa zu zwei Dritteln füllt. Unter Anwendung eines mässig warmen Heizbades von 30° bis 45° und eines Kühlbades zwischen 0° und — 8° (wobei ein Gefrieren wegen der Condensationswärme nicht eintritt) wurden nun die erforderlichen 6 bis 8^{cc} Wasser in das Widerstandsgefäss hinüberdestillirt. Je nach den Umständen dauerte dies 8 bis 15 Minuten.

Die Quecksilber-Capacität der beiden angewendeten Apparate bei normaler Füllung betrug nur etwa 0.00002 Siem. Die Wasserfüllung hatte trotzdem bis zu 800000 Siem. Widerstand. Wegen der geringen Empfindlichkeit des Dynamometers oder des Telephons für diese Verhältnisse wurden zur Messung nicht Wechselströme, sondern sehr kurz dauernde einzelne Stromstösse mit einem höchst empfindlichen rasch schwingenden Galvanometer in der Brücke angewandt. Zwei

Digitized by Google

SMEE'sche Elemente erregten den Strom. Verfährt man vorsichtig, so lassen sich so grosse elektrolytische Widerstände mit einer für uns ausreichenden Genauigkeit auf diesem Wege bestimmen. Der Strom ist so schwach, dass die Polarisation bis zu ihrer merklichen Entwickelung einige Zehntel einer Secunde bedarf. Durch die Anwendung einer wechselnden Anzahl von Elementen, durch gelegentliches Stromwenden und verschiedene Stromdauer liess eine Genauigkeit bis auf 1 oder 2 Procent sich controliren. Auf genügende Isolation der Stromschlüssel muss natürlich geachtet werden.

Auch im Vacuum zeigte sich nun der Widerstand eines Destillates nicht constant, sondern verringerte sich mit der Zeit. In dem einen der Gefässe war diese Abnahme sogar sehr beträchtlich, so dass der Widerstand eines Destillates, welcher 5^{min} nach Beendigung des Destillirens 700000 SIEM. betrug, in weiteren 10^{min} auf 400000, in 1^{h} auf 250000, in 3^{h} auf 90000, in 15^{h} auf 28000 SIEM., also auf den 25. Theil des ersten Werthes gesunken war. Die anfängliche Zunahme des Leitungsvermögens ist fast gleichförmig. Ob die Glaswände, ob vielleicht die Platinelektroden diese Wirkung haben, weiss ich vorläufig nicht zu sagen. In dem anderen Gefässe nahm der Widerstand viel langsamer ab.

Jedenfalls musste man sich nach beendigter Destillation mit der Widerstandsmessung beeilen, so dass die Temperatur, mochte man sie nach dem Gefühle beurtheilen oder mochte man ein Bad anwenden, nur geschätzt worden ist.

Acht verschiedene Destillationen ergaben folgende auf das Quecksilber bezogene Leitungsvermögen, denen die Temperatur und die seit dem Ende der Destillation verflossene Minutenzahl vorgesetzt ist:

Gefäss I		Gefäss II	
20° 3 min	29.10^{-12}	16° 3 min	29.10^{-12}
12° 2 »	25. »	18° 4 »	28. »
20° 3 »	32. »	20° 3 »	27. »
8° 3 »	25. »	20° 4 »	31. »

Die Versuchsverhältnisse führten also in allen Fällen auf nicht sehr verschiedene Leitungsfähigkeiten. Den kleineren Zahlen kommt natürlich die entscheidende Bedeutung zu, da keine Ursachen zu denken sind, welche das Leitungsvermögen zu klein erscheinen lassen.

Wegen der seit und während der Destillation verflossenen Zeit sind ferner die Zahlen jedenfalls noch zu gross. Eine unparteiische Erwägung würde wohl aus ihnen das Leitungsvermögen des Wassers bei 18° gleich

0.000000000025 oder 1 : 40 Milliarden

Digitized by Google

von demjenigen des Quecksilbers schätzen, so dass ein um die Erde gelegter Quecksilberfaden denselben Widerstand besässe, wie ein ebenso dicker 1^{mm} langer Wasserfaden.

Der Widerstand von 1 Ohm wäre hiernach durch eine Wasserschicht von 1 Quadratmillimeter Querschnitt bei einer Dicke von etwa 26 Billionteln Millimeter dargestellt. Die »Wasser-Widerstandseinheit«, eine Wassersäule von 1 Quadratmillimeter und der Länge von 1 Meter hat fast 4.10^{10} Ohm. Um denselben Widerstand zu besitzen müsste ein Kupferdraht von 1 Quadratmillimeter die Länge 24.10^{8} Kilometer haben, eine Strecke, welche das Licht in etwa 2.2 Stunden durchläuft. — Würde man in die Oberfläche einer grossen Wassermasse eine halbkugelige Elektrode von 1 Meter Durchmesser einsenken, so betrüge der Ausbreitungswiderstand etwa 12000 Ohm.

Einen Körper von einem so geringen Leitungsvermögen wird man für galvanische Elektricität in vielen Fällen als einen Nichtleiter behandeln dürfen.

Die Destillation im Vacuum hat nach Obigem den sehr befriedigenden Erfolg gehabt, auf einem einfacheren Wege als dem früheren zu einem fast dreimal kleineren Leitungsvermögen des Wassers oder, wie man mit einer gewissen Berechtigung sagen darf, zu einem mindestens dreimal reineren Wasser zu führen.

Mit Sicherheit kann man auch jetzt nur behaupten, dass die angegebene sehr kleine Leitungsfähigkeit wieder eine obere Grenze darstellt.

Digitized by Google

41. Beiträge zur Theorie des Magnetismus.

Von Werner Siemens.

(Vorgetragen am 31. Juli; — gedruckt im Bericht vom 23. October [St. XL]; — ausgegeben am 30. October.)

Seit die zweckmässige Construction elektromagnetischer Maschinen eine grosse praktische Bedeutung erlangt hat, tritt die Frage in den verschiedensten Gestalten auf, wie die Massen- und Formverhältnisse der Elektromagnete zu wählen sind, um mit dem geringsten Material und Raumaufwande die grösste Wirkung zu erzielen. Zur Beantwortung dieser Fragen geben die aufgestellten scharfsinnigen und mit grösstem Aufwande mathematischer Kenntniss und Gewandtheit durchgearbeiteten Theorien nur selten die erforderliche Anleitung. Es hat dies wohl darin seinen Grund, dass die Hervorrufung und Vertheilung des Magnetismus in den magnetischen Körpern, von denen praktisch nur das Eisen in seinen verschiedenen Molecularzuständen in Betracht kommt, ferner die Fernwirkung des vorhandenen Magnetismus und die mit ihr zusammenhängende Stärke des magnetischen Feldes und schliesslich die Rückwirkung der letzteren auf die Stärke des im Eisen erzeugten Magnetismus und seine Vertheilung in der Regel getrennt von einander der Betrachtung und Rechnung unterworfen werden. Wenn hierdurch auch die Grundlagen für die Lösung vieler gestellter Fragen gegeben sind, so steht der Techniker doch einer verwirrenden Menge von Gesetzen und empirischen Formeln gegenüber, die es ihm unmöglich macht, sich ein klares Gesammtbild über den ursächlichen Zusammenhang der Erscheinungen zu machen, das ihm als Leitfaden bei seinen Constructionen dienen könnte. Es mag dieser unbefriedigende Zustand daher stammen, dass man bei allen magnetischen Theorien vom permanenten Magnetismus ausgegangen ist, in ähnlicher Weise, wie die elektrischen Theorien auf die zuerst bekannten elektrostatischen Erscheinungen begründet wurden. Der permanente Magnetismus ist aber nur eine secundäre magnetische Erscheinung. Er ist ein Rückstand einer vorhergegangenen stärkeren Magnetisirung, dessen Gesetze erst aus denen des Elektromagnetismus abzuleiten sind, da der Magnetismus überhaupt nur als eine elektrische Erscheinung auf-

Digitized by Google

zufassen ist. Der elektrische Strom, oder allgemeiner Elektricität in Bewegung, ist die einzige bekannte Quelle jedes Magnetismus. Dass dies auch von dem Erdmagnetismus gelten muss, habe ich schon bei einer anderen Veranlassung an dieser Stelle ausgesprochen und es damit motivirt, dass wenigstens bisher keine andere Ursache desselben denkbar ist, als die Rotation der auf der Erdoberfläche angehäuften ruhenden Elektricität mit derselben um die Erdaxe. Der Magneteisenstein und andere im magnetischen Zustande in der Natur vorkommende Körper verdanken ihrerseits ihren Magnetismus offenbar dem Erdmagnetismus oder in einzelnen Fällen wohl der directen Wirkung elektrischer Entladungen.

Geht man dagegen von der Annahme eines durch elektrische Ströme direct oder indirect magnetisirbaren Körpers aus, der keinen Magnetismus zurückbehält, wenn die Ursache der Magnetisirung aufhört, und nimmt man mit FARADAY an, dass auch die Fortpflanzung der magnetischen Wirkung, sowohl in den magnetischen Körpern selbst, wie in dem sie umgebenden Raume, nur von Molecül zu Molecül oder von Raumelement zu Raumelement geschehen kann, so liegt die weitere Annahme nahe, dass beide Wirkungen, die innere und äussere, in voller Abhängigkeit von einander stehen müssen. Es kann dann in einer von einem elektrischen Strom umkreisten Eisenstange durch die auf sie wirkende elektrische Vertheilungskraft nur so viel Magnetismus erzeugt werden, wie in dem die Eisenstange umgebenden Raume durch die in der Richtung der FARADAY'schen Kraftlinien von den nordmagnetischen zu den südmagnetischen Oberflächentheilen des Stabes fortschreitende magnetische Vertheilung gebunden und dadurch als magnetischer in sich geschlossener Kreis angeordnet wird.

Wenn sich diese Auffassung durch das Experiment als zulässig erweist, so müssen die Gesetze für moleculare Mittheilung von Wärme, Elektricität und elektrostatische Vertheilung unter den nothwendigen Modificationen auch auf den Magnetismus anwendbar sein. Wir würden dann auch für die Stärke des Magnetismus ein allgemeines Gesetz von der Form:

> »Summe der magnetisirenden Kräfte dividirt durch Summe der ihnen entgegenstehenden Widerstände«

aufstellen können, welches viele Schwierigkeiten und scheinbare Widersprüche beseitigen würde. Es müsste dann auch das weitere Gesetz gelten, dass

> »in jeder Schnittfläche, welche alle vorhandenen Kraftlinien durchschneidet, die Summe der magnetischen Momente aller durchschnittenen magnetischen Molecüle = 0«

Digitized by Google

wäre. Eine solche Schnittfläche kann nur durch die neutrale, Süd- und Nordmagnetismus scheidende, magnetische Mitte des magnetisirten Körpers gelegt werden und es muss dann die Summe der magnetischen Momente der durchschnittenen Eisenmolecüle ebenso gross sein, wie die der ausserhalb des Eisens durchschnittenen Molecüle oder Raumelemente.

Die Reihenfolge der elektrischen Erscheinungen würde dann die sein, dass eine zwischen zwei im isolirenden Medium befindlichen Körpern auftretende elektrische Potentialdifferenz auf der Oberfläche derselben eine Ansammlung ruhender Elektricität entgegengesetzter Polarität hervorruft, deren Grösse von dem Widerstande abhängt, den die nicht leitende umgebende Materie der elektrischen Vertheilung entgegensetzt. Dieser Widerstand ist abhängig von den Raumverhältnissen und einem der ihn ausfüllenden Materie eigenthümlichen Vertheilungscoëfficienten. Ist der trennende Raum nicht isolirend, sondern ganz oder theilweise ein Leiter der Elektricität, so entsteht der elektrische Strom, dessen Stärke wiederum von der der Fortbewegung der Elektricität entgegenstehenden Summe der Widerstände abhängt. Der elektrische Strom oder die Elektricität in Bewegung hat ihrerseits die Eigenschaft, gleichgerichtete Ströme beziehungsweise die materiellen Träger derselben anzuziehen, entgegengerichtete abzustossen. Nimmt man mit AMPÈRE an, dass die magnetische Materie mit praeexistirenden Molecularströmen erfüllt ist, so muss der elektrische Strom diese Elementar-Solenoïde aus ihrer Gleichgewichtslage so zu drehen bestrebt sein, dass ihre Axen in die Peripherie von Kreisen fallen, die die Stromträger concentrisch umgeben. Ist bei einer Materie, wie z. B. beim Eisen in der Raumeinheit eine grössere Zahl solcher Kreisströme enthalten, so muss auch die Stromarbeit eine grössere sein, da eine grössere Anzahl von Solenoïden, auf welche der Strom drehend einwirkt, in jedem Querschnitt des concentrischen Ringes enthalten ist. Da aber auch die verstärkende Wirkung, welche die auf einander folgenden Querschnitte, des geringeren Abstandes der Elementar-Solenoïde von einander wegen, auf einander ausüben müssen, jetzt grösser ist, so muss aus beiden Gründen die Summe der Momente eines concentrischen Ringes aus Eisen grösser sein, als die eines Raumringes von gleichen Abmessungen, der mit einer weniger magnetischen Materie erfüllt ist. Man kann dies auch so ausdrücken, dass das Eisen und die übrigen sogenannten magnetischen Körper der magnetischen Polarisation einen geringeren Widerstand entgegensetzen, wie die nicht magnetischen Körper, oder dass ihre magnetische Leitungsfähigkeit eine grössere ist. Eine magnetische Fernwirkung kann bei Ringen aus homogenem Material, welche einen Stromleiter con-

Digitized by Google

centrisch umgeben, nicht auftreten, da alle Kraftlinien innerhalb des Ringes verlaufen. Bei einem nicht in sich geschlossenen Eisenringe ändert sich dies Verhältniss. Da der magnetische Vertheilungswiderstand des Eisens, wie sich aus später beschriebenen Versuchen ergiebt, nur etwa $^1/_{500}$ desjenigen der Luft ist, so muss bei einem unterbrochenen Ringe der Gesammtmagnetismus, dem hinzugetretenen grossen Vertheilungswiderstande des lufterfüllten Raumes der Unterbrechungsstelle entsprechend, kleiner werden und es müssen die die Ringtheile verbindenden Vertheilungs- oder Kraftlinien in sehr verschiedener Stärke den ganzen umgebenden Raum erfüllen und in ihm die Erscheinung der magnetischen Anziehung und Vertheilung oder die des sogenannten freien Magnetismus hervorbringen.

Es würde hiernach die Ampère'sche Theorie dahin zu erweitern sein, dass nicht nur die magnetischen, sondern alle Körper sowie auch der leere Raum mit praeexistirenden Kreisströmen von sehr kleinen Dimensionen erfüllt sind, und dass sich die magnetischen von den nicht magnetischen Körpern nur dadurch unterscheiden, dass in den ersteren die Zahl der in der Raumeinheit vorhandenen Kreisströme eine weit grössere ist, wie in den letzteren.

Alle magnetischen Erscheinungen würden sich dann auf die Eigenschaft des elektrischen Stromes zurückführen lassen, auf die im ganzen Raume verbreiteten, in den sogenannten magnetischen Körpern in grösserer Anzahl vorhandenen, Molecular-Solenoïde eine Richtkraft auszuüben, die deren Axen senkrecht auf seine Richtung zu stellen und sie dadurch in in sich geschlossene concentrische Anziehungskreise zu ordnen sucht. Die Grösse dieser Axendrehung hängt einmal von der Stärke der richtenden oder magnetisirenden Kraft und andererseits von der in der Volumeinheit praeexistirenden Anzahl der molecularen Kreisströme ab, für welches Zahlenverhältniss man den Ausdruck »magnetische Leitungsfähigkeit« oder als deren reciproken Werth »magnetischer Vertheilungswiderstand« einführen kann.

Zur Prüfung der Zulässigkeit dieser Anschauung schien mir zunächst der vielfach experimentell und theoretisch untersuchte Fall des in sich geschlossenen gleichmässig mit isolirtem Draht umwundenen Eisenringes oder der Eisenröhre besonders geeignet, da bei denselben nach G. Kirchhoff's Untersuchung bei gleichmässiger Umwindung keine magnetische Fernwirkung auftritt. Für den Magnetismus eines Eisenrohres von der geringen Wandstärke s, das von einem axialen Strome durchlaufen wird, habe ich früher[1] den Werth

$$M = 4\pi \cdot l \cdot s \cdot i$$

[1] Monatsberichte der Akademie v. 23. Juni 1881, S. 701.

Digitized by Google

aus den AMPÈRE'schen Formeln abgeleitet, wobei s die Metallstärke, l die Länge des Rohres, i die Stromstärke bezeichnet, und durch Versuche die Richtigkeit desselben nachgewiesen.

Wenn man einen Eisenring vom Querschnitt q und dem mittleren Radius ρ mit einer eng gewundenen Spirale umgiebt, so ist nach obigen Betrachtungen die magnetisirende Kraft proportional der Stromstärke i multiplicirt mit der Zahl der Windungen, für welche man annähernd die Länge des Ringes, also $2\rho\pi$ setzen kann. Der sich dieser magnetisirenden Kraft entgegensetzende Widerstand ist direct proportional der Länge des gebogenen Eisenstabes, also wiederum $= 2\rho\pi$, und umgekehrt porportional dem Querschnitt und der magnetischen Leitungsfähigkeit des Eisens, die mit ψ bezeichnet werden mag. Es wird also das magnetische Moment des Eisenringes in jedem seiner Querschnitte

$$\frac{i \cdot 2\rho\pi}{\frac{2\rho\pi}{q \cdot \psi}} = i \cdot q \cdot \psi \cdot \text{const.}$$

sein, welcher Ausdruck mit dem obigen $M = i \cdot l \cdot s \cdot \text{const.}$ gleichbedeutend ist.

Zur Untersuchung der entscheidenden Frage, ob auch der Magnetismus, welcher durch eine magnetisirende Kraft in einem Eisenstabe oder einem offenen Hufeisen zur Entwickelung kommt, umgekehrt proportional dem gesammten Widerstande des magnetischen Schliessungskreises ist, liess ich zunächst ein Hufeisen aus einem 20^{mm} dicken Eisenstabe mit rechtwinkligen Umbiegungen herstellen. Die Schenkel des Hufeisens waren 70^{mm} lang und jeder wurde mit einer Spirale von 35^{mm} Länge aus 126 resp. 130 Windungen 1^{mm} dicken isolirten Drahtes umwickelt. Der gerade Rücken des Hufeisens wurde mit einer Inductionsspirale aus 1160 Windungen 0.2^{mm} dicken Drahtes versehen. Durch ein prismatisches Eisenstück von dem Querschnitte des Hufeisens konnte dasselbe metallisch kurz geschlossen werden. Die Schenkel des Magnetes ragten 20^{mm} aus den Windungen hervor.

Die Versuche wurden in der Weise ausgeführt, dass die Richtung des durch die Magnetisirungsspiralen gehenden Stromes mittelst eines passenden Commutators momentan umgekehrt wurde. Die Stromstärke wurde vor jeder Umkehr dadurch gemessen, dass vermittelst eines Torsionsgalvanometers mit sehr viel Windungen dünnen Drahtes die Spannungsdifferenz zwischen den Endklemmen der Magnetisirungsspirale bestimmt wurde. Durch Einschaltung von Widerständen, resp. durch einen angebrachten Nebenschluss konnte man die jedesmal gewünschte Stromstärke herbeiführen. Der bei dem Stromwechsel in

Digitized by Google

der Inductionsspirale entstehende Strom ward durch die Windungen eines nahe aperiodisch schwingenden Spiegelgalvanometers geführt. Der Ausschlag bildete dann das Maass des doppelten magnetischen Momentes, das durch den wirksamen Strom im Magnet hervorgerufen wurde. Wenn man die Vorsicht gebrauchte, nach jeder Veränderung der Stromstärke einige Stromwechsel vorzunehmen, bevor man die Messung ausführte, so erhielt man stets übereinstimmende Resultate auch bei den grössten Stromdifferenzen.

Tabelle I.

	1.		2.		3.		4.	
	Schenkel 90 mm hoch.				Schenkel 70 mm hoch.			
	Geschlossen durch Ankerplatte.		Offen.		Geschlossen durch Ankerplatte.		Offen.	
Ampères.		Zunahme pro 1/100 Amp.		Zunahme pro 1/100 Amp.		Zunahme pro 1/100 Amp.		Zunahme pro 1/100 Amp.
0.01	800	800	195	195	1095	1095	140	140
0.03	3150	1175	650	227	4800	1852	430	145
0.05	6250	1550	1125	237	10500	2850	750	160
0.07	10500	2125	1640	257	20500	5000	1100	175
0.09	15500	2500	2165	262	33000	6200	1410	155
0.1	18350	2850	2400	235	36200	3200	1570	160
0.15	37000	3730	3700	260			2390	164
0.2			4830	226			3100	142
0.25			6000	234			3900	160
0.3			7100	220			4700	160
0.4			9600	250			6200	150
0.5			12250	265			7900	170

Die vorstehende Tabelle giebt in der ersten Verticalspalte die gemessene Stromstärke, in der ersten Spalte jeder folgenden Reihe die zugehörigen Ausschläge, in der zweiten die daraus berechneten Zunahmen des magnetischen Momentes für die Vermehrung der Stromstärke um 0.01 Amp. und zwar für geschlossenen und geöffneten Zustand. Es ergiebt sich, dass im geschlossenen Hufeisen der Magnetismus Anfangs in schnellerer Progression wächst, als die Stromstärke. Beim offenen Magnet ist der Magnetismus bei schwachen Strömen (0.05 Amp.) etwa $^1/_5$ des durch gleiche magnetisirende Kräfte hervorgerufenen Magnetismus des geschlossenen Magnetes, bei der doppelten Stromstärke (0.1 Amp.) circa $^1/_8$. Die Zunahme des Magnetismus ist dagegen bei offenem Magnet nahe constant, d. i. der Magnetismus war nahe proportional der Stromstärke bis zu der Grenze, welche zu erreichen die Drahtwindungen ohne zu grosse Erhitzung gestatteten.

Digitized by Google

Ich liess darauf die aus den Drahtrollen 20^{mm} hervorragenden Polenden des Elektromagnetes abschneiden und wiederholte die obigen Versuche. Wie sich aus der 3. und 4. Columne der obigen Tabelle ergiebt, vermehrt sich durch diese Verkürzung der Magnetismus des geschlossenen Magnetes beträchtlich, wogegen der Magnetismus des ungeschlossenen Magnetes in noch höherem Grade abnimmt, so dass jetzt bei 0.05 AMP. das obige Verhältniss sich auf $^1/_{14}$, bei 0.1 auf $^1/_{23}$ vermindert. Diese unverhältnissmässig grosse Verminderung ist offenbar dem Umstande zuzuschreiben, dass nicht nur der Vertheilungswiderstand des umgebenden Raumes durch die Verkürzung vergrössert, sondern auch die magnetisirende Kraft verringert wurde, da die Drahtrollen auch auf die nun abgeschnittenen Stücke eine magnetisirende Kraft ausgeübt hatten. Ich suchte darauf durch Aufsatz von Verlängerungsstücken gleichen Durchmessers und von 10^{mm} Höhe auf die Polenden diejenige Schenkellänge zu ermitteln, bei welcher der Magnetismus des offenen Magnetes sich bei gleichbleibender Stromstärke verdoppelte. Es ist dies Verhältniss nach der nachstehenden Tabelle schon bei fünf Aufsatzstücken überschritten, also bei einer Vergrösserung der ursprünglichen Magnetlänge um etwas über die Hälfte (Tabelle II.). Wie sich aus der Zunahme des Magnetismus für jede Verlängerung der Magnetschenkel um 10^{mm} ergiebt, findet eine ziemlich beträchtliche Verminderung dieses Zuwachses mit der Zahl der Aufsatzstücke statt. Es

Tabelle II.

Strom 0.1 AMP.

	Magnetismus.	Zuwachs.
Ohne Aufsatz	1950	
1. Stück auf jeder Seite ..	2430	480
2. " " " " ..	2895	465
3. " " " " ..	3330	435
4. " " " " ..	3750	420
5. " " " " ..	4125	375

ist dies zum Theil ebenfalls die Folge der stärkeren directen Spiralenwirkung auf die den Spiralen näher liegenden Ansatzstücke, wodurch sich auch die zu schnelle Verdoppelung des Magnetismus bei Verlängerung der Schenkel erklärt. Jedenfalls machen diese Versuche es aber schon höchst wahrscheinlich, dass der in einem ungeschlossenen Elektromagnete durch eine magnetisirende Kraft hervorgerufene Magnetismus eine Function seiner Oberfläche ist. Letzteres wurde auch dadurch bestätigt, dass die Verstärkung des Magnetismus durch

Digitized by Google

aufgesetzte dünnwandige Eisenröhren genau so gross war, wie die durch aufgesetzte gleich hohe massive Eisencylinder von gleichem Durchmesser. Die Schliessung der aufgesetzten Röhren durch einen Eisendeckel machte keinen bemerkbaren Unterschied, wenn keine Verlängerung des Rohres dadurch bewirkt wurde.

Zur Bestimmung des vom nicht magnetischen umgebenden Raume der Entwickelung des Magnetismus im Eisen entgegengesetzten Widerstandes war es nöthig, den magnetischen Vertheilungswiderstand des lufterfüllten oder leeren Raumes mit dem des Eisens zu vergleichen. Es kann dies Verhältniss kein constantes sein, da der specifische magnetische Vertheilungswiderstand des Eisens sich mit der Stärke seiner Magnetisirung ändert.

Wie bekannt und auch aus den obigen Versuchen ersichtlich, nimmt in einem in sich geschlossenen Elektromagnete der Magnetismus anfänglich schneller zu wie die Stromstärke. Die Zunahme des Magnetismus erreicht dann bald ein Maximum und sinkt bei weiterer Steigerung der Stromstärke langsam bis auf einen sehr geringen Betrag hinab. Besonders auffallend ist bei diesem Verhalten der magnetischen Körper die anfängliche Verstärkung der Wirkung der magnetisirenden Kraft bis zu einem Maximum. Die Lage dieses Maximums ist abhängig von der Beschaffenheit des Eisens. Bei weichem Eisen tritt das Maximum der Zunahme des Magnetismus bei gleicher Zunahme der magnetisirenden Kraft früher ein wie bei härterem. Es ist daher nicht unwahrscheinlich, dass diese anfängliche schwächere Wirkung der magnetisirenden Kraft überhaupt nur eine Folge der unvollkommenen Weichheit des Eisens ist. Um dies näher zu untersuchen liess ich zwei gleiche Ringe, einen aus möglichst weichem Rundeisen und den andern aus weichem Stahl herstellen. Dieselben hatten 50^{mm} äusseren und 35^{mm} inneren Durchmesser und waren gleichmässig mit je zwei Spiralen, die untere aus 350 Windungen 0.2^{mm} dicken Drahtes, die obere aus 190 Windungen 0.75^{mm} dicken Drahtes umwickelt. Die zweite Spirale diente als Magnetisirungs-, die erste als Inductionsspirale. Die erste Verticalspalte der Tabelle III. giebt die gemessenen Stromstärken, die zweite die zugehörigen durch den Ausschlag des Spiegelgalvanometers gemessenen magnetischen Momente des Eisenringes, die dritte die hieraus berechnete Zunahme des Magnetismus durch eine Vermehrung der Stromstärke um 0.001 Amp. Die vierte und fünfte Spalte geben dieselben Werthe für den Stahlring. Es ergiebt sich aus diesen Versuchen, dass beim Eisenring das Maximum der Zunahme des Magnetismus schon bei 0.1 Amp. eingetreten war, während es beim weichen Stahlringe erst bei 0.5 Amp. eintrat und ferner, dass dies letztere Maximum nur etwa den halben

Digitized by Google

Tabelle III.

Stromstärke.	Ausschlag.	Zunahme pro 1/1000 AMP.	Ausschlag.	Zunahme pro 1/1000 AMP.
0.001	3.2	3.2	3.5	3.5
0.002	7	3.25	7.2	3.7
0.004	15	4	15	3.4
0.008	36	5.2	29	3.5
0.01	46	5	35	3.0
0.02	114	6.8	72	3.7
0.03	196	8.1	112	4.0
0.04	300	10.5	155	4.3
0.05	410	11	195	4.0
0.06	550	14	245	5.0
0.07	710	16	290	4.5
0.08	895	18.5	340	5.0
0.085	1015	24	360	4.0
0.090	1160	29	380	4.0
0.095			405	5.0
0.100	1810	65	430	5.0
0.15	4520	54	760	6.6
0.2	6880	47.2	1120	7.2
0.25	8640	35.2	1640	10.4
0.3	9900	25.2	2500	17.2
0.4	11500	16	4950	24.5
0.5	12400	9	7000	30.5
0.6	13150	7.5	8750	17.5
0.7	13750	6	10000	12.5
0.8	14250	5	11000	10.0
0.9	14600	3.5	11900	9.0
1.00	15000	4	12550	6.5
1.1	15250	2.5	13150	6.0
1.2	15500	2.5	13600	4.5
1.5	16150	2.1	15000	4.6

Betrag des Maximums der Zunahme beim Eisenringe hatte. Da die Stromrichtung bei jeder Messung umgekehrt wurde, so konnte der rückbleibende Magnetismus keinen directen Einfluss auf das Messungsresultat ausüben, wohl aber muss die innere Reibung, welche sich der Drehung der hypothetischen Kreisströme entgegenstellt, eine Verminderung der Magnetisirung herbeiführen, die beim Ringe aus weichem Stahl kleiner ausfallen musste wie beim Eisenringe. Es erscheint hiernach durchaus wahrscheinlich, dass bei absolut weichem Eisen das Maximum der Wirkung schon bei den schwächsten Strömen eintreten würde. Man kann also diese beim Eisenmagnetismus auftretende Anomalie als eine Folge des Reibungswiderstandes betrachten, welcher sich der Drehung der AMPÈRE'schen Kreisströme entgegenstellt. Dieser Widerstand muss sich um so stärker bemerkbar machen, je kleiner die Drehungswinkel sind, da die Reibungsarbeit dem Drehungswinkel

Digitized by Google

selbst und nicht dem durch die Drehung hervorgerufenen magnetischen Momente proportional sein muss.

Die folgende Tabelle IV. giebt die Resultate die erhalten wurden, wenn anstatt eines geschlossenen Ringes eine gleich dicke und lange gerade Eisenstange der Magnetisirung durch steigende Stromstärken unterworfen wurde. Die Eisenstange war in der Mitte mit einer Inductionsspirale versehen und wurde mit dieser in die Mitte einer Magnetisirungsspirale von nahe doppelter Länge geschoben. Bei den Aus-

Tabelle IV.

Stromstärke.	Ausschlag.	Zunahme pro $^1/_{1000}$ Amp.
0.001	12	12
0.002	22	10
0.004	44	11
0.008	88	11
0.01	109	10.5
0.02	233	12.4
0.03	365	13.2
0.04	524	15.9
0.05	688	16.4
0.06	844	15.6
0.07	1009	15.6
0.08	1160	16
0.09	1320	16
0.10	1480	16
0.20	2900	14.2
0.30	4600	17
0.40	6240	16.4
0.50	8000	17.6
0.60	9720	17.2
0.70	11560	18.4
0.80	13200	16.4
1.00	16800	18

schlägen des Spiegelgalvanometers ist die directe Wirkung der Spiralen auf einander in Abzug gebracht. Die für 0.001 Amp. berechneten Zuwachse des Magnetismus zeigen auch hier ein geringes Anwachsen bei wachsender Stromstärke. Das Maximum der Zunahme konnte nicht erreicht werden ohne die Magnetisirungsspirale übermässig zu erhitzen.

Wenn die Annahme, dass die nicht magnetische Materie in gleicher Weise wie die magnetische mit praeexistirenden molecularen Kreisströmen erfüllt ist, richtig ist, so ist anzunehmen, dass bei ihr, ebenso wie bei den magnetischen Körpern, ein Maximum des Magnetismus vorhanden ist. Es müsste dann bei sehr grossen magnetischen Momenten eines magnetischen Feldes, ebenso wie beim Eisen, eine

Digitized by Google

Annäherung an ein Maximum der Magnetisirung bemerkbar werden. Um dies zu untersuchen, setzte ich auf die Polköpfe des beschriebenen Hufeisenmagnetes zwei prismatische Eisenstücke, welche einander bis auf eine geringe Entfernung genähert werden konnten. Die sich parallel gegenüberstehenden Flächen waren bis auf 1^{qcm} verjüngt. Es wurde nun die Zunahme des magnetischen Momentes des magnetischen Kreises bei steigender Stromstärke gemessen. Die Resultate sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt.

Tabelle V.

Strom-Intensität	Hufeisen geschlossen durch Eisenplatte		Polstücke mit prismatischen Ansatzstücken versehen. Abstand der letzteren:					
	Ausschlag	Zunahme pro 1/100 Amp.	Ausschlag	0.1mm Zunahme pro 1/100 Amp.	Ausschlag	1mm Zunahme pro 1/100 Amp.	Ausschlag	3.5mm Zunahme pro 1/100 Amp.
	1		2		3		4	
0.11	219	19.9	80	7.2	49	4.4	37	3.4
0.21	720	50.1	193	11.3	107	5.8	78	4.1
0.53	1708	30.9	620	13.3	313	6.4	217	4.3
0.85	2124	13.0	1020	12.5	524	6.6	362	4.5
1.06	2292	8.0	1276	12.2	680	7.4	460	4.7
2.12	2640	3.3	2028	7.1	1344	6.3	942	4.5
3.18	2760	1.1	2400	3.5	1908	5.3	1380	4.1
4.24	2840	0.7	2620	2.1	2340	4.1	1820	4.2
5.30	2870	0.5	2728	1.0	2576	2.2	2172	3.3
6.36	2930	0.4	2800	0.7	2700	1.2	2440	2.5

Die Polstücke waren nach einander 0.1, 1 und 3.5^{mm} von einander entfernt. Die Stromstärken wurden bis zu dem grössten zulässigen Werth, d. i. bis zu 6 Amp. gesteigert. Wie sich aus Verticalspalte 1 ergiebt, trat bei kurz geschlossenem Magnete das Maximum der Zunahme des Magnetismus bereits bei 0.2 Amp. ein. Auffallend war es, dass mit aufgesetzten und einander genäherten Polstücken der Wendepunkt der Zunahme bei jedem Abstande auf dieselbe Stromstärke von circa 1 Amp. fiel. Die Zunahmen selbst konnten nicht im Verhältniss des Abstandes der parallelen Eisenflächen stehen, da die Seitenflächen der Ansatzstücke um so mehr in magnetische Wechselwirkung treten mussten, je weiter die parallelen Flächen selbst von einander entfernt waren, je grösser also der zwischen ihnen auftretende magnetische Vertheilungswiderstand war. Dass bei allen Abständen ein Maximum der Zunahme eintrat und diese sich bei steigenden Stromstärken dann gleichmässig auf einen geringen Betrag reducirte, ist Folge des grossen Momentes des Elektromagnetes selbst, welcher sich bei dem geringen magnetischen Widerstande des gesammten Kreises bei stärkeren Strömen schon seiner Maximalmagnetisirung näherte.

Digitized by Google

Die Versuche schienen zwar für eine Vergrösserung des Vertheilungswiderstandes der nicht magnetischen Materie bei sehr hohen magnetischen Momenten zu sprechen, doch sind sie nicht entscheidend. Es müssten für solche Versuche Elektromagnete von geringer Länge und so grossem Querschnitte verwandt werden, dass der Vertheilungswiderstand des Eisens im Vergleich zu dem des umgebenden Mediums immer sehr klein bliebe.

Die Versuche zeigen aber, dass ein Magnetisirungsmaximum bei der atmosphaerischen Luft wenigstens nicht früher eintreten kann, als beim Eisen. Es folgt daraus, dass die Stärke eines magnetischen Feldes nur durch das Maximum des Eisenmagnetismus begrenzt ist, und dass man die magnetische Leitungsfähigkeit der nicht magnetischen Materie als constant anzunehmen hat. Da dieser Werth für das Eisen ein sehr veränderlicher ist, und für die Abhängigkeit desselben vom vorhandenen magnetischen Momente der Eisenmasse noch kein Gesetz gefunden ist, so kann von einem Vergleiche der magnetischen Leitungsfähigkeit beider im Allgemeinen nicht die Rede sein. Da indess bei der Construction magnetischer Maschinen fast immer derjenige magnetische Zustand des Eisens von besonderer Bedeutung ist, bei welchem die Zunahme des Magnetismus bei wachsender magnetisirender Kraft im Maximum ist, so kann man diesen Zustand der Vergleichung zu Grunde legen.

Zur Ermittelung dieses Verhältnisses liess ich zwei quadratische Eisenplatten von 4^{mm} Dicke und 80^{mm} Seitenlänge anfertigen, welche an die prismatischen verschiebbaren Aufsatzstücke der Pole des früher beschriebenen Hufeisenmagnetes seitlich angeschraubt werden konnten. Bei 5^{mm} Abstand von einander gaben die Platten bei einer Stromstärke von 0.1 Amp. dieselbe Verstärkung des Magnetismus wie ein Eisenblech von 15^{qmm} Querschnitt, welches nach Abschraubung der Platten die ebenfalls 5^{mm} von einander abstehenden Polstücke mit einander verband. Bei schwächeren magnetisirenden Kräften war das Eisen überwiegend, bei stärkeren die Platten. Es ergiebt dies eine magnetische Leitungsfähigkeit für das Eisen im Zustande seiner grössten Magnetisirbarkeit von 480 bis 500, wenn die der Luft = 1 gesetzt wird. Der Versuch wurde mit grösseren Plattenabständen, ferner mit Eisendrähten, Blechen und mit quadratischen Eisenstäbchen wiederholt, und gab dabei dasselbe Zahlenverhältniss.

Es lag jetzt die Frage nahe, ob dieser Vertheilungswiderstand der Luft im circa 500fachen Betrage des Eisenwiderstandes nicht zum Theil dem Einflusse des in der Luft enthaltenen magnetischen Sauerstoffs zuzuschreiben sei. Um das zu untersuchen, liess ich zwei runde eiserne Platten von 8^{cm} Durchmesser durch einen angelötheten Messing-

Digitized by Google

ring mit einander verbinden. Durch zwei im Messingringe befindliche Öffnungen mit eingesetzten Röhren, die durch Hähne verschlossen werden konnten, war es ermöglicht, den Zwischenraum zwischen den 5^{mm} von einander abstehenden Eisenplatten mit einem beliebigen Gase zu füllen oder auch ihn leer zu pumpen. Die so verbundenen eisernen Platten wurden dann an den Aufsatzstücken der Polenden des Elektromagnetes befestigt und das magnetische Moment des magnetischen Kreises bei verschiedenen Stromstärken gemessen. Es stellte sich dabei nicht der geringste Unterschied heraus, mochte atmosphaerische Luft, Sauerstoff oder Wasserstoff den Raum zwischen den Platten ausfüllen, oder mochte derselbe durch eine Quecksilberpumpe möglichst leer gepumpt sein.

Es folgt hieraus, dass die magnetische Eigenschaft des Sauerstoffs, sowie überhaupt der Einfluss der Materie mit Ausnahme des Eisens und der anderen sogenannten magnetischen Metalle auf die Magnetisirung erst bei sehr grossen magnetischen Momenten, bei denen schon diamagnetische Erscheinungen auftreten, hervortritt und dass bei den nicht magnetischen Körpern für die magnetischen Erscheinungen nur die Raumverhältnisse in Betracht zu ziehen sind. Ob dies nicht dahin führen muss, die AMPÈRE'schen molecularen Kreisströme im Anschluss an Pater SECCHI's und EDLUND's Anschauungen durch Aetherwirbel zu ersetzen, die den ganzen Weltraum erfüllen und die in den magnetischen Körpern nur in weit grösserer Menge oder Stärke vorhanden sind, mag hier unerörtert bleiben. Die auffallende Thatsache, dass die Luftleere magnetische Vertheilung und Anziehung ebenso vermittelt, wie die nicht magnetische Materie, würde jedenfalls dadurch ihre Erklärung finden.

Dass der mit nicht magnetischer Materie erfüllte Raum, sowie die Luftleere von elektrischen Strömen qualitativ ganz ebenso, wie das Eisen im Zustande grösster Magnetisirbarkeit, nur nahe 500 mal schwächer, beeinflusst werden, folgt aus folgendem Versuch:

Ich liess zwei Drahtrollen aus Windungen 1^{mm} dicken isolirten Drahtes von 87^{mm} lichter Weite und 100^{mm} Länge wickeln und legte sie in einem Abstande der Axen von 131^{mm} parallel neben einander. Die beiden neben einander liegenden Polflächen dieser Solenoïde wurden mit je einer Eisenplatte bedeckt, welche zwischen den Solenoïden mit einer Inductionsspirale umwunden war. Die Eisenbleche wurden durch dünne Messingbolzen, welche mit der Axe der Rollen zusammenfielen, an diese festgepresst. Es bildeten jetzt die beiden Solenoïde und die beiden Eisenplatten einen in sich geschlossenen Hufeisenmagnet, dessen magnetisches Moment durch die Inductionsspiralen auf den Eisenplatten zu messen war. In der nachstehenden Tabelle VI. sind diese

Digitized by Google

Messungen zusammengestellt. Es ist aus der Tabelle ersichtlich, dass alle Erscheinungen ganz so sind, als wenn die Eisenplatten durch Eisencylinder anstatt der Messingbolzen mit einander verbunden wären. Als ich letzteres wirklich ausführte mit Eisencylindern von 4^{mm} Dicke, die also etwa $^1/_{500}$ des Querschnittes der Solenoïde hatten,[1] war in der That das magnetische Moment bei der Stromstärke 0.20 Amp. nahe doppelt so stark als früher, wie die sechste Verticalspalte der Tabelle ergiebt, welche die Quotienten der Ablenkungen mit und ohne Eisencylinder angiebt. Dass die Quotienten bei sehr schwachen Strömen nicht viel von 1 verschieden waren, dann schnell bis zum doppelten Werthe anwuchsen und darauf langsam abnahmen, ist der Eigenschaft des Eisens der Verbindungsanker dieses Luftmagnetes und der Eisencylinder zuzuschreiben bei sehr schwachen magnetischen Momenten, sowie bei sehr starken der Magnetisirung einen grösseren Widerstand entgegenzusetzen.

Tabelle VI.

Intensität.	Solenoïde allein.		Als offenes Hufeisen.		Als geschlossenes Hufeisen.		Geschlossen und mit Eisenkernen.		Verhältniss der Ausschläge der zwei letzten Reihen.
	Ausschl.	Zuwachs.	Ausschl.	Zuwachs.	Ausschl.	Zuwachs.	Ausschl.	Zuwachs.	
0.01			51	51	55	55	65	65	1.18
0.05			270	55	295	61	380	79	1.27
0.10	52	5.2	580	62	640	68	1000	124	1.56
0.15			900	64	1020	76	1920	184	1.88
0.20			1236	67	1392	74	2864	189	2.06
0.30			1928	78	2160	77	4480	162	2.07
0.40			2616	69	2960	80	5850	137	1.97
0.50	258	5.2	3360	76	3800	84	7200	135	1.89
0.75			5250	77	6075	91	10250	122	1.68
1.00			7240	78	8400	93	12880	105	1.53

Als ein directer Beweis der Richtigkeit der Annahme, dass in einer von elektrischen Strömen umkreisten Eisenstange nur so viel Magnetismus hervorgerufen wird, wie durch die Summe der magnetischen Momente der ihre Oberfläche berührenden Luft- oder Raumtheile gebunden wird, kann folgende Beobachtung dienen.

Ist ein als unbegrenzt lang zu betrachtender Eisencylinder vom Radius r irgendwo — hinlänglich weit von den Enden — von einer Drahtspirale umgeben und wird das magnetische Moment, welches ein

[1] Rechnet man den Durchmesser des wirksamen Luftcylinders bis zur Mitte der Windungen, so verhalten sich die Querschnitte $\frac{\text{Eisen}}{\text{Luft}} = \frac{1}{560}$.

Digitized by Google

durch diese Spirale fliessender Strom der Einheit der Querschnittsfläche in einem beliebigen Abstande x von der Mitte der Spirale giebt, mit y bezeichnet, so ist das magnetische Moment dieses Querschnitts $= r^2\pi \cdot y$. Dieses magnetische Moment muss nun mit Vergrösserung von x kleiner werden, und zwar, wenn die aufgestellte Theorie richtig ist, um so viel, wie durch das Moment der die Oberfläche des Verlängerungsstückes dx berührenden Luftschicht gebunden wird. Es besteht daher die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -r^2\pi \cdot dy &= 2r\pi \cdot dx \cdot y \\ -\frac{dy}{y} &= \frac{2}{r} \cdot dx \\ -\ln y \Big|_{y}^{y_1} &= \frac{2}{r} x \Big|_{x-c}^{x}, \end{aligned}$$

wenn c die Weglänge bezeichnet, für welche die Integration auszuführen ist, oder

$$\ln \frac{y}{y_1} = \frac{2}{r} \cdot c$$

und bei gleicher Verschiebung für verschieden dicke Stäbe von den Durchmessern $2r$ und 2ρ

$$\ln \frac{y}{y_1} : \ln \frac{z}{z_1} = \rho : r.$$

Diese Gleichungen besagen einmal, dass bei demselben Eisencylinder der Quotient der magnetischen Momente zweier gleich weit von einander entfernten Querschnitte auf der ganzen Cylinderhälfte constant ist, dass also auch gleiche Verschiebungen einer Prüfungsrolle überall gleiche procentische Verminderungen des magnetischen Momentes ergeben müssen. Sie besagen ferner, dass bei verschieden dicken Stäben und gleichen Verschiebungen der Prüfungsrolle die Logarithmen der Quotienten der Momente sich umgekehrt wie die Durchmesser der Stäbe verhalten.

Es ist jedoch bei Aufstellung der Differentialgleichung die Annahme gemacht, dass das Moment der die Oberfläche des Stabes berührenden Luftschicht nur vom Momente der Einheit des Querschnittes des Stabes an der betreffenden Stelle abhinge. Das würde besagen, dass der Vertheilungswiderstand aller äusseren magnetischen Schliessungskreise derselbe wäre. In Wirklichkeit findet die vertheilende Action aber zwischen jedem Oberflächenelemente der einen Stabhälfte und allen entgegengesetzt magnetischen Punkten der anderen Stabhälfte statt. Sie ist also auch abhängig von der Entfernung von der Stab-

Digitized by Google

mitte. Diese Fehlerquelle wird um so einflussreicher werden, je näher der Stabmitte die Verschiebung um die Weglänge c stattfindet.

Tabelle VII.

Entfernung der Rollenmitten. mm	φ 9 mm		φ 6 mm		φ 3 mm	
	Ausschlag y	$\frac{y}{y_1}$	Ausschlag y	$\frac{y}{y_1}$	Ausschlag y	$\frac{y}{y_1}$
90	4268	0.032	4054	0.057	290	0.112
100	3960	0.037	3558	0.052	222	0.116
110	3640	0.035	3160	0.052	168	0.121
120	3360	0.035	2800	0.059	130	0.111
130	3100	0.038	2440	0.053	100	0.114
140	2840	0.032	2160	0.056	80	0.097
150	2640	0.038	1900	0.048	60	0.125
160	2420	0.037	1700	0.058		
170	2220	0.028	1488	0.052		
180	2080	0.039	1320	0.056		
190	1900	0.033	1160	0.058		
200	1760	0.040	1016	0.060		
210	1605	0.040	884	0.059		
220	1465	0.032	772	0.052		
230	1360	0.033	684	0.051		
240	1260	0.036	608	0.061		
Mittelwerth		0.035	—	0.055	—	0.114
Mittelwerth × Stabdicke		0.105	—	0.110	—	0.114

Die obigen Versuche bestätigen die Annahme, dass es keinen freien, sondern nur gebundenen Magnetismus giebt, und dass eine magnetisirende Kraft in magnetischen Körpern nur so viel Magnetismus erzeugen kann, wie in ihnen selbst und dem umgebenden Medium durch magnetische Vertheilung in Form geschlossener Anziehungscurven mit in jedem Querschnitt gleichem magnetischen Moment, gebunden wird. Diese Vorstellung ist ganz analog der der elektrischen Molecularvertheilung und es können daher die für diese gültigen Gesetze auch auf die magnetische Vertheilung in Anwendung gebracht und mit Hülfe des ermittelten Coefficienten 480, welcher das Verhältniss zwischen dem Vertheilungswiderstande der Luft zu dem des Eisens ausdrückt, der Einfluss der Masse und Form des Eisens auf die Stärke eines herzustellenden magnetischen Feldes bestimmt werden.

Ist ein Eisenstab, auf dessen Mitte eine magnetisirende Kraft wirkt, nicht als unbegrenzt lang zu betrachten, so ist die für den unbegrenzten Stab berechnete Formel

$$\ln \frac{y}{y_1} = \frac{2}{r} x$$

des Magnetismus der Endflächen wegen nicht direct anwendbar.

Digitized by Google

Ganz anders gestaltet sich die Vertheilung des Magnetismus eines Stabes von begrenzter Länge, wenn man die magnetisirende Kraft gleichmässig auf alle Theile des Stabes einwirken lässt. Die Abnahme des magnetischen Momentes von der Mitte des Stabes nach den Enden verliert dann den logarithmischen Charakter und nimmt, wie VAN REES bereits nachgewiesen hat, den der Kettenlinie oder annähernd der Parabel an. Bei einem 150^{mm} langen Stabe von 7.70^{mm} Durchmesser, welcher in einer eng umschliessenden Glasröhre von nahe doppelter Länge, die mit einer Magnetisirungsspirale gleichmässig umwunden war, verschiebbar war, konnte das magnetische Moment jedes Querschnitts durch eine über die Mitte des Glasrohres gewickelte Inductionsspirale gemessen werden, wenn die Richtung des Magnetisirungstromes umgekehrt wurde.

In der folgenden Tabelle sind die magnetischen Momente desselben Stabes in den Abständen 20 bis 70^{mm} von der Mitte angegeben, wenn die Magnetisirung gleichmässig und wenn sie von der Mitte aus geschah. Die Stromstärken wurden so gewählt, dass der Magnetismus am Stabende in beiden Fällen nahe derselbe war.

Entfernung x der secundären Rolle von der Stabmitte mm	Ausschläge y bei gleichmässiger Magnetisirung mm	Ausschläge bei Magnetisirung der Stabmitte mm
20	287	463
30	263	378
40	233	302
50	195	229
60	145	160
70	87	92

Nach der Scheitelgleichung der Parabel

$$\frac{x^2}{y} = 2p$$

berechnet, geben die Ausschläge der zweiten Spalte für gleichmässige Magnetisirung des Stabes die Werthe für $2p$ — 23 | 22 | 22 | 23 | 23 | 22. Berechnet man aus den Werthen der dritten Spalte nach der Formel

$$\ln \frac{y}{y_1} = \frac{2}{r} x$$

den Quotienten $\frac{y}{y_1}$ für die constante Verschiebung der Inductionsrolle um 10^{mm}, so erhält man die Werthe 1.25 | 1.25 | 1.32 | 1.4 | 1.4. Der Quotient der magnetischen Momente gleich weit von einander ent-

Digitized by Google

fernter Stellen des Stabes ist daher nicht constant, wie beim unbegrenzten Stabe, sondern er nimmt mit der Annäherung an das Stabende zu, wie zu erwarten war.

Van Rees hat gefunden, dass bei einem homogenen prismatischen Magnetstabe die magnetischen Momente der Querschnitte ebenso wie beim gleichmässig magnetisirten Eisenstabe parabolisch abnehmen. Es wird dies aber nur für solche Magnetstäbe geltend sein, denen bei der Magnetisirung ein gleichmässiges Moment über die ganze Länge des Stabes gegeben wurde. Nach Aufhören der magnetisirenden Kraft haben dann sämmtliche Molecularmagnete das gleiche Bestreben, wieder in den unmagnetischen Zustand zurückzugehen, woraus schliesslich dieselbe magnetische Gleichgewichtslage resultiren muss, wie sie beim gleichmässig magnetisirten Eisenstabe besteht.

Schliesslich möchte ich noch einige Bemerkungen an eine früher von mir an dieser Stelle gemachte Mittheilung[1] knüpfen.

Ich stellte damals die Theorie auf, dass die nach der Ampère-Weber'schen Theorie anzunehmenden Molecularmagnete aus je zwei mit entgegengesetzten Polen nahe einander gegenüberstehenden Elementarmagneten oder Solenoïden bestehen müssten, die zusammen in jeder Richtung frei und ohne Widerstand zu erleiden drehbar wären, durch äussere magnetisirende Kräfte aber in ähnlicher Weise gerichtet und auseinandergedreht würden, wie es bei — bis auf die Entfernung der Drehpunkte von einander frei beweglichen — astatischen Nadelpaaren der Fall sein würde. Es war mir damals nicht bekannt, dass Stephan bereits früher dieselbe Ansicht vertrat und werthvolle mathematische Betrachtungen an dieselbe geknüpft hatte. Nach meiner oben entwickelten Anschauung müsste nun, wie schon hervorgehoben, die Ampère'sche Theorie dahin erweitert werden, dass der ganze Weltraum mit Molecularsolenoïden oder, wenn man die Edlund'sche Anschauung theilt dass der elektrische Strom räumlich fortbewegter Aether sei, mit Aetherwirbeln erfüllt ist und dass diese in der magnetischen Materie in grösserer Anzahl vorhanden sind, als in der nicht magnetischen. Da nun eine auf die Molecularmagnete einwirkende magnetisirende Kraft nur dann einen merklichen Einfluss auf Auseinanderdrehung der gepaarten Elementarmagnete ausübt, wenn alle Nachbarn in dem magnetischen Kreise der Bewegung folgen und so ein in sich geschlossenes, der gegenseitigen Anziehung unterworfenes Gleichgewichtssystem herstellen können, so folgt daraus, dass die von der magnetisirenden Kraft direct bewirkte Drehung sehr klein sein muss gegen die gegenseitige Verstärkung der Drehung im geschlossenen magnetischen Kreise. Das

[1] A. a. O. S. 703.

Digitized by Google

erzeugte magnetische Moment muss also wesentlich das Product der gegenseitigen Verstärkung der Drehung sein, zu der die magnetisirende Kraft den Anlass giebt. Es tritt dem aber die Schwierigkeit entgegen, dass die Drehung nach Aufhören der magnetisirenden Kraft bei Abwesenheit von Coërcitivkraft auf Null zurückgeht. Ein solcher Gleichgewichtszustand lässt sich nicht anders als durch eine gleichzeitige Wirkung anziehender und abstossender Kräfte hervorgebracht vorstellen. Es müsste also durch das Zusammenwirken aller benachbarten anziehenden und abstossenden Molecularkräfte ein nahe, aber nicht ganz labiles Gleichgewicht der Elementarmagnete hervorgerufen werden, wenn den Thatsachen bei Annahme der AMPÈRE'schen Theorie entsprochen werden soll. Dass sich eine diese nothwendige Anforderung lerfüllende Combination von Molecularkräften als möglich nachweisen assen wird, wage ich nicht zu behaupten.

Digitized by Google

Digitized by Google

42. Neue Bestimmungen der Elasticitäts-Constanten von Steinsalz und Flussspath.

Von W. Voigt
in Göttingen.

(Vorgelegt von Hrn. G. Kirchhoff am 23. October; — gedruckt im Bericht vom 30. October [St. XLII]; — ausgegeben am 6. November.)

Bestimmungen der Elasticitäts-Constanten des Steinsalzes sind von mir vor neun Jahren mitgetheilt worden,[1] später hat einer meiner Schüler, H. Klang[2] in Königsberg, Beobachtungen nach derselben Methode am Flussspath angestellt. Die damals erhaltenen Resultate sind aber nur zum Theil haltbar, denn die Torsionsbeobachtungen sind nach einer von Hrn. Geh. Rath F. Neumann herrührenden Formel berechnet, welche sich als eine nicht genügende Annäherung an die strenge ergeben hat. Strenge Formeln für die Torsion krystallinischer Prismen in specieller Orientirung sind von Saint-Venant[3] gegeben worden und waren mir damals nicht bekannt; ich hatte auch nicht das Bedürfniss, von den Neumann'schen abzugehen und andere aufzusuchen, weil letztere die Beobachtungen, wie ich meinte, befriedigend darstellten. Nachdem indess von Saint-Venant[4] theoretisch die ungenügende Genauigkeit der den Neumann'schen analogen Cauchy'schen Gleichungen für unkrystallinische Medien gezeigt und die ausgezeichnete Übereinstimmung der Saint-Venant'schen Formeln mit der Beobachtung für unkrystallinische Medien auch durch meine Beobachtungen über die Elasticitäts-Constanten homogenen Glases[5] bestätigt worden ist, habe ich zunächst eine Erweiterung der classischen Saint-Venant'schen Betrachtungen auf beliebig orientirte krystallinische Medien versucht[6] und will nunmehr unter Rücksicht auf ihre Resultate das lange verlassene Problem der Bestimmung der Elasticitäts-Constanten für einige reguläre Krystalle von Neuem vornehmen.

[1] W. Voigt, Pogg. Ann. Erg. Bd. VII, S. 1 und 177. 1876.
[2] H. Klang, Wied. Ann. Bd. XII, S. 321. 1881.
[3] Saint-Venant, Mém. des Sav. étr. XIV, p. 370, 1856.
[4] Saint-Venant, C. R. XVII, p. 1080, 1843.
[5] W. Voigt, Wied. Ann. Bd. XV, S. 497, 1882.
[6] W. Voigt, Wied. Ann. Bd. XVI, S. 273, 1882.

Digitized by Google

Was die Constanten des Steinsalzes anbetrifft, so könnte man sie aus den alten Beobachtungen durch eine Berechnung nach den strengen Formeln erhalten. Ich habe bereits vor einiger Zeit das Resultat mitgetheilt,[1] dass die dann gefundenen Werthe sehr nahe mit derjenigen Poisson'schen Theorie übereinstimmen, welche die Anziehung der Molecüle in allen Richtungen mit gleicher Intensität stattfindend annimmt; ihre Werthe sind im Mittel

$$a = 4.60 \qquad b = 1.19 \qquad e = 1.26.$$

Indessen habe ich doch für besser gehalten, die Beobachtungen vollständig noch einmal anzustellen, weil ich gegenwärtig über vollkommenere Mittel zur Dimensionenbestimmung verfüge, als vor neun Jahren, weil ich gefunden habe, dass man die Gestalt der Krystallprismen noch regelmässiger, ihre Oberflächen noch feiner polirt herstellen kann, als dies mir selbst damals gelungen war, und weil ich mich überzeugt habe, dass man die noch übrig bleibende Unregelmässigkeit der Gestalt geschickter in Rechnung ziehen kann, als damals geschehen Ausserdem bin ich durch die seitdem angestellten Elasticitäts-Beobachtungen zu der Ansicht gekommen, dass die bei den früheren Beobachtungen bemerkte scheinbare geringe Abweichung der Torsionswinkel von der Proportionalität mit dem Drehungsmoment von einer Fehlerquelle hergerührt hat, da ich sie bei keiner später benutzten Substanz bemerkt habe.

Die Beobachtungen am Flussspath zu wiederholen, war wo möglich noch nothwendiger, da dieselben hinsichtlich der Torsion in einer Weise angestellt sind, welche die Berechnung nach der strengen Formel unmöglich macht.

Ich werde zunächst angeben, wie ich bei den folgenden Biegungs-Beobachtungen die unregelmässige Gestalt der beobachteten Prismen in Rechnung gezogen habe.

Sei L die Länge, B die Breite, D die Dicke, E der sogenannte Elasticitäts-Coëfficient des Prisma's und P die in der Mitte seiner Länge angebrachte Belastung, so ist die Differentialgleichung der Curve seiner Mittelfaser

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6\left(\frac{L}{2} - x\right)P}{EBD^3},$$

dabei die X-Axe in die Prismenaxe gelegt und von der Belastungsstelle nach dem freien Ende gerechnet. Nimmt man B mit x constant, aber

$$D = D_0 (1 + dx + d_1 x^2)$$

[1] W. Voigt, Ber. der Berl. Akad. d. Wiss. XXXVII, S. 971, 1883.

Digitized by Google

und dL sowie $d_1 L^2$ klein gegen 1 an, so dass man nur bis zu den Gliedern $(dL)^2$ und $d_1 L^2$ zu gehen braucht, so giebt die vorige Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6\left(\frac{L}{2} - x\right)P}{EBD_0^3}\left(1 - 3\,dx - 3\,(d_1 - 2d^2)\,x^2\right).$$

Sie gilt für die eine Hälfte des Stabes; für die andere ist die X-Axe von der Mitte nach dem andern Ende des Stabes zu rechnen und in der obigen Formel (2) d mit $-d$ rechts zu vertauschen. Die Integrations-Constanten bestimmt man, indem man für $x = 0$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = -\left(\frac{dy}{dx}\right)_2$$

und

$$y_1 = y_2$$

setzt, aber für $x = \frac{L}{2}$

$$y_1 = y_2 = 0.$$

Dann erhält man für die Biegung d. h. die Senkung der Stelle $x = 0$:

$$\eta = \frac{PL^3}{4EBD_0^3}\left(1 - \frac{3L^2}{40}(d_1 - 2\,d^2)\right) = \frac{PL^3}{4EB(D)^3}.$$

Wenn man als Dicke des Prisma's

$$(D) = D_0\left(1 + \frac{L^2}{40}(d_1 - 2d^2)\right)$$

in Rechnung zieht. Die Beobachtung von D fand bei allen Prismen an einer Anzahl von $(n+1)$ gleich weit von einander abstehenden Stellen statt, d. h. es wurde gemessen

$$D_0 = D_0$$
$$D_{\pm 1} = D_0\left(1 \pm \frac{dL}{n} + \frac{d_1 L^2}{n^2}\right)$$
$$D_{\pm 2} = D_0\left(1 \pm \frac{2dL}{n} + \frac{4d_1 L^2}{n^2}\right)$$
$$- - - - - - - -$$

Setzt man

$$\frac{dLD_0}{n} = \Delta, \quad \frac{d_1 L^2 D_0}{n^2} = \Delta,$$

also

$$D_{\pm h} = D_0 \pm h\Delta + h^2\Delta,$$

so wird das in Rechnung zu ziehende (D):

$$(D) = D_0 + \frac{n^2}{40}\left(\Delta_1 - \frac{2\Delta^2}{D_0}\right). \qquad 1.$$

Bei den Torsionsbeobachtungen ist einfach die mittlere Dicke auf der benutzten Länge in Rechnung zu ziehen.

Digitized by Google

Dasselbe kann ohne merklichen Fehler hinsichtlich der Breite sowohl bei Biegung als bei Drillung geschehen.

Die Bestimmung der Dimensionen der benutzten Krystallstäbchen geschah mit Hülfe eines Sphärometers von G. Heyde in Dresden, welches ich der Unterstützung der Königlichen Akademie der Wissenschaften verdanke. Die Construction dieses Instrumentes weicht in sofern von der gebräuchlichen, z. B. der von Herrmann und Pfister in Bern (Wüllner, Physik I, S. 22, 1874), ab, als der Moment der Berührung des zu messenden Gegenstandes nicht durch die Bewegung der Blase einer Wasserwaage, sondern durch die Unterbrechung eines galvanischen Stromes markirt wird. Dieser Strom wird von einem Inductionsapparat geliefert und wirkt auf ein nahe dem Ohr des Beobachters befestigtes Telephon; auf diese Weise ist eine absolut feste Aufstellung des Sphärometers, wie sie die ältere Construction fordert, unnöthig und man kann mit Leichtigkeit bei wiederholten Messungen eine Übereinstimmung bis auf $0.^{mm}0005$ erhalten.

Zum Graduiren des Instrumentes habe ich eine Ecke eines Deckgläschens, dessen Dicke ca. $0.^{mm}066$ war, an verschiedenen Stellen der benutzten Umgänge gemessen, zu welcher Operation eine einfache Einrichtung angebracht ist, und darnach die Correction des Instrumentes berechnet. Da dieselbe sich nirgends wesentlich über $0.^{mm}0005$ erhob, so konnte sie bei meinen Beobachtungen vernachlässigt werden.

Den absoluten Werth eines Schraubenganges erhielt ich, indem ich am Sphärometer statt des beweglichen Tellers ein horizontales Mikroskop anbrachte und mittelst desselben verschiedene Theilstriche des Normalmeters des hiesigen physikalischen Institutes einstellte. Ich habe dadurch das Resultat erhalten, dass etwa 992.7 Trommeltheile des Sphärometers bei mittlerer Zimmertemperatur einem Millimeter entsprechen; doch sind wegen der Dicke der Theilstriche die Zehntel in obigem Werthe kaum sicher.

I. Steinsalz.

Die Steinsalzstäbchen sind aus Stassfurter Spaltungsstücken von Dr. Steeg und Reuter in Homburg v. d. Höhe angefertigt. Sie gehören nur zwei verschiedenen Gattungen an; beide liegen mit der Schmalseite parallel einer Würfelfläche, aber die Längsaxe der einen (W) fällt in die Normale einer Würfelfläche, die der andern (G) in die einer Granatoëderfläche.

Die genaue Bestimmung der Dimensionen zeigte sich ausserordentlich schwierig und ich bin trotz aller Anstrengungen zu keinen

Digitized by Google

mich völlig befriedigenden Resultaten gekommen. Wegen der Weichheit des Steinsalzes sind nämlich die Hauptflächen der Stäbchen höchst unregelmässig gekrümmt; ich habe diesen Umstand zu berücksichtigen gesucht, indem ich die Dicken stets an 28 Stellen maass, nämlich in vier Punktreihen parallel der Längsaxe, von welchen zwei nahe der Mitte, zwei nahe den Kanten der Breitseiten lagen. Die Resultate dieser Messungen ($D = 1500 + \delta$ gesetzt) sind in den folgenden Tafeln enthalten; jede Zahl ist das Mittel aus mindestens vier Einstellungen. Unter die Mittel der für jeden Querschnitt beobachteten Zahlen sind zur Vergleichung die nach der obigen Formel berechneten gestellt. Die Einheiten sind Trommeltheile des Sphärometers ($= 1/992.7^{mm}$).

Eine weitere Unsicherheit kam in die Dickenmessungen durch einen anderen Umstand. Die Stäbchen waren sofort nach ihrer Herstellung in dickflüssiges venetianisches Terpentin eingeschmolzen und wurden vor den Beobachtungen durch Waschen mit erwärmtem Terpentinöl davon befreit. Offenbar hängt nun die letzte Schicht sehr fest oder man beseitigt bei wiederholtem Abpoliren auch eine oberflächliche Schicht Steinsalz:[1] kurz nach 5 bis 10 Mal wiederholtem Abwaschen und Abpoliren erschienen die Stäbchen jedesmal um kleine Beträge dünner. Ich habe demgemäss die Reinigung sehr oft vorgenommen, ehe ich an die definitiven Dimensionenbestimmungen und die Biegungen und Drillungen ging — irgend eine Garantie dafür, dass die gemessenen Dicken sich auf das reine Steinsalz beziehen, kann ich freilich nicht geben.

Die Breiten ($B = 6000 + \beta$) sind ebenfalls mit dem Sphärometer gemessen und in Trommeltheilen desselben angegeben; die beiden Reihen Zahlen beziehen sich auf Messungen in umgekehrter Lage

Dimensionen.

$D = 1500 + \delta$; $B = 6000 + \beta$

W. I.						
$\delta = 71$	88	98.5	104	107	108	100
72	84	97.5	105	103	104	97
77.5	86	95	101	105	107	99
73.5	76.5	86.5	92.5	96.5	96.5	90
Mittel: 73.5	83.5	94.5	100.5	104	104	96.5
ber. 72.1	85.1	94.7	100.7	103.3	102.3	97.9

$\delta_0 = 100.7$ $\quad \Delta = 4.3$ $\quad \Delta_1 = -1.7$

[1] Im Allgemeinen dürfte das erstere stattfinden. Stäbchen W, IV gab auffällig kleine Biegungscoëfficienten; nach einer wiederholten gründlichen Reinigung zeigte sich die Dicke um circa 0.002^{mm} verringert, die Grösse der Biegung merklich unverändert.

Digitized by Google

$\beta = 33$	43	43	44	48	45	30
30	37	40	43	44	40	32
Mittel: 31.5	40	41.5	43.5	46	42.5	31.

W. II.

$\delta = -$ 8	6	15	20	25	27	19
4	18	26	31	35	37	30
8	22	30	35	39	40	33
12	26	36	40	45	47	42
Mittel: 4	18	27	31.5	36	38	31.
ber. 4.4	17.3	26.9	33.2	36.1	35.7	32.0

$\delta_0 = 33.2$ $\Delta = 4.6$ $\Delta_1 = -1.67$

$\beta = 18$	22	25	23	22	24	15
20	23	27	24	25	25	15
Mittel: 19	23	26	24	23	24	15.

W. III.

$\delta = 82$	85	86	84	80	73	60
72	80	79.5	78	73	67	55
69	80.5	81.5	78	74.5	68.5	56.5
60	67	68	64	60	53	39
Mittel: 71	78	79	76	72	65	53
ber. 71.7	76.8	78.6	77.1	72.4	64.4	53.1

$\delta_0 = 77.1$ $\Delta = 3.1$ $\Delta_1 = -1.63$

$\beta = 26$	38	41	45	46	38	26
34	44	44	46	39	34	23
Mittel: 30	41	43	45	43	35	24

W. IV.

$\delta = 13$	26	31	35	41	41	36
30	42.5	47	51	57	58	54
31	40	47	54	59	60	52.5
42	54	59	63	72	74	65
Mittel: 29	40.5	46	51	57	58	52
ber. 28.8	39.4	47.4	52.8	55.6	55.8	53.4

$\delta_0 = 52.8$ $\Delta = 4.1$ $\Delta_1 = -1.3$

$\beta = 52$	50	52	48	48	48	40
40	49	53	45	54	49	38
Mittel: 46	50	52	47	51	48	39

$D = 1500 + \delta$ $B = 5500 + \beta$

Gr. I.

$\delta = 100$	82	58.5	37.5	23	17	13
111	92	64	43	29.5	26	24
112.5	93	66.5	44.5	31.5	27	24
114	92	64	41.5	28.5	26	24
Mittel: 109.5	90	63	41.5	28	24	21
ber. 112.7	84.7	61.7	43.7	30.7	22.7	19.7

$\delta_0 = 43.7$ $\Delta = 15.5$ $\Delta_1 = 2.5$

$\beta =$ 336	396	415	425	437	450	428
343	398	417	427	432	439	425
Mittel: 340	397	416	426	434	445	426.

Digitized by Google

Gr. II.

$\vartheta = 36$	54	65	76.5	94	115	129
42.5	58.5	68.5	81	99.5	120.5	136.5
43	60	70.5	82	100.5	121	140.5
38	52	63	76	95	115.5	134.5
Mittel: 40	56	67	79	97	118	135
ber. 46	54.5	65.5	79.2	95.7	115.0	137.1

$\vartheta_0 = 79.2$ $\Delta = 15.1$ $\Delta_1 = 1.36$

$\beta = 418$	427	425	426	409	398	378
417	427	424	420	417	400	382
Mittel: 418	427	425	423	413	399	380.

Gr. III.

$\vartheta = 101$	77	49	27	16	16	12
108.5	86	55.5	33.5	22.5	22	16.5
110.5	85	57.5	35.5	24.5	24	19.5
109	87	58	33	22	21.5	16.5
Mittel: 107	84	55	32	21	21	16
ber. 109.7	78.8	52.1	35.6	23.3	17.2	17.3

$\vartheta_0 = 35.6$ $\Delta = 15.4$ $\Delta_1 = 3.1$

$\beta = 376$	403	419	426	432	446	418
376	403	415	426	434	440	419
Mittel: 376	403	417	426	433	443	418.

Gr. IV.

$\vartheta = 98$	81	59	37	20	8	− 10
108	90	67	45	27	14	− 3
110	91	69	47	30	17	0
112	93	71	48	31	18	0
Mittel: 107	89	66.5	44	27	14	− 3
ber. 106.2	84.5	63.5	44.1	26.3	10.1	− 4.5

$\vartheta_0 = 44.1$ $\Delta = 18.6$ $\Delta' = 0.8$

$\beta = 395$	421	416	414	403	390	371
403	417	416	415	399	387	374
Mittel: 399	419	416	414	401	388	373.

Die Messungen der Biegungen sind in der früher beschriebenen Weise[1] angestellt. Jedes Stäbchen wurde erst mit der einen, dann mit der anderen Breitseite auf die Lager aufgelegt und belastet; dem entsprechend ergaben sich die zwei Gruppen-Werthe, die mit »1. Lage« und »2. Lage« bezeichnet sind. In jeder Gruppe sind zwei Reihen Zahlen vorhanden, welche durch Messungen an gegenüberliegenden Stellen der Schraube des Mikrometer-Mikroskopes erhalten sind; das Mittel beider Reihen ist frei von dem Fehler der Schraube, der stellenweise über 1 Trommeltheil beträgt, die einzelnen Reihen aber nicht. Jede Zahl ist das Mittel aus mindestens vier Einstellungen.

Die Längen L der Stäbchen sind in Millimetern, die Querdimensionen D und B in Trommeltheilen des Sphärometers ($= 1/992.7^{mm}$) die Biegungen η in solchen des Mikrometer-Mikroskopes ($= 1/1009^{mm}$)

[1] W. VOIGT, Pogg. Ann. Erg. Bd. VIII, S. 13, 1875.

Digitized by Google

angegeben, die Belastung P in Grammen. Aus diesen Zahlen ist dann der sogenannte Elasticitäts-Coëfficient E $\left(\text{oder } E = \frac{1}{E}\right)$ für die beiden Gattungen von Stäbchen W. und G. nach der Formel

$$E = \frac{L^3}{4\eta_1 B D^3} \qquad 2.$$

berechnet und in Millionen Grammen ausgedrückt; η_1 ist die der Belastung mit 1 Gramm entsprechende Biegung, ϑ die Beobachtungstemperatur in Celsius-Graden.

Biegungen.

W. I. $L = 64$, $B = 6041$, $D = 1599.2$, $P = 100$, $\vartheta = 20°$.

1. Lage $\eta =$	63.0	62.8	62.5	62.8
	61.8	61.6	61.4	61.7
2. Lage $\eta =$	62.6	62.3	62.4	62.1
	62.2	62.1	62.4	62.5

$\eta_1 = 0.6225$ $E_w = 4.175$.

W. II. $L = 64$, $B = 6023$, $D = 1531.7$, $P = 100$, $\vartheta = 20°$.

1. Lage $\eta =$	71.4	71.4	71.6
	70.6	70.5	70.8
2. Lage $\eta =$	70.1	70.0	70.0
	71.5	71.4	71.4

$\eta_1 = 0.7090$ $E_w = 4.184$.

W. III. $L = 64$, $B = 6039$, $D = 1575.6$, $P = 100$, $\vartheta = 19°5$.

1. Lage $\eta =$	65.1	65.0	65.0
	63.7	63.8	63.9
2. Lage $\eta =$	64.0	63.6	64.0
	65.5	65.5	65.4

$\eta_1 = 0.6455$ $E_w = 4.210$.

W. IV. $L = 64$, $B = 6049$, $D = 1551.6$, $P = 100$, $\vartheta = 20°$.

1. Lage $\eta =$	66.3	66.8	67.0	66.5
	68.2	68.8	68.2	68.3
2. Lage $\eta =$	68.3	69.0	68.5	67.9
	68.6	68.8	68.7	68.7

$\eta_1 = 0.6810$ $E_w = 4.175$.

Mittelwerth:

$E_w = 4.186$ $E_w = 0.2389$.

G. I. $L = 64$, $B = 5917$, $D = 1545.7$, $P = 100$, $\vartheta = 20°$.

1. Lage $\eta =$	84.4	84.6	84.7
	84.8	84.8	84.8
2. Lage $\eta =$	85.1	84.5	84.8
	85.0	84.8	84.7

$\eta_1 = 0.848$ $E_g = 3.468$.

G. II. $L = 64$, $B = 5914$, $D = 1580.2$, $P = 100$, $\vartheta = 20°$.

1. Lage $\eta =$	78.5	78.7	78.8
	79.0	79.4	79.5
2. Lage $\eta =$	79.8	79.6	79.4
	78.5	78.6	78.8

$\eta_1 = 0.7905$ $E_g = 3.480$.

Digitized by Google

Gr. III. $L = 64$, $B = 5935$, $D = 1538.1$, $P = 100$, $\vartheta = 18°$.

1. Lage $\eta =$	85.2	85.2	84.9
	86.0	86.0	86.2
2. Lage $\eta =$	85.2	86.0	85.6
	84.2	84.7	84.6

$\eta_1 = 0.853$ $\quad E_g = 3.48_8$.

Gr. IV. $L = 64$, $B = 5904$, $D = 1544.4$, $P = 100$, $\vartheta = 20°$.

1. Lage $\eta =$	84.2	83.8	84.3
	85.0	84.9	85.3
2. Lage $\eta =$	84.5	84.5	84.7
	84.2	84.6	84.8

$\eta_1 = 0.846$ $\quad E_g = 3.49_1$.

Mittelwerth:

$$E_g = 3.48_2, \qquad E_g = 0.2871.$$

Diese Werthe für E_w und E_g sind merklich grösser, als die früher von mir erhaltenen Zahlen:[1]

$$E_w = 4.10_3 \qquad E_g = 3.41_0$$

desgl. als die von Hrn. KOCH[2] mitgetheilten:

$$E_w = 4.03_3 \qquad E_g = 3.39_5.$$

Was meine früheren Beobachtungen anbetrifft, so glaube ich klar zu erkennen, weshalb sie zu kleine Werthe liefern mussten: bei ihnen sind nämlich die Dicken nur sehr nahe der Mittellängslinie der Stäbchen gemessen,[3] also da, wie die S. 993 und 994 hier mitgetheilten Werthe zeigen, die Flächen nicht eben, sondern gekrümmt sind, zu gross in Rechnung gezogen.

Hr. KOCH[4] giebt nur an, dass er die Dicke an zwölf Stellen beobachtet hat, aber nicht, wie dieselben vertheilt waren; ich kann also nicht beurtheilen, ob nicht vielleicht bei ihm dieselbe Fehlerquelle vorliegt, wie bei meinen früheren Beobachtungen.

Die Methode der Torsionsbeobachtungen ist ebenfalls früher ausführlich beschrieben worden;[5] ich erwähne daher nur, dass die gegenseitige Drehung zweier Querschnitte der Stäbchen an auf den Stäbchen mit Klammern befestigten Spiegeln mittelst Fernrohr und Scala (Abstand von den Spiegeln $A = 2652^{mm}$) bestimmt wurde und ein besonderes Verfahren die Elimination der Reibung der Drehungsaxen gestattete.

Die folgenden Tabellen enthalten ausser den in Rechnung zu ziehenden Dimensionen L, B, D in den früheren Einheiten zunächst die Belastung P in Grammen, mit der operirt wurde und die stattfindende

[1] W. VOIGT, POGG. Ann. Bd. VII. S. 45, 1876.
[2] K. R. KOCH, WIED. Ann. Bd. V. S. 251, 1878.
[3] W. VOIGT l. c. S. 18.
[4] K. R. KOCH, Ber. der Freib. nat. Ges. Bd. VIII. S. 9, 1881.
[5] W. VOIGT l. c. S. 181.

Digitized by Google

Temperatur ϑ — darauf in zwei Reihen die Anzahl σ der Scalentheile (Millimeter), um welche die Bilder in den beiden Spiegeln sich gegenseitig bei einer Belastung *Sa* (Wagschale) $Sa + P$, $Sa + 2P$ verschoben, ferner σ_0 den Scalenstrich, von welchem aus die Drehung stattfand. Aus ihnen ist nach der Formel $(\sigma + \sigma_0)/A = \operatorname{tg} 2(\tau + \tau_0)$ die jeder Belastung entsprechende Drehung τ und hieraus die für 1 Gramm Belastung gültige τ_1 berechnet. ρ giebt an, um wie viel die Ablesungen im Mittel differirten, wenn man zu derselben Belastung von grösseren oder kleineren Werthen überging, d. h. das Maass der Reibung und hat keine besondere Verwendung.

Aus diesen Zahlen berechnet sich für die Stäbchen von der Gattung W. der Torsionscoëfficient T_w nach der Formel:

$$T_w = \frac{3RL}{\tau_1 BD^3\left(1 - \frac{3\lambda}{16}\frac{D}{B}\right)}, \qquad 3.$$

in welcher R der Hebelarm ist, an dem die Belastung wirkt und der für meinen Apparat $= 36.79^{mm}$ war, λ aber eine complicirte Function des Verhältnisses B/D bezeichnet, die für Werthe, die 2 übersteigen, merklich constant $= 3.361$ ist.

Drillungen.

W. I. $L = 44.75$, $B = 6043$, $D = 1598.2$, $P = 10$, $\vartheta = 21°$.

lR.	$\sigma = 9.8$	29.1	48.2	$\sigma_0 = -25$	$\rho = 2.4$
rR.	$\sigma = 9.6$	28.6	47.6	$\sigma_0 = +70$	$\rho = 2.4$

$\tau_1 = 0.000180_0$ $\quad T_w = 1.29_6$.

W. II. $L = 45.65$, $B = 6024$, $D = 1530.6$, $P = 10$, $\vartheta = 21°$.

rR.	$\sigma = 10.8$	32.8	54.8	$\sigma_0 = -10$	$\rho = 3.0$
lR.	$\sigma = 10.8$	33.2	55.2	$\sigma_0 = -95$	$\rho = 4.0$

$\tau_1 = 0.000.208_5$ $\quad T_w = 1.29_2$.

W. III. $L = 46.2$, $B = 6042$, $D = 1574.6$, $P = 10$, $\vartheta = 20°$.

lR.	$\sigma = 10.5$	31.0	51.5	$\sigma_0 = -70$	$\rho = 3.0$
rR.	$\sigma = 10.1$	30.7	51.4	$\sigma_0 = +10$	$\rho = 3.0$

$\tau_1 = 0.000194_5$ $\quad T_w = 1.29_2$.

W IV. $L = 45.4$, $B = 6050$, $D = 1550.7$, $P = 10$, $\vartheta = 20°$.

rR.	$\sigma = 10.5$	31.7	52.9	$\sigma_0 = +50$	$\rho = 3.5$
lR.	$\sigma = 10.8$	32.1	53.2	$\sigma_0 = -70$	$\rho = 3.0$

$\tau_1 = 0.000199_8$ $\quad T_w = 1.28_9$.

Diese vier Beobachtungsreihen am Stäbchen der Gattung W. geben als Mittelwerth der Resultate:

$$\text{Mittelwerth } T_w = 1.292\,,\ T_w = 0.774_0\,,$$

wenn $T = \frac{1}{T}$ gesetzt wird.

Digitized by Google

Da in den Elasticitäts-Constanten a, b und e:

$$E_w = \frac{a+b}{(a-b)(a+2b)}, \quad E_g = \frac{1}{4e} + \frac{a}{2(a-b)(a+2b)}, \quad T_w = \frac{1}{e}$$

ist,[1] so folgt aus den vorstehend gefundenen Zahlen:

$$a = 4.753 \qquad b = 1.313 \qquad e = 1.292 .$$

Diese Werthe der Elasticitäts-Constanten des Steinsalzes beziehen sich auf die Temperatur 20° C. und sind in Millionen Grammen ausgedrückt. Sie zeigen, dass innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler die Relation

$$b = e$$

gilt, auf welche POISSON[2] theoretisch gekommen ist, indem er die Krystalle als Systeme von Massentheilchen ansah, welche nach allen Richtungen hin gleichmässig wirken, also keine Polarität besitzen. Dass diese Annahme der Wirklichkeit nicht streng entspricht, ist wohl sicher, denn sie macht die Bildung eines Krystalles unbegreiflich; es ist aber von Interesse, dass bei Steinsalz die Polarität der Molecüle so gering ist, dass sie auf die Elasticitäts-Verhältnisse nicht merklich einwirkt.

Ich theile schliesslich noch die Beobachtung der Drillung eines Stäbchens G. mit. Sie gab:

G. I.	$L = 44.95$,	$B = 5924$,	$D = 1547.5$,	$P = 10$,	$\vartheta = 20°$	
l. R.	$\sigma = 9.7$	25.7	41.6	$\sigma_0 = -185$	$\rho = 4.5$	
r. R.	$\sigma = 10.2$	25.9	41.7	$\sigma_0 = -23$	$\rho = 4.2$	

$$\tau_1 = 0.0002003$$

Berechnet man hieraus nach der Formel:

$$T_w = \frac{3RL}{\tau_1 BD^3\left(1 - \frac{3\lambda}{16}\sqrt{\frac{2e}{a-b}}\frac{D}{B}\right)} \qquad 4.$$

die Constante T_w, wobei in dem kleinen Glied im Nenner für a, b, e die obigen Werthe einzusetzen sind, so findet man $T_w = 1.276$ also vollständig genügende Übereinstimmung mit den Resultaten der Beobachtung an den Stäbchen W.

II. Flussspath.

Die Flussspathstäbchen sind aus einem fast wasserhellen Spaltungsstück, vom Brienzer See stammend, welches ich der Freundlichkeit von Hrn. Prof. C. KLEIN verdanke, von VOIGT und HOCHGESANG in

[1] W. VOIGT, WIED. Ann. Bd. XVI, S. 409, 1882.
[2] POISSON, Mém. de l'Av. XVIII, p. 119, 1842.

Digitized by Google

Göttingen hergestellt. Sie gehören, wie bei dem oben behandelten Steinsalz, ausschliesslich zu den Gattungen W. und G. und zwar waren durch eine Reihe von Unglücksfällen. die zumeist auf der grossen Spaltbarkeit und Sprödigkeit des Flussspaths beruhen, von der ersten Gattung beim Beginn der eigentlichen Messungen nur noch zwei Stück vorhanden.

Die angestellten Beobachtungen theile ich in derselben Anordnung wie oben mit.

Dimensionen.

	$D = 500 + \delta$		$B = 5000 + \beta$		
W. III.					
$\delta =$	123	137	144.5	151	152.5
	127	138	147	152	154
	126.5	139	147	153.5	156
	128	139.5	150	155	156
Mittel:	126	138.5	147	153	154.5
ber.	126.1	138.4	147.4	152.8	154.7
	$\delta_0 = 147.4$	$\Delta = 7.15$	$\Delta_0 = -1.75$		
$\beta =$	362	355	347	338	330
	364	355	350	337	330
	363	355	348	338	330.
W. IV.					
$\delta =$	126	134	141	143	144
	126	134	140	142	145
	126	135	141	142	144
	124	133	140	141	142
Mittel:	125.5	134	140.5	142	144
ber.	125.6	134.0	139.8	143.0	143.6
	$\delta_0 = 139.8$	$\Delta = 4.5$	$\Delta_1 = -1.3$		
$\beta =$	365	359	351	343	336.5
	363	359.5	351	344	339
Mittel:	364	359	351	343.5	338.

Gr. I.						
$\delta =$ 393	401	407	412	417	422	427
400	408	413.5	419	427	431	433
400.5	408	413	419	424	429	431
401	409	415	420	426	431	434
Mittel: 398.5	406.5	412	417.5	423.5	428	431
ber. 398.8	405.9	412.4	418.1	423.2	427.5	431.2
	$\delta_0 = 418.1$	$\Delta = 5.4$	$\Delta_1 = -0.34$.			
$\beta =$ 313	314	311	310	310	312	312
321	310	311	311	311	314	316
Mittel: 318	312	311	310	311	313	314.
Gr. II.						
$\delta =$ 434	425.5	417.5	410.5	403.5	396.5	388.5
434	424.5	417	409.5	402.5	395	387
434	426.5	417.5	411	405	397.5	388.5
432	423	416	409	403	396.5	388
Mittel: 433.5	425	417	410	403.5	396.5	388
ber. 432.4	425.3	418.1	410.8	403.2	395.7	388
	$\delta_0 = 410.8$	$\Delta = 7.4$	$\Delta_1 = -0.07$			

Digitized by Google

$\beta = 316$	317.5	315.5	316	317.5	321.5	321.5
320	317.5	314.5	313	315	316.5	316.5
Mittel: 318	317.5	315	314.5	316	319	319.

Gr. IV.

$\delta = 111$	125	135.5	141.5	142.5
117.5	127.5	139.5	144.5	147.5
119.5	131.5	143	149.5	151.5
124	138	149	154	157
Mittel: 118	130.5	142	147.5	149.5
ber. 117.9	131.5	141.4	147.5	149.9

$\delta_0 = 141.4$ $\quad \Delta = 8.0$ $\quad \Delta_1 = -1.93$

$\beta = 310$	309.5	310	310	315
307	308.5	307	308	313
Mittel: 308.5	309	308.5	309	314.

Gr. V.

$\delta = 144$	146.5	144	132	116
148	150	147	135.5	121
148	151	148.5	138	120
150	152.5	151	139.5	124
Mittel: 147.5	150	147.5	136	120
ber. 147.4	150.4	146.8	136.6	119.8

$\delta_0 = 146.8$ $\quad \Delta = 6.9$ $\quad \Delta_1 = -3.3$

$\beta = 320.5$	320.5	319.5	319	323.5
321.5	321	319	318	321.5
Mittel: 321	321	319	318.5	322.5.

Nach diesen Zahlenwerthen sind also die Flussspathstäbchen wesentlich regelmässiger gestaltet, als die Steinsalzstäbchen.

Biegungen.

W. III. $L = 42$, $B = 5347$, $D = 646.6$, $P = 50$, $\vartheta = 20°$.

1. Lage $\eta =$	44.4	43.9	44.3
	44.7	45.0	44.5
2. Lage $\eta =$	46.0	45.5	45.1
	45.0	44.9	44.7

$\eta_1 = 0.896$ $\quad E_w = 14.04.$

W. IV. $L = 40.1$, $B = 5351$, $D = 639.2$, $P = 60$, $\vartheta = 20°$.

1. Lage $\eta =$	48.1	48.5	48.7
	49.8	49.9	49.6
2. Lage $\eta =$	49.4	49.4	49.4
	48.8	49.0	48.6

$\eta_1 = 0.8183$ $\quad E_w = 13.84.$

Mittelwerth:

$E_w = 13.94$, $\quad E_w = 0.07175.$

G. I. $L = 48$, $B = 5313$, $D = 917.8$, $P = 100$, $\vartheta = 21°5.$

1. Lage $\eta =$	70.4	69.4	69.8	69.5
	69.0	68.7	68.8	69.3
2. Lage $\eta =$	71.0	71.0	70.3	71.0
	70.2	69.6	69.6	70.3

$\eta_1 = 0.6985$ $\quad E_g = 9.460.$

Digitized by Google

G. II. $L = 36$, $B = 5317$, $D = 910.6$, $P = 150$, $\vartheta = 20°$ (?)

1. Lage $\eta =$	43.6	43.3	43.2
	44.9	45.0	44.6
2. Lage $\eta =$	46.0	45.5	45.7
	44.1	43.7	44.2

$\eta_1 = 0.297$ $E_g = 9.61.$

G. IV. $L = 48.3_8$, $B = 5310$, $D = 640.6$, $P = 50$, $\vartheta = 19°0.$

1. Lage $\eta =$	104.7	104.9	104.5
	104.0	104.5	104.3
2. Lage $\eta =$	103.5	103.5	103.2
	103.8	103.5	103.7

$\eta_1 = 2.08_0$ $E_g = 9.51_5.$

G. V. $L = 48.0$, $B = 5320$, $D = 645.4$, $P = 50$, $\vartheta = 20°$ (?).

1. Lage $\eta =$	100.0	99.8	99.7	100.0
	100.0	99.6	100.2	99.8
2. Lage $\eta =$	99.5	99.0	99.2	99.3
	99.0	99.3	99.0	99.4

$\eta_1 = 1.99_1$ $E_g = 9.52_5.$

Mittelwerth:

$E_g = 9.52_7$, $E_g = 0.1050.$

Auch dieser Werth E_g ist (wie die betreffenden Zahlen beim Steinsalz) merklich grösser, als das Resultat älterer Beobachtungen. Hr. H. KLANG[1] hat dafür 9.15 gefunden; da die Beobachtungen aber unter meiner Leitung angestellt sind, so weiss ich, dass sie die oben erörterte Fehlerquelle nicht vermieden haben, also nothwendig ein etwas zu kleines Resultat ergeben mussten. Ob ausserdem die beiden Stücken Flussspath etwas verschiedene Constanten besessen haben, ist nicht zu entscheiden.

Die Drillungsbeobachtungen waren bei Flussspath besonders schwierig, da die Stäbchen durch den Druck, den sie von den Spiegelklemmen erleiden mussten, gerne zersprangen; so ging noch das eine der beiden Stäbchen W. zu Grunde, und um eine gute Bestimmung der Torsions-Constanten T_w zu erhalten, konnte ich nur das einzig übrige Stäbchen W. IV. in verschiedenen Längen beobachten und war im Übrigen auf die Beobachtungen an den Stäbchen G. angewiesen. Ich benutzte von ihnen nur IV und V, weil bei ihnen das Verhältniss D/B klein war und dies nach der Formel (4) Vortheil bringt. Die Entfernung der Scala vom Spiegel war hier $A = 2656^{mm}$.

Drillungen.

W. IV. $L = 23.85$, $B = 5351$, $D = 639.5$, $P = 6$, $\vartheta = 20°$.

lR.	$\sigma = 16.9$	35.4	53.9	$\sigma_0 = +122$	$\rho = 3.3$
rR.	$\sigma = 17.2$	35.7	54.1	$\sigma_0 = +35$	$\rho = 2.2$

$\tau_1 = 0.000578_3$ $T_w = 3.415.$

[1] H. KLANG, WIED. Ann. Bd. XII, S. 327, 1881.

Digitized by Google

$L = 36.05$, $B = 5351$, $D = 640.2$ $P = 6$, $\vartheta = 21°$.

lR.	$\sigma = 25.6$	53.5	81.4	$\sigma_0 = +30$	$\rho = 3.5$
rR.	$\sigma = 26.3$	54.3	82.1	$\sigma_0 = +80$	$\rho = 2.3$

$\tau_1 = 0.000875$ $T_w = 3.39_5$.

Nimmt man hiervon den Mittelwerth $T_w = 3.40$, so kann man mit ihm und den Zahlen für E_w und E_g die Constanten a, b und e der Formel (4) berechnen und dieselbe — da jene Werthe nur in einem kleinen Gliede vorkommen — dann zur Bestimmung von T_w aus Beobachtungen an den Stäbchen G. benutzen.

G. IV. $L = 33.2$, $B = 5309$, $D = 640$, $P = 5$, $\vartheta = 19.5°$.

rR.	$\sigma = 24.2$	45.8	67.5	$\sigma_0 = -260$	$\rho = 3.0$
lR.	$\sigma = 23.1$	44.4	66.1	$\sigma_0 = -60$	$\rho = 3.5$

$\tau_1 = 0.000810$ $T_w = 3.34_4$.

G. V. $L = 31.0_5$, $B = 5320$, $D = 646.7$, $P = 6$, $\vartheta = 21.5$.

rR.	$\sigma = 21.7$	44.9	68.0	$\sigma_0 = 0$	$\rho = 2.0$
lR.	$\sigma = 21.5$	44.6	67.8	$\sigma_0 = -20$	$\rho = 2.2$

$\tau_1 = 0.000727_5$ $T_w = 3.36_6$.

Diese Werthe stimmen durchaus befriedigend mit den obigen und enthalten eine neue Bestätigung der Theorie. Ausserdem geben sie den gesammten

Mittelwerth $T_w = 3.38_0$, $T_w = 0.296_0$.

Aus diesen drei Zahlen:

$$E_w = \frac{a+b}{(a-b)(a+2b)} = 0.071_{75},$$

$$E_g = \frac{1}{4e} + \frac{a}{2(a-b)(a+2b)} = 0.1050,$$

$$T_w = \frac{1}{e} = 0.296_0$$

folgt schliesslich $a = b \cdot 6.36_0$ und:

$$a = 14.5_5 \qquad b = 2.29_0 \qquad e = 3.38_0.$$

Es gilt also bei Flussspath die POISSON'sche Relation

$$e = b$$

keineswegs Demnach sind hier die Voraussetzungen, welche auf dieselbe führen, nicht zutreffend und man muss sich vorstellen, dass die Flussspathmolecüle eine starke Polarität besitzen, d. h. in verschiedenen Richtungen verschieden starke Attractionen ausüben.

Noch habe ich ein Versehen zu berichtigen, welches in meiner Arbeit über die Elasticitäts-Constanten des Kupfers[1] einen Theil der Endresultate entstellt hat.

[1] W. VOIGT, Berl. Ber. XXXVIII, S. 961, 1883.

Digitized by Google

Durch eine Verwechselung der beiden zu meinem Torsionsapparat gehörigen Rollenpaare ist für deren Durchmesser ein falscher Werth in Rechnung gezogen, nämlich 38.10 statt 36.79^{mm}. Während also der Elasticität-Coëfficient ungeändert $= 12.26 \cdot 10^6$ bleibt, sind die mitgetheilten Torsions-Coëfficienten $T' = 4.78_0 \cdot 10^6$ und $T'' = 4.07_0 \cdot 10^6$ mit 36.79/38.10 zu multipliciren und wird demgemäss $T' = 4.61_6 \cdot 10^6$, $T'' = 3.93_0 \cdot 10^6$, also

$$E = 816 \cdot 10^{-10},\ T' = 216_7 \cdot 10^{-10},\ T'' = 254_4 \cdot 10^{-10}.$$

Hieraus folgen die drei Elasticitäts-Constanten

$$a = 13.4_2 \cdot 10^6,\ b = 6.57_5 \cdot 10^6,\ e = 5.59_0 \cdot 10^6;$$

die merkwürdig genaue Erfüllung der Relation $b = e$ war also ein bedeutungsloser Zufall. Die mitgetheilten Zahlen haben übrigens, wie ich seiner Zeit betont habe, nur den Sinn vorläufiger Resultate, da das für die Beobachtung benutzte Kupfer nicht in einem genau definirbaren Zustand war.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

Digitized by Google

43. Zur Lehre von der Festigkeit der Gewächse.

Erwiderung von S. Schwendener.

(Vorgetragen am 20. November; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XLVI]; — ausgegeben am 27. November.)

Im dritten Bande der »Arbeiten des botanischen Instituts in Würzburg« veröffentlicht E. Detlefsen einen längeren Aufsatz »über die Biegungselasticität von Pflanzentheilen«, welcher im Wesentlichen darauf abzielt, die in meiner Schrift über »das mechanische Princip im anatomischen Bau der Monocotylen« enthaltenen Darlegungen als im Ganzen principiell unhaltbar und in den Einzelheiten fehlerhaft hinzustellen. Dies veranlasst mich, die einschlägigen Fragen hier nochmals zur Sprache zu bringen und die etwas ungestümen Angriffe meines Opponenten kritisch zu beleuchten.

1. Terminologisches.

Detlefsen wendet sich zunächst gegen die von mir und meinen Schülern angewandte Bezeichnungsweise, die seiner Meinung nach aus dem Umstande zu erklären ist, dass wir Elasticität und Festigkeit nicht klar unterschieden haben. Hierauf habe ich nur Weniges zu erwidern.

Es ist ganz richtig, dass der Ausdruck Festigkeit in der technischen Literatur gewöhnlich im Sinne von Widerstand gegen den Bruch gebraucht wird. In diesem nämlichen Sinne findet man bei einigen Autoren, so z. B. bei Weisbach und Grashof[1], auch die Worte Biegungsfestigkeit, Zugfestigkeit u. s. w. angewendet. Diese letztere Bezeichnungsweise ist aber keineswegs eine allgemein anerkannte. So sind z. B. in Ritter's Lehrbuch der Ingenieur-Mechanik beide Ausdrücke vermieden; es ist hier bloss von Zug- und Biegungsspannungen, aber nicht von Biegungsfestigkeit und ebensowenig von Biegungselasticität die Rede. Laissle und Schübler[2] brauchen, um jede Zweideutigkeit auszuschliessen, öfter den Ausdruck Bruchfestigkeit und demgemäss auch für die Festigkeitsmodule des Zerreissens oder des Zerbrechens die Bezeichnung Bruchcoefficient der absoluten oder

[1] Theorie der Elasticität und Festigkeit. Berlin 1878.
[2] Der Bau der Brückenträger. Stuttgart 1869.

Digitized by Google

relativen Festigkeit. Ähnlich verfahren noch manche andere Autoren. Wertheim und Chevandier endlich, auf deren Messungen sich Detlefsen vorzugsweise beruft, bezeichnen die Widerstandsfähigkeit gegen Zug als »cohésion«. Eine übereinstimmende Terminologie, nach der man sich zu richten hätte, ist also nicht vorhanden.

Andererseits darf nicht übersehen werden, dass dem Worte »fest« im gewöhnlichen Sprachgebrauch eine ziemlich vielseitige Bedeutung zukommt. Man denke z. B. an handfest, sattelfest, kugelfest u. s. w. Eine Schutzwehr kann kugelfest sein, auch wenn sie dem Stosse der Kugeln elastisch nachgiebt, und sie ist es erst recht, wenn sie alle Proben, die man ihr auferlegt, ohne Bruch aushält.

Unter diesen Umständen halte ich es für durchaus zulässig, die Worte biegungsfest und zugfest, wie überhaupt alle ähnlichen Combinationen mit fest, in einem etwas andern Sinne zu gebrauchen, als dies in der technischen Literatur üblich ist. Ich bedurfte für meine Darstellung eine kurze Bezeichnung für solche Pflanzentheile, welche vermöge der peripherischen Lage der mechanisch wirksamen Zellen für die Inanspruchnahme auf Biegung möglichst zweckmässig gebaut sind, und ein ähnliches Bedürfniss machte sich auch für jene Organe geltend, welche nur gegen longitudinalen Zug noch den vollen Widerstand leisten, der bei gegebener Querschnittsgrösse des Stereoms möglich ist, während sie für die Beanspruchung durch biegende Kräfte ganz und gar nicht angepasst erscheinen. Die erstern Constructionsformen bezeichnete ich demgemäss als biegungsfeste, letztere als zugfeste, und in analoger Weise wurden auch die Ausdrücke druckfest und schubfest gelegentlich angewendet.

Dass diese Bezeichnungen unklar oder gar unverständlich sein sollen, vermag ich nicht einzusehen. Auch kann ich mit Befriedigung darauf hinweisen, dass man mich in weiten Kreisen verstanden und richtig verstanden hat. Übrigens streite ich nicht gerne um Worte, weil mir jede Polemik dieser Art ebenso unerquicklich als unfruchtbar erscheint. Es ist im Grunde ja mehr oder weniger Geschmackssache, ob man sich diese oder jene Abweichung von der Begriffsfassung oder Bezeichnungsweise anderer Autoren erlauben will oder nicht. In der Botanik sind wir nach dieser Richtung an ein ziemliches Maass von Freiheit gewöhnt. Eine ganze Reihe von Ausdrücken werden bald in einem weitern, bald in engerem oder auch in gänzlich verschiedenem Sinne gebraucht, so z. B. Assimilation, Nutation, Epinastie und Hyponastie, orthotrop u. s. w. Ausserdem mag hier an die Blattspirale erinnert werden, die doch eigentlich eine Schraubenlinie ist. Es gibt nur wenig botanische Abhandlungen von einigem Umfang, die nicht in irgend einer Beziehung ihre besondere Terminologie enthielten.

Digitized by Google

Welches soll nun aber nach DETLEFSEN die richtige Bezeichnung sein? Er sagt S. 152: »Den Widerstand, den ein fester Körper einer Biegung entgegensetzt, nennt man seine Steifheit« — und gebraucht sodann dieses Wort durchgehends in quantitativem Sinne, indem er z. B. von Körpern spricht, deren Steifheit »doppelt so gross« ist, als die eines Stabes von bestimmter Beschaffenheit. Hierzu habe ich in erster Linie zu bemerken, dass ich diese Bezeichnung in der technischen Literatur nirgends gefunden habe. Man spricht wohl von steifen Streben im Gegensatz zu nichtsteifen, ebenso von Absteifungen, Aussteifungen u. dergl., jedoch ohne damit ein bestimmtes Maass von Widerstandsfähigkeit anzugeben. Der Ausdruck »steif« hat also in der Technik bloss qualitative Bedeutung. Daneben ist noch von der Steifigkeit der Seile und Ketten und von ihrem Steifigkeitswiderstand die Rede; doch handelt es sich hierbei um Eigenschaften, bei denen die Elasticität keine Rolle spielt. Noch weniger können die steifen Winde des Seemannes als Parallele dienen. Dessenungeachtet habe ich gegen eine verständige Anwendung des Wortes »steif« im Sinne DETLEFSEN's nichts einzuwenden; ich habe dieses Wort ja selbst gelegentlich gebraucht (vergl. S. 101 und 102 meiner Abhandlung). Allein so oft es darauf ankommt, die Gegensätze in der Construction zu betonen, die ich a. a. O. gewöhnlich mit biegungsfest und zugfest bezeichne, halte ich mich heute noch mit Vorliebe an diese letztere Ausdrucksweise. Und so lange nicht zum Worte steif noch ein zweites hinzugefügt wird, welches mit meinem »zugfest« im Wesentlichen übereinstimmt, muss überhaupt die neue Terminologie als ungenügend bezeichnet werden. Einzelne Wendungen unseres Autors finde ich übrigens schon mit Rücksicht auf den Sprachgebrauch nicht empfehlenswerth. Von Körpern zu reden, die »bei grosser Biegungsfähigkeit sehr steif« sind (S. 169), halte ich z. B. unter allen Umständen für bedenklich.

Doch genug über Worte, nun zur Sache.

2. Methoden der Untersuchung.

DETLEFSEN äussert sich über die Methode, nach der ich die Elasticitätsconstanten der mechanischen Zellen annähernd zu bestimmen suchte und welche später auch TH. VON WEINZIERL[1] und H. AMBRONN[2] mit gutem Erfolge zur Anwendung brachten, in sehr abfälliger Weise. Für ihn sind alle unsere Messungen einfach unbrauchbar, »denn — so sagt er S. 149 — ich wage nicht zu behaupten, dass die gemessenen Abstands-

[1] Sitzungsber. d. Wiener Akad. Bd. LXXVI, Abth. I. Heft 3. 1876.
[2] PRINGSHEIM's Jahrb. Bd. XII, S. 473. 1881.

Digitized by Google

änderungen immer den Dimensionen des Objectes entsprachen«. Nun, ich denke, in dieser Hinsicht könnte sich unser Herr Opponent beruhigen; mit geschlossenen Augen haben wir denn doch nicht beobachtet. Für den Sachverständigen kann es überdies nicht dem geringsten Zweifel unterliegen, dass die nach dieser Methode ausgeführten Messungen vollkommen zuverlässig und bis auf circa $^1/_4{}^{mm}$ genau sind. Da nun diese Grösse schon bei Verlängerungen von 2 bis 4^{mm} innerhalb der Grenzen individueller Schwankungen liegt, so hat eine grössere Genauigkeit in der Bestimmung der Dimensionsänderungen für die von uns behandelten Fragen keinen Zweck.

Nur wenn es sich um ganz andere Aufgaben handelt, beispielsweise um die Bestimmung der etwaigen bleibenden Verlängerung mechanischer Zellen oder um den Einfluss des Wassergehaltes auf die specifische Ausdehnung u. dergl., dann ist allerdings eine möglichst grosse Genauigkeit erwünscht. Solche Aufgaben sind aber bis jetzt von Niemandem eingehend bearbeitet worden. Wer sie in Angriff nehmen will, wird gut thun, Objecte mit möglichst longitudinalem Faserverlauf zu wählen, nicht wie Detlefsen es gethan (S. 151), Rindenstreifen von Dicotylen (Cannabis), wo bekanntlich die Bastbündel zu beiden Seiten der Markstrahlen Bogen bilden, deren Krümmung in Folge der Belastung voraussichtlich eine kleine Veränderung erfährt. So geringfügig diese Fehlerquelle auch sein mag, so kann sie doch bei Messungen, die bis zu $^1/_{9000}$ der Gesammtlänge genau sein sollen, leicht ins Gewicht fallen.

Ebenso kommt es mit Bezug auf die Zweckmässigkeit einer längern oder kürzern Dauer der Belastung ganz auf die Ziele an, welche der Experimentator verfolgt. Für meine Untersuchungen war die durch Luftströmungen bedingte stossweise Beanspruchung in der freien Natur das leitende Vorbild, und da hier bleibende Formveränderungen in der Regel nicht vorkommen, so war zum Mindesten für die Maximalbelastungen eine kurze Dauer vorgezeichnet. In den meisten Fällen beschränkte ich dieselbe auf die zum Messen nöthige Zeit, und ähnlich verfuhren auch Th. von Weinzierl und Ambronn. Diese Beschränkung halte ich schon bei Zugbelastungen für naturgemäss und bei Biegungen ganzer Organe sogar für nothwendig, weil sonst auf der Druckseite etwas Wasser aus den Zellen des Parenchyms herausgepresst und nach den Orten geringern Druckes verschoben wird; selbst passives Wachsthum ist keineswegs ausgeschlossen. Wird folglich die Belastung nach längerer Einwirkung plötzlich entfernt, so kann begreiflicher Weise die ursprüngliche Form nicht sofort wieder hergestellt werden; es tritt »elastische Nachwirkung« oder bleibende Formveränderung ein, allein die Frage, inwieweit auch die mechanischen Zellen hierbei in Betracht

Digitized by Google

kommen, bleibt unbeantwortet. Aus diesem Grunde lässt sich aus den von DETLEFSEN (S. 166) mitgetheilten Messungen trotz ihrer Genauigkeit keine bestimmte Folgerung ziehen.

Ich kann also nicht zugeben, dass die Methode, nach der unsere Messungen ausgeführt wurden, für die vorgesteckten Ziele ungenügend oder gar unbrauchbar sei. Noch weniger ist die vorwurfsvolle Bemerkung gerechtfertigt, welche an derselben Stelle (S. 149) gegen die neuere botanische Literatur gerichtet ist, weil man »die Versuche von SCHWENDENER, TH. VON WEINZIERL und AMBRONN sehr oft erwähnt« findet, während die Experimente von WERTHEIM und CHEVANDIER[1] unbeachtet bleiben. Wir hätten also wohl gar nicht nöthig gehabt, neue Messungen über die Elasticitätsverhältnisse der Skelet-Elemente anzustellen. Die betreffenden Constanten waren ja längst bestimmt und viel genauer, als dies nach unserer so abfällig beurtheilten Methode möglich war. »Versuche (so heisst es auf S. 147), die zur genauen Bestimmung dieser wichtigen Zahl (des Elasticitätsmoduls) dienen könnten, sind für Pflanzengewebe meines Wissens nur von WERTHEIM und CHEVANDIER gemacht worden.« Gegenüber solchen Auslassungen sei zunächst darauf hingewiesen, dass die specifische Dehnung innerhalb der Elasticitätsgrenze sich nach den genannten Autoren auf circa $^1/_{600}$ der Gesammtlänge berechnet,[2] während dieselbe beim Baste der Monocotylen, wie sich schon aus den ersten Versuchen, die ich hierüber anstellte, mit aller Bestimmtheit ergab, ein Vielfaches dieser Grösse beträgt. Ebenso stellte sich für das Tragvermögen der Cellulose ein erheblich höherer Werth heraus, als man nach den auf den äussern Querschnitt bezüglichen Angaben WERTHEIM's und anderer Autoren erwarten durfte. Es war also, wie ich glaube, wohl der Mühe werth, die directen Messungen auf eine grössere Anzahl von Objecten auszudehnen. Auch ist so viel ganz sicher, dass die auf diesem Wege erhaltenen Resultate für die Beurtheilung der mechanischen Leistungsfähigkeit des Bastes ungleich zuverlässiger sind, als alle nach DETLEFSEN durchgeführten Berechnungen auf Grund der WERTHEIM'schen Daten. Man denke doch nur an den anatomischen Bau eines beliebigen Laubholzes, an das gefäss- und parenchymreiche und darum mechanisch sehr schwache Frühjahrsholz, an die zahlreichen, für die Festigkeit wenig bedeutsamen Markstrahlen, die oft einen sehr erheblichen Theil des Querschnitts ausmachen, an den Stärkegehalt des Parenchyms, der doch nicht als Zellwand in Rechnung zu bringen ist, u. s. w., und

[1] WERTHEIM und CHEVANDIER, Untersuchungen über Elasticität. POGGEND. Ann. Ergänzungsband II. Übersetzt nach Comptes rendus, T. 23, p. 663 (1846).

[2] LAISSLE und SCHÜBLER (a. a. O. 3. Aufl. S. 11) nehmen für die bei Bauten zulässigen Spannungen nur eine Verlängerung oder Verkürzung von $^1/_{1000}$ an.

Digitized by Google

frage sich dann, ob Versuche, bei welchen der Holzkörper als homogene Substanz betrachtet wurde, eine geeignete Grundlage bilden, um hierauf die Bestimmung der Elasticitätsverhältnisse des Stereoms zu basiren. Das mag bei Coniferen wohl zulässig sein, aber viel weiter reicht die Brauchbarkeit der Methode nicht.[1] Oder sollte vielleicht Ambronn die Eigenschaften des Collenchyms auch auf diese Weise ermitteln?

3. Constructionsbedingungen für die Beanspruchung durch biegende Kräfte.

Ich komme jetzt zu den Fragen, welche die Anordnung der widerstandsfähigen Zellen im Querschnitt solcher Organe betreffen, deren Beanspruchung vorzugsweise durch biegende Kräfte stattfindet. Nach meiner Darstellung streben hier die sämmtlichen Elemente des mechanischen Systems, soweit sie nicht rein localen Zwecken dienen, nach der Peripherie, weil dadurch das Maass des Biegungsmomentes bei gleichem Materialaufwand gesteigert wird. Die bezeichneten Organe sind also mit Rücksicht auf biegende Kräfte möglichst rationell, nach meiner gewöhnlichen Bezeichnungsweise als biegungsfeste Träger gebaut. Diese Auffassung betrachtet nun Detlefsen als principiell unhaltbar, und er sucht seine Bedenken durch verschiedene Hinweise zu rechtfertigen. Zunächst wird der Zug- und Drucklinien gedacht, welche die durch Biegen bewirkten Maximal- und Minimalspannungen veranschaulichen.[2] Dann heisst es a. a. O. S. 180: »Nur dann ist ein Träger mit möglichst geringem Materialaufwande hergestellt, wenn die einzelnen Constructionstheile in der Richtung der eben erwähnten Maximal- und Minimalspannungen angeordnet sind. Da aber die Pflanzenorgane, die unter normalen Bedingungen grossen Biegungen unterworfen sind, als Träger nicht betrachtet werden dürfen, so kann es uns auch nicht Wunder nehmen, dass Schwendener in denselben eine Anordnung der Theile nach Richtung der genannten Curven mit Bestimmtheit nicht nachweisen konnte.«

Hierauf habe ich vor Allem zu bemerken, dass die erwähnten Zug- und Drucklinien doch nur für die Ebene, also beispielsweise für ein nach Art eines Brückenträgers construirtes Gitterwerk, aber nicht für den Raum zu so weit gehenden Schlussfolgerungen berechtigen. Denn sobald die von Detlefsen copirte Fig. 3 meiner Abhandlung

[1] Vergl. hierüber A. Zimmermann, Bot. Centralbl. Bd. XIX. Nr. 31 und 32. Auch verschiedene andere Punkte, zum Theil solche, die ich hier unberührt lasse, sind a. a. O. eingehend besprochen.

[2] S. Schwendener, das mechan. Princip, S. 30—39.

Digitized by Google

als Medianschnitt durch einen Rotationskörper gedacht wird, stellen die longitudinal verlaufenden Curventheile, wie leicht einzusehen, einen festen Hohlcylinder dar. Die dunklere Randschraffirung der Figur veranschaulicht alsdann gewissermaassen die nach der Oberfläche zu wachsende Festigkeit der Substanz; nur müssten die Linien, um der Wirklichkeit noch näher zu kommen, sich nach unten hin nicht bloss immer dichter zusammendrängen, sondern zugleich allmälig verstärken. Für eine solche Röhrenconstruction ist nun aber der weitmaschige innere Theil vollkommen überflüssig, weil jeder auf die Aussenfläche wirksame Druck oder Zug sich nach rechts und links durch die feste Wandung bis zur gegenüberliegenden Seite fortpflanzen kann und folglich eine directe Fortsetzung der zugehörigen Curve durch das hohle Innere nicht erheischt. Der von dem Hohlcylinder umschlossene Raum bleibt also leer; die Wandung allein genügt den mechanischen Anforderungen. Hiervon würde nun zwar das freie Ende unseres Curvensystems eine Ausnahme machen; allein dieser Theil — dem Scheitel der vegetabilischen Organe entsprechend — kommt für die in Rede stehenden Beziehungen nicht in Betracht.

Ganz dasselbe gilt natürlich auch von peripherischen Pfosten oder Rippen, die zwar keine continuirliche Röhre bilden, aber durch tangentiale Verbindungen zu einem hohlcylindrischen System gekoppelt sind. Hierbei ist ferner wohl zu beachten, dass solche Tangentialverbindungen mit Rücksicht auf die hier zu erörternde Inanspruchnahme nur geringen Anforderungen zu genügen haben, da ja die Kopfenden der Curven stets den relativ kleinsten Spannungen entsprechen.

Für cylindrische Organe ist damit der Einwand DETLEFSEN's vollständig entkräftet; es bedarf keiner weitern Erwägungen. Man könnte nun aber den nämlichen Einwand auch für blattartige Bildungen geltend machen, und zwar speciell für solche, welche nach Art der Balanciers oder der Brückenträger vorwiegend durch lothrechte Kräfte in Anspruch genommen sind. Hier ist indessen ein anderer Umstand maassgebend, dem für die oberirdischen Organe überhaupt und speciell für die Blätter eine hervorragende Bedeutung zukommt; es ist das intercalare Wachsthum. Dieses ist mit jeder Anordnung der Gewebetheile nach regelrecht verlaufenden Zug- und Drucklinien nur unter Bedingungen vereinbar, die in der Pflanze nicht verwirklicht sind.

Denken wir uns irgend ein jugendliches Organ, dessen Zellwände oder Gewebelamellen dem fraglichen Curvensystem augenblicklich genau entsprechen, so leuchtet ein, dass jede nachträgliche Streckung nothwendig eine Verzerrung desselben herbeiführen muss, sofern nicht gleichzeitig für eine fortwährende Resorption einzelner Gewebselemente und für Neubildung anderer an günstiger Stelle Sorge getragen ist.

Digitized by Google

Ein solcher Vorgang findet im Gebälke der Knochen thatsächlich statt und ist von JULIUS WOLFF noch neuerdings eingehend dargelegt worden.[1] In vegetabilischen Geweben dagegen kommen höchstens nachträgliche Membranverstärkungen an statisch gefährdeten Stellen, z. B. Bildung von Hornparenchym in den Lücken eines gesprengten Bastringes u. dergl. vor; aber eine fortwährende Umgestaltung und Neubildung von Geweben nach Maassgabe der jeweiligen Zug- und Druckspannungen ist nirgends beobachtet. Wäre sie möglich, so würde es z. B. für die Dicotylen mit Dickenwachsthum rationell sein, die inneren Jahrringe des Stammes durch einen in centrifugaler Richtung fortschreitenden Lösungsprocess in Glycose zu verwandeln und diese zum Aufbau neuer Jahrringe zu verwerthen. Ebenso würde im Verlaufe der äussern Dimensionsänderungen noch manche andere Transformation der inneren Architektur erwünscht sein, wenn sie nur ausführbar wäre. Allein die Pflanze steht hier vor unüberwindlichen Schranken, welche die strenge Einhaltung vorgezeichneter Curvensysteme von vorn herein ausschliessen.

Man darf sich übrigens nicht einbilden, dass dieser Verzicht für die Pflanze mit grossen Nachtheilen verbunden oder gar mit der Eigenschaft eines biegungsfesten Trägers unvereinbar sei, wie DETLEFSEN nach der oben citirten Bemerkung (S. 180) anzunehmen scheint. Schon ein Blick auf die grössern schmiedeeisernen Brückenträger, die doch mit möglichster Materialersparniss, aber nirgends nach dem Vorbilde der fraglichen Curvensysteme construirt sind, lehrt zur Genüge, dass von erheblichen Opfern hier gar nicht die Rede sein kann, sonst würde die Technik sie irgendwie vermieden haben. Das Charakteristische eines Trägers, wie er DETLEFSEN vorschwebt, liegt überhaupt nicht im geringen Materialaufwand, den seine Herstellung erfordert, sondern im Fehlen der Schubspannungen. In der Praxis braucht man jedoch die letztern keineswegs ganz auszuschliessen; es genügt vollständig, dass sie keinen nennenswerthen Mehraufwand erheischen.

Die Schlussfolgerung DETLEFSEN's, dass die Pflanzenorgane keine Träger seien, weil sie die verlangten Zug- und Drucklinien nicht zur Anschauung bringen, ist hiernach ganz ebenso unmotivirt, wie wenn sie gegen die besten einschlägigen Constructionen der neueren Technik, gegen Krahne, Gitterbrücken, eiserne Bogenträger der Eisenbahnhallen u. s. w. gerichtet wäre.

Auch der Hinweis auf das nahezu constante Vorhandensein einer Rindenschicht (S. 173), die doch der Festigkeit nachtheilig sei, und auf den eigenthümlichen Bau einzelner Palmenstämme und Palmen-

[1] Diese Sitzungsberichte, Jahrg. 1884, S. 475.

Digitized by Google

blätter (S. 172) verdient kaum eine ernste Berücksichtigung. Wie es kommt, dass das grüne assimilirende Parenchym (nebst dem zugehörigen farblosen Ableitungsgewebe) die mechanischen Elemente häufig etwas zurückdrängt, habe ich bereits früher dargelegt und bedarf hier keiner Wiederholung. Es kann also höchstens die chlorophyllfreie Rinde und auch diese nur insoweit, als sie noch lebensfrisch ist und nicht bloss als schützende Hülle fungirt, für die vorliegende Frage in Betracht kommen. Und selbst da sind diejenigen Fälle, wo die Rinde die einzig mögliche Längsverbindung isolirter Parenchymlamellen darstellt (wie z. B. für die Markstrahlen der Coniferen) oder wo sie bloss die absolut unentbehrliche wachsthumsfähige Hülle des Verdickungsringes bildet, ohne Weiteres verständlich. Oder sollte etwa das Cambium unmittelbar an die Oberfläche verlegt werden? — In andern Fällen, wo ein Verdickungsring nicht vorhanden ist, bietet die nahe liegende Annahme, dass das nach aussen gewendete Leptom der Gefässbündel in ernährungsphysiologischer Hinsicht vom Rindenparenchym abhängig sei, zum Mindesten eine theilweise Erklärung. Warum aber jene Bündel ihr Leptom auf der Aussenseite und ihr Hadrom auf der Innenseite entwickeln, statt umgekehrt, das habe ich hier nicht zu erörtern. — Wenn es endlich einzelne Vorkommnisse gibt, die sich einstweilen jeder Erklärung entziehen, so folgt daraus noch lange nicht, dass die von mir aufgestellten, sonst so klar hervortretenden mechanischen Principien keine Geltung haben; solche Vorkommnisse beweisen bloss, dass unsere Kenntniss der Stoffmetamorphosen und der durch sie beeinflussten Gestaltungsvorgänge noch lückenhaft ist. Wir können somit die Frage, ob denn auch hier anzunehmen sei, »irgend eine bis jetzt noch unbekannt gebliebene Function der farblosen Zellen erheische deren peripherische Lagerung«, ohne Bedenken mit Ja beantworten.

Was sodann den angeblich unvortheilhaften Bau der Palmenstämme betrifft, so ist mir keine Thatsache bekannt, auf welche diese Bezeichnung sich stützen könnte. Man kann höchstens sagen, dass viele Palmen auch an den markständigen Gefässbündeln zum Schutze des Leptoms verhältnissmässig starke Localbelege entwickeln, wobei voraussichtlich ähnliche Beziehungen obwalten, wie bei der Verstärkung der Schutzscheiden. Aber gegenüber den gewaltigen Bastmassen, welche im peripherischen Theil des Holzkörpers zusammengedrängt sind, verschwinden diese Leptombelege, und ebenso kann von einer nennenswerthen Steigerung der Widerstandsfähigkeit durch die weichere Rinde und die sie durchziehenden Baststränge, auf welche DETLEFSEN hinweist, im Ernste doch gar nicht die Rede sein.[1]

[1] Dass die Widerstandsfähigkeit des Rindenparenchyms gegen Zug eine sehr geringe ist und deshalb vernachlässigt werden darf, kann nicht bestritten werden.

Digitized by Google

Mit etwas grösserer Berechtigung kann von den Blättern einiger Palmen gesagt werden, dass sie für die Inanspruchnahme auf Biegung irrationell construirt seien. Voraussichtlich gehören dahin aber nur diejenigen Formen, die sich schon äusserlich durch grössere Zartheit oder Schlaffheit und anatomisch durch isolirte innere Baststränge auszeichnen. Blätter mit ausschliesslich peripherischen Bastrippen dagegen sind im Allgemeinen als biegungsfeste Constructionen zu deuten, weil die Bastsicheln der Gefässbündel bis zu einer Mächtigkeit von zwei bis drei oder selbst vier Zellen zweifellos nur als Localbelege des Leptoms gelten können. Dass solche Belege nebenbei auch mehr oder weniger zur Festigkeit des ganzen Organs beitragen und folglich als »innere Träger« fungiren, versteht sich von selbst; allein ihre örtliche Beziehung zum Leptom ist einzig und allein durch das Schutzbedürfniss des letztern bedingt.

Welche Mächtigkeit dergleichen Belege erreichen können, wenn sie in erster Linie wirklich bloss local-mechanischen Zwecken dienen, lässt sich nur auf vergleichend-anatomischem Wege und nur für bestimmte Gewächse annähernd ermitteln. Es ist sicher, dass Arten derselben Gattung sich hierin verschieden verhalten. Bei den einen genügen schwache Belege aus ein bis zwei Zellschichten, während sie bei andern — vielleicht in Folge von klimatischen und Standortsverschiedenheiten — die doppelte Stärke erreichen. Als Maassstab für die maximale Mächtigkeit in Fällen, wo die local-mechanische Bedeutung des Bastes keinem Zweifel unterliegt, seien hier bloss die Leptombelege bei *Tilia* und in andern bastreichen Rinden vieljähriger dicotyler Baumstämme, namentlich auch bei Schling- und Kletterpflanzen (*Bignonia, Vitis* u. s. w.) erwähnt. Von Erhöhung der Gesammtfestigkeit durch die rindenständigen Bastbündel kann in diesen Fällen um so weniger die Rede sein, je dicker und widerstandsfähiger der zu betrachtende Stamm.

Die Gruppirung der Palmenblätter in rationell und irrationell gebaute — nämlich mit Rücksicht auf biegende Kräfte — ist demnach nicht so leicht durchführbar, wie es auf den ersten Blick scheinen möchte. Es bedarf hierzu viel ausgedehnterer Untersuchungen, als sie bis jetzt angestellt sind und es wird dabei auch die so häufig vorkommende Faltung der Spreitentheile mit zu berücksichtigen sein.

Was sodann die in der Rinde zerstreuten Bastbündel anbelangt, so ist ja das Maass ihres Biegungsmomentes durch die Querschnittsgrösse, multiplicirt mit dem Quadrat ihres Abstandes von der Neutralen, ziffermässig bestimmt. Dieses Product beträgt beispielsweise in zwei speciellen Fällen, die ich nach den Abbildungen Mohl's berechnet habe, noch nicht 2 Procent des entsprechenden Maasses für die grossen peripherischen Bastbelege. Das entspricht ungefähr dem Aufwand für das Geländer einer grössern Eisenbahnbrücke, verglichen mit demjenigen für die Gurtungen. Detlefsen könnte also mit gleichem Recht behaupten, dass ein solches Geländer »zur Erhöhung der Steifheit nicht unwesentlich beitragen muss«.

Digitized by Google

4. Bedeutung der Mestombelege.

DETLEFSEN stellt sich nun freilich in den vorstehend berührten Fragen auf einen ganz andern Standpunkt, den wir hier noch speziell zu erörtern haben; er verneint rundweg die local-mechanische Bedeutung der Leptombelege. Seine eigene Ansicht ist auf S. 173 in folgenden Worten ausgesprochen: »Sollen also Stränge aus Sklerenchym dazu dienen, schädliche Ausdehnungen des Cambiforms der Fibrovasalstränge zu verhüten, so müssen beide sich nicht aufsuchen, sondern im Gegentheil fliehen; der Bast muss an der Peripherie, die Fibrovasalstränge müssen möglichst nahe dem Centrum des Organs liegen. — Dass die Sklerenchymmassen so ganz gewöhnlich in unmittelbarer Nähe der Fibrovasalstränge vorkommen, scheint vielmehr einen ganz andern Grund zu haben. Wenn eine Zellwand ein so bedeutendes und rasches Dickenwachsthum besitzt, bedarf sie natürlich reichlicher Zufuhr von Nahrungstoffen; diese findet sie am reichlichsten in unmittelbarer Nähe der Gewebe, in denen diese Stoffe transportirt werden.«

Diese letztere Auffassung zeigt wieder einmal recht deutlich, auf welche Irrwege man gelangen kann, wenn man ohne Rücksichtnahme auf die vergleichende Anatomie Conjecturalphysiologie treibt. Wir wissen doch, dass das Leptom vorzugsweise eiweissartige Stoffe führt, welche bei der Verdickung der Bastzellen sich nicht direct betheiligen. Wie kommt es nun, dass trotzdem so viele Mestombündel, die in einem homogenen Markparenchym zerstreut sind, gerade auf der Aussenseite des Leptoms die in Rede stehenden Belege entwickeln? Und sollen vielleicht auch die peripherischen Bastgurtungen, welche bei den Cyperaceen, Juncaceen etc. die biegungsfeste Architektur der Stengel- und Blattorgane bilden, nach Lage und Stärke durch zufällig vorhandene Vorräthe von Nährstoffen bedingt sein? Solche Vorstellungen sind doch wohl zu absonderlich, als dass es nöthig wäre, länger dabei zu verweilen.

Was sodann die Ansicht betrifft, dass sich Bast und Leptom eigentlich fliehen müssten, statt sich gegenseitig aufzusuchen, so kann es nicht Aufgabe der inductiven Forschung sein, der Natur vorzuschreiben, wie sie es machen sollte. Wir müssen die Dinge nehmen wie sie sind, und so ist denn auch an der Thatsache, dass »überhaupt, wenn ich mich so ausdrücken darf, eine gewisse Anziehung zwischen Mestom und Bast«[1] besteht, nichts abzumarkten. Ich habe hierfür schon an der angegebenen Stelle genügende Belege vorgebracht und könnte heute noch manches weitere Beispiel hinzufügen; doch halte ich das für

[1] Mechan. Princip, S. 135.

Digitized by Google

überflüssig, denn die anatomische Thatsache steht auch ohnedem fest. Dagegen betrachte ich selbst die Frage nach der physiologischen Bedeutung solcher Belege keineswegs als endgültig erledigt. Ich habe neuerdings in meiner Abhandlung über die Schutzscheiden[1] auf Verstärkungen derselben hingewiesen, welche zu den Bastbelegen der Gefässbündel in Stengeln und Blättern eine beachtenswerthe mechanische Parallele bilden, und gleichzeitig auch die Beziehungen aufgedeckt, welche zwischen dem Auftreten und der Mächtigkeit jener Verstärkungen auf der einen und den mit klimatischen und Standortsverhältnissen zusammenhängenden Turgescenzänderungen auf der andern Seite bestehen. Die Vermuthung liegt nun nahe, dass ähnliche Beziehungen auch für die genannten Mestombelege maassgebend sein möchten; es muss jedoch weitern Untersuchungen vorbehalten bleiben, die Richtigkeit oder Unrichtigkeit dieser Vermuthung darzulegen und vielleicht auch ganz neue Gesichtspunkte zur Geltung zu bringen. Darüber jedoch, dass die fraglichen Belege in irgend einer Weise zum Schutze des Mestoms dienen, also eine local-mechanische Rolle spielen, kann aus vergleichend-anatomischen Gründen meines Erachtens heute schon kein Zweifel mehr obwalten. Diese Annahme schliesst natürlich keineswegs aus, dass die Localbelege unter Umständen auch die Gesammtfestigkeit merklich vergrössern. Sobald jedoch ihre Querschnittssummen gegenüber den Constructionstheilen des biegungsfesten Skelets verschwindend klein geworden, wie z. B. bei den alten Stämmen der Laub- und Nadelhölzer, tritt ihr eigentlicher und jetzt auch einziger Zweck klar hervor.

Noch schwieriger ist die Deutung der isolirten markständigen Bastbündel. Dieselben kommen jedoch, im Ganzen genommen, so selten vor, dass es einstweilen gerathen erscheint, unser Augenmerk auf näher liegende Dinge zu richten. Dass sie bloss den Nährstoffen nachgehen und also gewissermaassen ein parasitisches Dasein führen sollen, wird wohl auch hier wenig Anklang finden.

5. Biegungsfest oder biegungsfähig?

Treten wir jetzt einer weitern positiven Aufstellung Detlefsen's näher, welche ebenfalls in den wichtigsten Punkten mit meiner Darlegung in diametralem Widerspruch steht. Er sagt a. a. O. S. 169: »Es bedarf nur geringen Nachdenkens, um zu erkennen, dass die mechanische Leistungsfähigkeit elastischer Pflanzentheile weit häufiger darin besteht, dass sie bei mehr oder minder bedeutender Steifheit fähig

[1] Abhandlungen der K. Akad. d. Wiss. zu Berlin, Jahrgang 1882.

Digitized by Google

sind, bedeutende Biegungen ohne Schaden zu ertragen, als dass sie durch die Beschaffenheit und Anordnung des Materials, aus dem sie bestehen, solche Biegungen von vorn herein unmöglich machen.« Der Gegensatz zwischen unsern Auffassungen ist nun zwar mit diesen Worten keineswegs ganz richtig bezeichnet, denn es ist ja nicht davon die Rede, Biegungen unmöglich zu machen. Aus den nun folgenden Erörterungen DETLEFSEN's geht aber doch klar hervor, dass er auch für oberirdische Organe (Stengel, Blüthenschäfte etc.) die Herstellung einer bedeutenden Biegungsfähigkeit geradezu als Zweck der Construction betrachtet. Darum soll es eben ganz unzulässig sein, den Bau eines Pflanzenstengels mit einer schmiedeeisernen Brückenconstruction zu vergleichen. Denn, so argumentirt unser Autor weiter, wären die Constructionsprincipien die nämlichen, so müssten die Bastgurtungen, da sie im Vergleich mit Eisen die zehnfache Dehnbarkeit besitzen, auch einen zehnmal so grossen Abstand von der neutralen Faserschicht erhalten; die pflanzlichen Träger würden sich folglich mit einem viel geringeren Materialaufwand herstellen lassen, als eine dasselbe leistende Construction aus Schmiedeeisen (a. a. O. S. 171).

Diese Schlussfolgerung ist nun aber gänzlich unhaltbar. Denken wir uns z. B. den hohlen Cylinder als gegebenes System, so ist einleuchtend, dass derselbe bei zehnfachem Durchmesser auch ungefähr die zehnfache Wanddicke besitzen muss, um gegen Einknicken geschützt zu sein. Die Querschnittsfläche und mit ihr der Materialaufwand steigt daher auf das Hundertfache. Andererseits steht fest, dass das richtige Verhältniss zwischen Wanddicke und Röhrendurchmesser für jede Construction von der Dehnbarkeit des Materials abhängig ist. Eine Röhre aus Bast erfordert eine relativ dickere Wand, als eine solche aus Schmiedeeisen, und darum kann von einer Reduction der Querschnittsfläche, wenn statt Eisen Bast zu ihrer Herstellung verwendet wird, selbstverständlich nicht die Rede sein. Nach dieser Seite basiren also die Erörterungen DETLEFSEN's auf entschieden unrichtigen Vorstellungen.

Andererseits kann aber auch der Hinweis auf die Thatsache, dass die vegetabilischen Organe ungleich stärkere Biegungen zeigen, als eine eiserne Brücke, nicht als Beleg dafür dienen, dass die Biegungsfähigkeit bei jenen der eigentliche Zweck der Construction sei. Denn wäre eine solche Logik zwingend, so müsste der Vergleich eiserner Brücken mit steinernen zu dem analogen Ergebniss führen, dass die grössere Durchbiegung der erstern das vom Ingenieur erstrebte Ziel sei. Ich kann mich unter solchen Umständen darauf beschränken, die Worte DETLEFSEN's: »Man beachte nur ein im Winde bewegtes

Digitized by Google

Kornfeld oder einen Scirpushalm; wo ist da die Ähnlichkeit mit einem Krahn oder einer Gitterbrücke?« dem Leser zur Erwägung anheimzugeben.

Es ist ferner ebensowenig erwiesen, dass die in Wirklichkeit sich vollziehenden Biegungen der vegetabilischen Organe für das Leben derselben unbedingt nothwendig oder auch nur förderlich sind. Wir sehen im Gegentheil, dass die Pflanzen unserer Gewächshäuser bei richtiger Pflege auch ohne solche Biegungen vortrefflich gedeihen.

Für die Beantwortung der Frage, ob ein Organ nach meiner Bezeichnung biegungsfest oder aber möglichst biegungsfähig construirt sei, können hiernach nur die Sätze der Mechanik eine sichere Grundlage bieten. Diesen Sätzen zufolge wird die Biegungsfähigkeit gesteigert 1. bei gegebener Anordnung durch grössere Dehnbarkeit des Materials und 2. bei gegebenem Material durch Verlegung desselben in die neutrale Axe und deren unmittelbare Nähe. Warum nun die Pflanze für das mechanische System keine metallähnliche Substanz, sondern eine Celluloseart verwendet, scheint mir eine ziemlich müssige Frage zu sein. Unter den Producten des Thier- und Pflanzenreiches ist diese Bastcellulose immerhin eine der besten Substanzen, die es gibt, und auch eine der am wenigsten dehnbaren.[1] Sie findet sich in den dicksten Stämmen und Wurzeln der Dicotylen, wo es doch auf Biegungsfähigkeit nicht abgesehen sein kann, als jährliche Neubildung, ebenso bei Kletterpflanzen mit Dickenwachsthum, auch wenn sie unbeweglich am Felsen haften, in Dornen, Früchten u. s. w., wo Krümmungen absolut ausgeschlossen sind. Es scheint hiernach, dass die Pflanze ein wesentlich abweichendes Material nicht zu erzeugen vermag, es sei denn durch Verkieselungen und andere Incrustationen, die aber in grossem Maassstab nirgends durchgeführt sind.

Betrachten wir also das Material als gegeben. Dann erhellt aus dem vorhin Gesagten, dass Organe mit peripherischer Lagerung der mechanischen Zellen nie und nimmer als Constructionen von hoher Biegungsfähigkeit bezeichnet werden können. Diese letztere Eigenschaft ist hier im Gegentheil auf das geringste Maass reducirt, das überhaupt bei einem bestimmten Materialaufwand erreichbar ist.

Auch die in meiner Abhandlung (S. 65) kurz besprochene Eigenthümlichkeit der Bambusen, bei welchen bekanntlich die grossen innenseitigen Bastbelege durch Parenchymlamellen vom Mestom getrennt sind, sucht Detlefsen ohne genügenden Grund als eine Einrichtung

[1] Über die Dehnbarkeit der Hornsubstanz und des Chitins sind mir nähere Angaben nicht bekannt; doch ist zweifellos, dass sie der Cellulose viel näher stehen als den Metallen. Andererseits ist bis dahin eine geringere Dehnbarkeit als 0.5 Procent für keine Celluloseart nachgewiesen.

Digitized by Google

zur Steigerung der Biegungsfähigkeit zu deuten (S. 182). Dieser Einschiebung von Parenchym sollen nämlich die Baststränge die Fähigkeit verdanken, den longitudinalen Schubspannungen nachzugeben und sich folglich beim Biegen in der Längsrichtung zu verschieben. Allein abgesehen davon, dass damit jene stets vorhandenen »Zugänge«, welche von den eingeschobenen Parenchymlamellen zum Mestom führen, unerklärt bleiben, steht die Annahme einer solchen Verschiebung mit der Wirklichkeit im Widerspruch. Denn jede Querschnittsscheibe eines Pflanzenstengels behält ihre zur Axe senkrechte Lage bei den gewöhnlich vorkommenden Biegungen bei. Eine Nadel, die man quer durch einen Scirpushalm, einen Blüthenschaft u. dergl. schiebt, steht mit dem frei vorstehenden Theil im gebogenen wie im nicht gebogenen Zustande rechtwinklig zur Längsrichtung, während sie in Folge des vermeintlichen Longitudinalschubes sich schief stellen müsste. Man sieht auch leicht ein, dass gerade bei *Bambusa* derartige Schubwirkungen schon deshalb unmöglich sind, weil die jedesmalige Zug- und Druckseite nicht bloss durch die innern Bündel, sondern auch durch den festen peripherischen Theil des mechanischen Systems mit einander in Verbindung stehen.

Der von DETLEFSEN (S. 182 Anmerkung) citirten Stelle in FALKENBERG's »Vergleich. Untersuchungen«, welche gegen meine Deutung der vorhin erwähnten »Zugänge« sprechen soll, vermag ich irgend eine Beweiskraft nicht beizumessen. Es heisst daselbst S. 159: »Mit dieser Anschauung ist aber das zeitweise massenhafte Auftreten von Stärke in den Bastzellen der Strangscheiden im Rhizom mancher Cyperaceen unvereinbar.« Diese Bemerkung ist zunächst, wie der Zusammenhang lehrt, gegen meine Angabe gerichtet, dass die Bastzellen mit ihrer Ausbildung zu mechanischen Zellen die Fähigkeit, ernährungsphysiologischen Zwecken zu dienen, verloren haben. Man begreift jedoch, dass einzelne Ausnahmen die Richtigkeit der von mir aufgestellten Regel nicht beeinträchtigen können. Und wenn nun DETLEFSEN diese nämliche Bemerkung gegen die Deutung der »Zugänge« als Verkehrswege ins Feld führt, so weiss ich eigentlich nicht, auf welchen Punkt in der Bemerkung FALKENBERG's eine solche Taktik sich stützt. Dass dickwandige Gewebe, auch wenn sie Stärke führen, die Leitung wässeriger Lösungen erschweren, ist doch nicht zu bestreiten. Wo sie vorkommen, sorgt denn auch die Pflanze in verschiedener Weise für die nöthigen Erleichterungen, bald durch zahlreiche Poren in den Wandungen, bald in noch wirksamerer Art durch besondere dünnwandige »Zugänge«, die dann natürlich ebensogut auch als Ausgänge fungiren können. Das letztere ist z. B. der Fall, wenn Wasser aus den Gefässen in das benachbarte Parenchym übergeht. Ich habe auf solche

Digitized by Google

zartwandige Durchgangsstellen, welche die Continuität einer festen Hülle unterbrechen, neuerdings auch in meiner Abhandlung über die Schutzscheiden hingewiesen; nur handelt es sich hier nicht um Bastbelege, welche mit Unterbrechungen bedacht sind, sondern um dickwandiges, mehr oder weniger gestrecktes Parenchym. Die physiologische Bedeutung der Durchgänge ist aber stets dieselbe und es kann heute, gestützt auf eine ganze Reihe von Thatsachen, mit aller Bestimmtheit behauptet werden, dass sie ernährungsphysiologischen Zwecken dienen.

6. Verschiedene Bemerkungen.

Es erübrigt jetzt noch, im Anschlusse an das Vorstehende einige Kleinigkeiten zu berühren, welche im Grunde weder für noch gegen meine Darstellung ins Gewicht fallen, die ich aber doch nicht stillschweigend übergehen kann, weil sie von DETLEFSEN als ebensoviele Unrichtigkeiten behandelt werden.

Nach S. 156 (Anmerkung) soll ich übersehen haben, dass die neutrale Axe nicht immer durch die Schwerpunkte der Querschnittsflächen geht. Erwägt man jedoch, dass ich bloss »einige Sätze aus der Festigkeitslehre« mittheilen wollte und dass die letztere auch in viel umfangreicheren Darstellungen nur für homogene Träger durchgeführt ist, so wird man begreifen, dass ich meinerseits keine Veranlassung hatte, diesen Rahmen zu überschreiten.

Auf S. 159 wird ein einzelner Satz, den ich in meiner Abhandlung (S. 23) glaubte einschalten zu sollen, einer Kritik unterzogen. Zur Aufklärung bemerke ich, dass jener Satz sich nicht auf die Zahlen für das Maass des Biegungsmomentes, sondern auf die Ableitung der in der mittleren Columne meiner Tabelle enthaltenen Formeln bezieht. Diese Formeln sind nämlich nicht direct den Lehrbüchern entlehnt, sondern von mir in die vorliegende algebraische Form erst transformirt worden. Zur Ausführung dieser Transformation errichtete ich vom Centrum der regulären Polygone aus Perpendikel auf eine der Seiten und führte sodann mit Hülfe des pythagoräischen Lehrsatzes statt der Höhe des betreffenden Dreiecks den Radius des umschriebenen Kreises ein. Ich hatte ursprünglich diese Transformationen (mit verschiedenen andern) in das Manuscript aufgenommen, überzeugte mich aber später, dass es eine missliche Sache ist, einzelne Formeln abzuleiten und andere nicht, und habe sie deshalb gestrichen. Übrigens will ich gerne einräumen, dass ich auch den fraglichen Satz nebst den abgeleiteten Formeln ohne Beeinträchtigung der Gesammtdarstellung hätte weglassen können.

Digitized by Google

Was sodann die in der Tabelle enthaltene Ziffer für den dreikantigen Balken betrifft, so hat sich allerdings in die Berechnung derselben ein Fehler eingeschlichen; allein derselbe Fehler erscheint auch in der Zahl für den hohlen dreikantigen Balken, so dass das Verhältniss der Biegungsmomente (11:61), von dem an der citirten Stelle (S. 23) allein die Rede ist, dadurch nicht beeinflusst wird.

Dagegen ist die Zahl 1500 Millionen für die Blatt- und Blüthenstiele der Aroideen, welche DETLEFSEN (S. 163) ebenfalls als »falsch« bezeichnet, für die angegebenen Praemissen richtig berechnet. Die seinige differirt um 8 Procent und ist zweifellos genauer; aber wozu diese Genauigkeit? Es wird dadurch kein Wort in meiner Darstellung geändert.

Auf S. 162 findet sich ferner eine Anmerkung betreffend die Faltung der cuticularisirten Streifen in den Radialwänden der Schutzscheiden. Meine auf sorgfältige Untersuchungen gestützten Angaben hierüber[1] werden von DETLEFSEN mit den Worten abgefertigt: »doch beweisen diese Ergebnisse gar nichts, denn die Bedingungen, unter denen sie eintreten, sind von den in der lebenden Wurzel vorhandenen durchaus verschieden.« Leider fehlt jede Andeutung darüber, wie derselbe zu dieser Erkenntniss gekommen. Einstweilen wird daher die Annahme gestattet sein, dass er die Frage gar nicht ordentlich untersucht hat.

Den Vorwurf endlich, welcher auf derselben Seite erhoben wird, dass ich mit dem gemeinsamen Namen Stereom Gewebe bezeichne, »die auch in ihren physikalischen Eigenschaften sehr verschieden sind und eigentlich nur darin übereinstimmen, dass sie aus verhältnismässig langgestreckten, engen und dickwandigen Zellen bestehen,« könnte ich füglich, ohne ein Wort darüber zu verlieren, dem Urtheil des Lesers anheimgeben, da die hier in Betracht kommenden Zellformen allbekannt sind. Ich will auch nur bemerken, dass zu den Eigenschaften des Stereoms jedenfalls noch die Anordnung der kleinsten Theilchen und die damit zusammenhängende Festigkeit gehören. Auch die Zuschärfung oder Zuspitzung der specifisch mechanischen Zellen darf nicht übergangen werden, da sie in der Regel das einzige Mittel ist, eine nachträgliche Verlängerung derselben durch gleitendes Wachsthum, d. h. durch Vorbeischieben der Enden an benachbarten Zellen zu ermöglichen. Entbehrlich wird dieses Mittel nur da, wo die Streckung der Organe nach Anlegung des Stereoms ein so hohes Maass erreicht, dass die erforderliche Länge auch ohne Gleiten zu Stande kommt. Doch ist dies bekanntlich ein seltener Ausnahmefall.

[1] Die Schutzscheiden und ihre Verstärkungen, S. 44.

Digitized by Google

7. Träger von gleichem Widerstande.

Zum Schlusse noch einige Bemerkungen bezüglich der Träger von gleichem Widerstande. Für einen Autor, welcher die oberirdischen Organe der Pflanzen nicht als Träger gelten lassen will, ist es nur consequent, wenn er auch keine Träger von gleichem Widerstande anerkennt. Auf diesem Standpunkte steht Detlefsen. Aber alle die Einwände, die er gegen meine Darstellung erhebt, erhalten bloss dadurch eine scheinbare Berechtigung, dass er meine Träger von gleichem Widerstande im Sinne der reinen Mathematik auffasst und demgemäss jede kleine Abweichung, jede Ungenauigkeit in meinen Rechnungen als einen schlagenden Gegenbeweis betrachtet.

Zu einer so rigorosen Auffassung glaube ich indessen keine Veranlassung gegeben zu haben. Die Worte »annähernd«, »nahezu« »ungefähr« finden sich in dem betreffenden Capitel meiner Schrift häufig genug, um keinen Zweifel darüber aufkommen zu lassen, dass mir nirgends das mathematische Ideal eines Körpers von gleichem Widerstande, sondern stets nur Annäherungen an dasselbe vorgeschwebt haben. Aber immerhin erreichen diese Annäherungen, wie ich glaube, ungefähr denselben Grad, welchen der Techniker den Constructionstheilen der Maschinen, den Balanciers, Hebeln, Kurbelstangen etc. zu geben für nöthig erachtet. Nun ist leicht einzusehen, dass die Herstellung doppelt gekrümmter Flächen, selbst wenn es Rotationsflächen sind, in manchen Fällen mit Schwierigkeiten verknüpft ist, die in der Praxis besser umgangen werden. Der Techniker wird sich also erlauben, statt eines Rotationskörpers, wie er im Umriss auf S. 97 meiner Abhandlung abgebildet ist, einen abgestumpften Kegel zu construiren, der möglichst wenig von jenem Körper abweicht. Die Seitenlinie eines solchen Kegels ist nun mit hinlänglicher Genauigkeit gegeben durch die Tangente, welche in mittlerer Höhe an den Umriss des Rotationskörpers gelegt wird, und die Neigung dieser Tangente zur Axe ist nach bekannten Formeln leicht bestimmbar. Der Mehraufwand von Material, den die Herstellung des so bestimmten Kegels verursacht, beläuft sich allerdings auf mehrere Procent des Gesammtgewichts; allein diese scheinbare Verschwendung wird durch die erzielten Vortheile mehr als ausgeglichen.

So verhält es sich in der Praxis bei den verschiedenartigsten Trägern, welche nach dem Princip der Körper von gleichem Widerstande construirt zu werden pflegen; sie stellen sämmtlich bloss Annäherungen dar, die zuweilen recht erheblich von der idealen Form abweichen. Eine Ausnahme bilden höchstens diejenigen, welche nach möglichst genauen Modellen durch den Guss hergestellt wurden.

Digitized by Google

Wenn nun DETLEFSEN solche Träger, wie sie in der Architektur, im Maschinenbau u. s. w. tausendfach zur Ausführung gelangen, in derselben Weise auf die Probe stellen wollte, wie er dies nach S. 186 mit Getreidehalmen gethan hat, so würde voraussichtlich keiner eine solche Probe bestehen. Es würde sich vielmehr herausstellen, dass jeder an irgend einer Stelle zuerst eine bleibende Veränderung erfährt. Bei Trägern, welche aus einzelnen verbundenen Theilen oder aus verschiedenartigem Material zusammengesetzt sind, treten solche Veränderungen schon ein, bevor das sonst zulässige Maximum der Zug- oder Druckspannung erreicht ist. Man betrachte z. B. hölzerne Gitterbrücken, etwa solche nach HOWE's System (Gitterwerke aus Holz mit schmiedeeisernen Zugstangen) und man wird sich leicht überzeugen, dass dieselben zum Theil recht beträchtliche bleibende Veränderungen erlitten haben. Und doch sind diese Brücken mit wissenschaftlichem Verständniss nach dem Princip des geringsten Materialaufwandes construirt.

Wenn dergleichen am dürren Holze geschieht, darf man auch an das grüne nicht allzu rigorose Anforderungen stellen. Nach meinem Dafürhalten haben die Getreidehalme, deren Krümmungen und bleibende Veränderungen DETLEFSEN in seiner Fig. 11 (S. 186) zur Anschauung bringt, die ihnen zugedachte Prüfung in ganz befriedigender Weise bestanden; ein viel günstigeres Ergebniss war mit Rücksicht auf das bekannte eigenthümliche Verhalten der Knoten gar nicht zu erwarten.

Übrigens halte ich jede Prüfungsmethode, welche auf die Überschreitung der Elasticitätsgrenze basirt ist, schon deshalb für verwerflich, weil sie für die in Frage kommenden Objecte, es mögen natürliche oder künstliche sein, im Allgemeinen nur negative Resultate ergeben kann. Aus diesem Grunde scheint mir bei vegetabilischen Trägern auch heute noch die Abnahme der Querschnittsflächen von unten nach oben, sodann die Krümmung der elastischen Linie in Folge der Einwirkung seitlicher Kräfte die besten Anhaltspunkte zu liefern. Ich bin aber weit entfernt zu behaupten, dass sie mathematisch strengen Anforderungen genügen.

Sehen wir uns die gegebenen oder doch leicht bestimmbaren Grössen etwas näher an. Der Krümmungsradius R eines belasteten Trägers lässt sich bei gegebener Inanspruchnahme für jeden beliebig gewählten Querschnitt bestimmen nach der Formel

$$R = \frac{WE}{M}$$

wobei W das Maass des Biegungsmomentes für den gewählten Querschnitt, E das Elasticitätsmodul und M das von der Belastung ab-

Digitized by Google

hängige Kraftmoment bezeichnet. Nach dieser Formel sind die in meiner Abhandlung (S. 97) mitgetheilten Ziffern für die Krümmungsradien des eben daselbst abgebildeten vollen Trägers berechnet, allerdings unter der bestimmten Voraussetzung, dass die Krümmung eine geringe sei und durch ein am Ende angebrachtes Gewicht bewirkt werde. Die Rechnung ist übrigens auch für jede andere Belastung ausführbar.

Es sei mir gestattet, die erhaltenen Ziffern, die jedoch für die Krümmungsradien nur Verhältnisszahlen sind, hier nochmals zusammenzustellen und ein paar neue hinzuzufügen. Die Decimalen sind weggelassen.

Abstand von der Basis	0	30	60	100	120	140	150
Krümmungsradius...	62	57	53	45	39	31	26

Die Curve, welche diesen Ziffern entspricht, ist nun zwar durch die bezeichnete Abnahme der Krümmungsradien nach der Spitze hin keineswegs genau bestimmt, aber doch immerhin bis zu einem gewissen Grade charakterisirt. Auch ist einleuchtend, dass diese Charakteristik nicht bloss für volle Träger mit kreisförmigem Querschnitt, sondern auch für hohle oder beliebig zusammengesetzte Geltung haben muss. Denn nimmt man z. B. für einen hohlen Träger von gleichem Widerstande das Verhältniss des kleineren zum grösseren Radius constant an, so ändert sich auch der algebraische Werth des Biegungsmomentes nur um einen constanten Factor, der in unserer Frage nicht in Betracht kommt. Ebenso führen auch andere zulässige Annahmen in der Hauptsache zu demselben Ergebniss.

Selbst Träger von constanter Breite, aber mit parabolischen Seitenflächen, deren Übereinstimmung mit den vorhin genannten sich also nur auf die variable Höhe beschränkt, zeigen eine ähnliche Abnahme der Krümmungsradien nach dem freien Ende hin. Die folgenden Ziffern, die sich auf einen solchen parabolischen Träger von 160 Einheiten Länge bei gleicher Belastungsweise beziehen, mögen hierfür als Belege dienen.[1]

---

[1] Der Querschnitt des Trägers ist hier ein Rechteck, dessen veränderliche Höhe h gegeben ist durch $h = \sqrt{\frac{x}{l}}\, H$, wobei x den Abstand vom Scheitel der Parabel, l die Länge des Trägers und H die Höhe desselben an der Basis bezeichnet. Die Grösse W ist $= \frac{bh^3}{12} = \frac{bx}{12l} \cdot \sqrt{\frac{x}{l}}$.

Übrigens lässt sich diese Abnahme der Krümmungsradien nach der Spitze hin für ganz beliebige Krümmungen auch ohne höhere Mathematik durch folgende Erwägungen darthun. Es sei die Dicke (Höhe) eines Trägers von gleichem Widerstande zunächst der Basis = 2, der Krümmungsradius seiner neutralen Linie im belasteten Zustande = 1000 Längeneinheiten. Dann ist der Radius der convexen Seite um eine Einheit länger, somit = 1001 Einheiten, und derjenige der concaven um eine Einheit

Digitized by Google

Abstand von der Basis	0	40	80	120	140
Krümmungsradius	50	43	35	25	18

Bis dahin befinden wir uns also auf sicherem Boden. Die weitern Berechnungen dagegen, welche die directe Bestimmung der Ordinaten für die verschiedenen Abscissenlängen zum Ziele haben, sind allerdings nach Formeln ausgeführt, die keine genauen Ziffern ergeben konnten. Das hat auch seinen guten Grund: ich kannte eben damals keine bessern. Deshalb nahm ich meine Zuflucht zu einem Nothbehelf, der darin bestand, dass ich über einander gestellte, immer dünner werdende Cylinderstücke, die man etwa mit den Theilen eines ausgezogenen Fernrohrs vergleichen könnte, in ihrer Gesammtheit als abgestumpften Kegel oder richtiger als nahezu kegelförmigen Träger von gleichem Widerstande betrachtete. Das ist allerdings kein genaues, aber für Probleme, wie das vorliegende, doch immer noch brauchbares Verfahren.

Man darf nämlich nicht übersehen, dass ich die mit den Rechnungen zu vergleichenden Beobachtungen an Halmstücken von nur 60—70^{mm} Länge (nicht 300^{mm}, wie DETLEFSEN sagt) angestellt habe und dass die mitgetheilten Daten zwischen den beiden Enden solcher Stücke nur einen Dickenunterschied von wenigen Hunderttheilen eines Millimeters ergaben. Sollte es da nicht erlaubt sein, eine so geringfügige Differenz zu vernachlässigen?

Übrigens unterliegt es kaum einem Zweifel, dass eine viel genauere Berechnung, als die meinige ist, in der Hauptsache übereinstimmende Senkungen ergeben wird. Eine absolute Übereinstimmung zwischen den berechneten und den beobachteten Grössen ist jedoch von vorne herein nicht zu erwarten.[1]

DETLEFSEN spricht sodann auf S. 184 sein Befremden darüber aus, dass ich immer schlechthin von Trägern gleichen Widerstandes rede, während doch dieser Ausdruck völlig nichtssagend sei, sobald nicht die Wirkungsweise der biegenden Kraft dabei angegeben werde. Das

---

kürzer oder = 999 Einheiten. Die convexe Seite ist folglich in demselben Verhältniss länger als die Neutrale und demnach um $^1/_{1000}$ gedehnt, die concave um ebensoviel zusammengedrückt. Beträgt nun die Dicke (Höhe) dieses Trägers am vorderen Ende bloss 1 Einheit, so würde hier bei gleichem Krümmungsradius die Dehnung der concaven Seite bloss $^1/_{2000}$ erreichen. Nur wenn der Radius auf 500 Einheiten (statt auf 1000) angesetzt wird, ergibt sich auch für diese Stelle eine Verlängerung der convexen Seite von 1 auf 1000.

[1] Ich habe seitdem ähnliche Berechnungen für Träger mit kreisförmigem Querschnitt nach der von GRASHOF mitgetheilten Formel ausgeführt, welche die Bestimmung der Ordinaten für gegebene Abscissen und somit die graphische Darstellung der Krümmungen gestattet. Allein auch diese Formel ist nur für sehr geringe Senkungen genau und gewährt daher für die Praxis, speciell mit Rücksicht auf unsere Frage, keine erheblichen Vortheile.

Digitized by Google

Letztere ist richtig, übrigens so ziemlich selbstverständlich. Trotzdem scheint DETLEFSEN zu glauben, ich befinde mich in dieser Hinsicht in tiefer Unkenntniss. Was übrigens den Vorwurf der mangelhaften Bezeichnung betrifft, so habe ich die Angriffsweise der Kraft nur da nicht ausdrücklich betont oder wiederholt, wo die in der Natur gegebene Inanspruchnahme als selbstverständlich vorausgesetzt ist. Wenn z. B. ein Halm von *Molinia coerulea* vom Winde gebogen wird, so kann die Richtung der biegenden Kraft als horizontal und die zugekehrte Seite der Rispe als Angriffsfläche betrachtet werden. Der Wind hat folglich annähernd dieselbe Wirkung, wie ein im Schwerpunkt der Angriffsfläche concentrirter seitlicher Zug. Dasselbe gilt von beliebigen Waldbäumen in geschlossenem Bestande, namentlich von schlanken Kiefern oder Fichten mit verhältnissmässig kleiner Krone. Nur die letztere nimmt den Stoss des Windes auf und dieser wirkt auf den biegungsfähigen Stamm genau so, wie ein an seinem obern Ende befestigtes Seil, an dem seitlich gezogen wird.

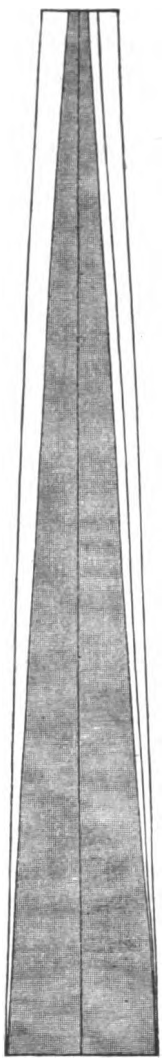


Fig. 1.

Denken wir uns dagegen eine frei stehende Fichte von pyramidalem Wuchs und bis auf den Boden mit Ästen versehen, so ist die Angriffsfläche des Windes einem ungefähr gleichschenkligen Dreieck aequivalent, dessen Basis dem untern Durchmesser der Krone entspricht und folglich dem Boden unmittelbar aufliegt, während der Scheitel mit der Stammspitze zusammenfällt. In diesem Falle ist offenbar die Beanspruchung eine wesentlich andere als vorhin. Der Druck des Windes vertheilt sich jetzt auf die ganze Länge des Stammes und nimmt sogar von oben nach unten mit dem Durchmesser der Krone zu. Soll unter solchen Umständen der Stamm annähernd ein Träger von gleichem Widerstande sein, so muss sein Durchmesser in basipetaler Richtung pro Längeneinheit in erheblich stärkerem Maasse zunehmen, als dies in dem oben erwähnten Falle, d. h. bei einem bloss auf den Wipfel wirkenden Zuge geschieht. Wie gross der Unterschied ist, lehrt am besten die nebenstehende Figur 1, in welcher der äusserste Umriss dem auf S. 97 meiner Abhandlung dargestellten Träger entspricht; nur dass der Scheitel hier weggelassen wurde. Die innerste Umrisslinie stellt dagegen einen Träger gleichen Widerstandes unter der Voraussetzung dar, dass die Angriffsfläche ein Dreieck sei, wie es

Digitized by Google

oben näher bezeichnet wurde. Zur weitern Vergleichung ist auf der rechten Seite noch eine mittlere Linie beigefügt, welche einer von der Basis bis zur Spitze gleichmässig vertheilten Belastung entspricht.[1]

Man ersieht aus dem Vorhergehenden, dass ein vom Winde ergriffener Fichtenstamm sich innerhalb der Krone wesentlich anders verhält, als ein freier, am Ende belasteter Träger;[2] in unserer Figur ist der erstere in halber Höhe ($= 80^{mm}$) auch bereits auf halbe Dicke verjüngt und die obere Hälfte ist sehr viel schwächer und darum auch viel biegsamer, als der durch die äusserste Umrisslinie veranschaulichte freie Träger. Wenn also DETLEFSEN junge, circa 4^{m} hohe Fichten (die doch wohl ziemlich weit herunter verästelt waren) dadurch auf die Probe stellt, dass er sie mit der Hand an der Spitze fasst und seitwärts zieht (S. 185), so ist das ein gänzlich verfehltes und darum zweckloses Verfahren, das allerdings mehr zum Vergnügen als zur Belehrung dienen mag. Und sollte etwa gar dem diesjährigen Gipfeltrieb eine solche Prüfung zugemuthet werden, so bin ich für so weit gehende Anforderungen nicht verantwortlich.

Ein weiterer Einwand, den DETLEFSEN geltend macht, bezieht sich auf meine Angabe, dass grosse, schön gewachsene Fichtenstämme annähernd Träger von gleichem Widerstande seien. Ihm ist es »unbegreiflich«, wie ich eine solche Behauptung aus dem Resultat meiner Berechnungen ableiten konnte, während ich doch die Beobachtungen SANIO's citire, welche damit im Widerspruch stehen. Es hält indessen nicht schwer, diesen scheinbaren Widerspruch in befriedigender Weise aufzuklären. Zunächst ist einleuchtend, dass eine zweite Umrisslinie, die wir zu der auf S. 97 meiner Arbeit gegebenen hinzu construiren, indem wir beispielsweise eine um $^{1}/_{10}$ grössere Längeneinheit wählen (Fig. 2), ebenfalls einem Träger von gleichem Widerstande entspricht. Der zwischen den beiden Linien eingeschlossene Raum bezeichnet folglich für jede beliebige Höhe den Zuwachs, der zur Erhaltung gleicher Widerstandsfähigkeit erforderlich ist. Man sieht, dass die Curven in der ganzen untern Hälfte nahezu parallel verlaufen, dann aber mit zunehmender Höhe immer stärker divergiren. Die Scheitel-

---

[1] Die Berechnung der letzterwähnten Umrisslinie geschah nach der Formel $\varrho = \sqrt[3]{\frac{x^2}{l^2}}$, wobei ϱ der Radius des kreisförmigen Querschnitts, x der Abstand vom Scheitel, d. h. vom Ursprung des Coordinatensystems, und l die Gesammtlänge (in der Figur $= 160^{mm}$) bezeichnet. — Für die dreieckige Angriffsfläche ist das jedesmalige Kraftmoment durch den Flächeninhalt des bezüglichen Dreieckes und den Abstand seines Schwerpunktes vom entsprechenden Trägerquerschnitt bestimmt.

[2] Die blosse Thatsache, dass der hier angedeutete Unterschied besteht, ist in forstmännischen Kreisen längst bekannt.

Digitized by Google

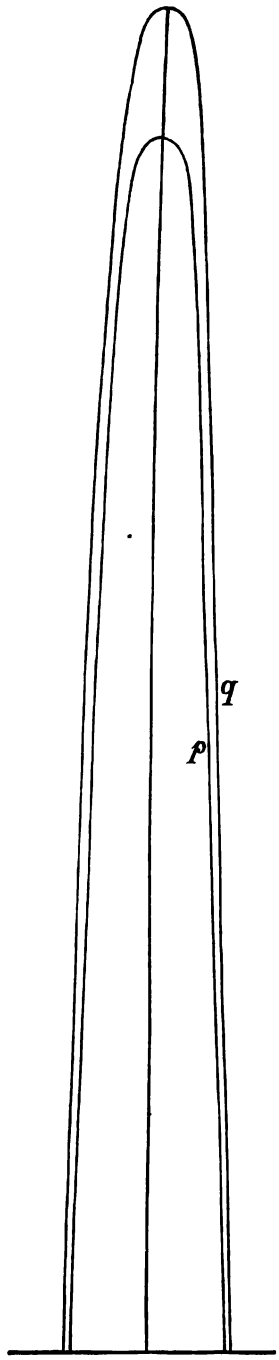


Fig. 2.

region selbst kann dabei allerdings nicht in Betracht kommen, weil hier die Zuwachsverhältnisse von den in der Pflanze vorhandenen allzu sehr abweichen. Dies ist auch der Grund, warum ich mir s. Z. (vergl. S. 160 meiner Schrift) ein beliebiges Stück des Scheiteltheils abgeschnitten und die biegende Kraft (vom idealen Scheitel aus) auf das so hergestellte künstliche Ende wirksam gedacht habe. Allein diese Einschränkung ändert nichts an der Thatsache, dass das Maass des Zuwachses nach der Spitze hin allmälig steigen muss, wenn die Form eines Trägers von gleichem Widerstande in aller Strenge gewahrt werden soll. Insofern sind also die auf S. 161 meiner Abhandlung zusammengestellten Ziffern durchaus maassgebend.

Eine so absolute Correctheit braucht indessen die Pflanze keineswegs anzustreben; der Techniker thut es auch nicht. Statt eines Körpers mit doppelt gekrümmter Oberfläche, wie er in unserer Figur veranschaulicht ist, genügt wohl auch ein abgestumpfter Kegel, welcher jene Oberfläche ungefähr in mittlerer Höhe tangirt (vergl. oben S. 1062). Legen wir also, um diesen Kegel zu construiren, an jede der beiden Umrisslinien eine Tangente und zwar dergestalt, dass der jedesmalige Berührungspunkt (p und q) in die Mitte zwischen Basis und Scheitel der zugehörigen Curve fällt.[1] Dann lehrt eine einfache Betrachtung, dass die beiden Tangenten, weil sie durch homologe Punkte gehen, einander parallel sein müssen. Die entsprechenden Kegel sind demnach ähnlich.

Wird also die Trägerform in der angebenen Weise vereinfacht, so vertheilt sich der Zuwachs gleichmässig auf die ganze Länge; die Jahrringe erhalten somit oben wie unten dieselbe Mächtigkeit. Und doch ist der so construirte abgestumpfte Kegel immer noch sehr annähernd ein Körper von gleichem Widerstande.

[1] Dies vorausgesetzt, ergibt die Rechnung für den Winkel, den die Tangenten mit der Curvenaxe bilden, $= 1° 54'$.

Digitized by Google

Das im Vorstehenden angedeutete Constructionsverfahren ist natürlich nicht das einzige, das zu einer befriedigenden Annäherung an die ideale Trägerform führt; es gibt andere ebenso zulässige, welche eine schwache Divergenz der Tangenten nach oben zu mit sich bringen. Es würde jedoch zu weit führen, alle die möglichen Variationen hier ausführlich zu besprechen; ich wollte ja bloss darthun, dass der Widerspruch, auf den DETLEFSEN hingewiesen hat, in Wirklichkeit nicht besteht. Übrigens mag hier noch an die Messungen MOHL's[1] erinnert werden, welche bei Nadelhölzern »constant eine Zunahme der Dicke der Jahrringe von unten nach oben« ergaben, beispielsweise von 1.3 bis 1.6 Pariser Linien.[2]

Es bleibt mir jetzt noch ein Punkt zu erörtern übrig, den der Herr Opponent gänzlich entstellt hat. Er sagt auf S. 184, indem er meine (S. 99 und 100 mitgetheilten) Messungen an *Juncus glaucus* und *Molinia coerulea* bespricht: »Es musste, um leidliche Übereinstimmung zu erzielen, die Länge des Trägers im ersteren Falle 300^{mm}, im zweiten Falle 200^{mm} grösser genommen werden, als diejenige des untersuchten Objectes.« Das klingt ja, als hätte ich mit den Ziffern ein willkürliches Spiel getrieben. Dieser Vorwurf ist jedoch gänzlich ungerechtfertigt. Ich hatte vielmehr die empirische Aufgabe zu lösen, für die vorliegenden Objecte, die annähernd abgestumpfte Kegel darstellten, den fehlenden Scheitel zu bestimmen, d. h. den Ursprung der Coordinaten, in welchem x und $\rho = 0$ werden. Wären die Seitenlinien dieser Kegel Gerade gewesen, so hätte es genügt, sie nach oben zu verlängern, bis sie sich schneiden. Ein so einfaches Verhältniss lag nun aber nicht vor, und so musste ich den Nullpunkt der Abscissenaxe durch Probiren bestimmen, wobei natürlich von mathematischer Genauigkeit nicht die Rede sein konnte. Darin also liegt die Erklärung für die 200—300^{mm}, die ich zur gegebenen Länge der oben abgeschnittenen Halme hinzugefügt habe. Wenn nun DETLEFSEN, bei dem ich doch Unkenntniss in so elementaren geometrischen Dingen nicht voraussetzen darf, sich gleichwohl zu der oben citirten Bemerkung veranlasst sieht, so drängt sich mir unwillkürlich die Frage auf, ob eine solche Kritik noch eine ernste und ehrliche sei.

Ich wiederhole schliesslich, dass eine vollständige Übereinstimmung der beobachteten Krümmungen oder Senkungen mit den nach irgend

---

[1] Bot. Zeit. 1869, S. 1. Man vergl. ferner NÖRDLINGER, Forstbotanik, I, S. 181 ff. und TH. HARTIG, Anat. u. Physiologie der Holzpflanzen, S. 367.

[2] Ich habe neuerdings ähnliche Messungen ausgeführt, welche übereinstimmende Resultate lieferten, bemerke jedoch, dass zur Gewinnung streng vergleichbarer Ziffern das (nach oben vorwiegende) Frühjahrsholz durchgehends in Herbstholz umgerechnet werden müsste, oder umgekehrt.

Digitized by Google

einer Formel berechneten nicht erwartet werden darf. Von hundert Halmen eines beliebigen Grases verhält sich nicht einer genau wie der andere, ein deutlicher Beweis, dass die mechanische Anpassung, wie übrigens jede andere, niemals eine ganz vollständige ist. Aber im Grossen und Ganzen gruppiren sich doch alle beobachteten Einzelkrümmungen ziemlich gleichmässig um die ideale Curve, welche einem Träger von überall gleichem Widerstande entspricht. Der letztere allein bringt das mechanische Princip, welches die Verjüngung der Pflanzenorgane nach der Spitze zu beherrscht, in voller Reinheit zum Ausdruck, während die Organe selbst über eine gewisse Stufe der Annäherung nicht hinauskommen.

Digitized by Google

44. Die Periodensysteme von Functionen reeller Variabeln.

Von L. KRONECKER.

(Vorgetragen am 20. November; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XLVI]: — ausgegeben am 27. November.)

I. Es sei a_{ik} für $i = 1, 2, \ldots p$ und $k = 1, 2, \ldots q$ irgend ein System reeller Grössen, und $F(x_1, x_2, \ldots x_p)$ sei eine eindeutige, gleichmässig stetige Function der reellen Variabeln x, für welche die Gleichung:

$$(A) \qquad F(x_1, x_2, \ldots x_p) = F(x_1 + a_{1k}, x_2 + a_{2k}, \ldots x_p + a_{pk})$$

besteht, wenn man dem Index k einen beliebigen der Werthe $1, 2, \ldots q$ beilegt. Bedeutet dann n die grösste Zahl von der Beschaffenheit, dass nicht sämmtliche aus dem System a_{ik} zu bildenden Determinanten $n$ter Ordnung verschwinden, so kann unbeschadet der Allgemeinheit angenommen werden, dass die aus den ersten n^2 Elementen a_{ik} gebildete Determinante:

$$|a_{gh}| \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n)$$

von Null verschieden ist. Unter dieser Voraussetzung existirt ein System von n^2 Elementen a'_{gh}, welches den Relationen:

$$\sum_g a'_{fg} a_{gh} = \sum_g a_{fg} a'_{gh} = \delta_{fh} \qquad (f, g, h = 1, 2, \ldots n)$$

genügt, und welches ich in meiner Mittheilung vom 27. Juli 1882 als das »reciproke« des Systems a_{gh} bezeichnet habe. Dabei ist, wie gewöhnlich, $\delta_{fh} = 0$ oder $\delta_{fh} = 1$, je nachdem die beiden Indices von einander verschieden oder einander gleich sind.

II. Führt man p neue Variabeln y ein, welche mit den Variabeln x durch die Relationen:

$$\begin{aligned} x_g &= \sum_h a_{gh} y_h \;,\; x_i = y_i + \sum_g a_{ig} y_g \\ y_g &= \sum_h a'_{gh} x_h \;,\; y_i = x_i - \sum_g \sum_h a_{ig} a'_{gh} x_h \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} g, h = 1, 2, \ldots n \\ i = n+1, n+2, \ldots p \end{pmatrix}$$

verbunden sind, so geht die eindeutige Function $F(x_1, x_2, \ldots x_p)$ in eine ebenfalls eindeutige, gleichmässig stetige Function $G(y_1, y_2, \ldots y_p)$ über, für welche eine der Gleichung (A) entsprechende Gleichung:

Digitized by Google

(B) $G(y_1, y_2, \ldots y_p) = G(y_1 + b_{1k}, y_2 + b_{2k}, \ldots . y_p + b_{pk})$ $(k = 1, 2, \ldots q)$

besteht. Dabei werden die pq Grössen b_{ik} durch die Gleichungen:

$$\text{(C)} \qquad \begin{aligned} b_{fk} &= \sum_h a'_{fh} a_{hk} \\ b_{ik} &= a_{ik} - \sum_g \sum_h a_{ig} a'_{gh} a_{hk} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} f,g,h = 1,2,\ldots . n \\ i = n+1, n+2, \ldots . p \\ k = 1,2,\ldots q \end{pmatrix}$$

definirt. Der Ausdruck auf der rechten Seite der letzteren Gleichung ist nichts Anderes als der Determinanten-Quotient:

$$\frac{|a_{rs}|}{|a_{gh}|} \qquad \begin{pmatrix} r = 1,2,\ldots n, i; & s = 1,2,\ldots . n, k \\ g = 1,2,\ldots n; & h = 1,2,\ldots . n \end{pmatrix},$$

dessen Zähler, als Determinante $(n+1)$ter Ordnung, gemäss der obigen Voraussetzung gleich Null, dessen Nenner aber von Null verschieden ist. Lässt man hiernach $b_{n+1,k}, b_{n+2,k}, \ldots . b_{pk}$, welche gleich Null sind, in der Gleichung (B) weg, so kommt:

$$G(y_1, y_2, \ldots . y_p) = G(y_1 + b_{1k}, \ldots . y_n + b_{nk}, y_{n+1}, \ldots . y_p),$$

und durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung gelangt man zu der allgemeineren Gleichung:

$$\text{(B')} \quad G(y_1, y_2, \ldots . y_p) = G(y_1 + \Sigma b_{1k} w_k, \ldots . y_n + \Sigma b_{nk} w_k, y_{n+1}, \ldots y_p),$$

in welcher sich die Summationen auf $k = 1, 2, \ldots . q$ beziehen und $w_1, w_2, \ldots . w_q$ beliebige ganze Zahlen bedeuten.

Vermöge der ersteren von den Gleichungen (C) wird $b_{fk} = \delta_{fk}$, wenn beide Indices f, k nicht grösser als n sind. Die Gleichung (B') geht daher, wenn man alle Zahlen $w_{n+1}, w_{n+2}, \ldots . w_{q-1}$ gleich Null nimmt, in folgende über:

$$\text{(B̄)} \quad G(y_1, y_2, \ldots y_p) = G(y_1 + w_1 + b_{1q} w_q, \ldots y_n + w_n + b_{nq} w_q, y_{n+1}, \ldots y_p),$$

welche ausdrückt, dass G eine periodische Function in Beziehung auf die ersten n Variabeln ist, die erstens ihren Werth nicht ändert, wenn man jede der n Variabeln um eine beliebige ganze Zahl vermehrt oder vermindert, und zweitens auch dann nicht, wenn man jeder der n Variabeln y_k ein und dasselbe ganze Vielfache von b_{kq} hinzufügt.

III. Wenn die Grössen $b_{1q}, b_{2q}, \ldots b_{nq}$ nicht sämmtlich rational sind, so können doch lineare (homogene oder nicht homogene) Beziehungen mit rationalen Coefficienten zwischen ihnen bestehen. Es wird hierüber offenbar die allgemeinste Annahme gemacht, wenn vorausgesetzt wird, dass die ersten m Grössen $b_{1q}, b_{2q}, \ldots b_{mq}$ sich als lineare Functionen der $n - m$ Grössen $b_{m+1,q}, b_{m+2,q}, \ldots b_{nq}$ mit rationalen Coefficienten ausdrücken lassen, dass aber zwischen diesen letzteren

Digitized by Google

Grössen weder eine homogene noch eine nicht homogene lineare Relation mit rationalen Coefficienten besteht. Die Zahl m kann hierbei die Werthe $0, 1, 2, \ldots n$ haben, und für den Fall $m = n$ sind alle n Grössen $b_{1q}, b_{2q}, \ldots b_{nq}$ rationale Zahlen.

Setzt man gemäss der gemachten Voraussetzung, für den Fall $m < n$:

$$b_{hq} = r_{h0} + \sum_k r_{hk} b_{kq}, \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots m \\ k = m+1, m+2, \ldots n \end{pmatrix}$$

wo $r_{h0}, r_{h,m+1}, \ldots r_{hn}$ rationale Zahlen bedeuten, und führt man an Stelle der ersten m Variabeln y neue Variabeln z mittels der Substitution:

$$y_h = z_h + \sum_k r_{hk} y_k \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots m \\ k = m+1, m+2, \ldots n \end{pmatrix}$$

ein, so geht $G(y_1, y_2, \ldots y_p)$ in eine eindeutige, gleichmässig stetige Function:

$$H(z_1, z_2, \ldots z_m ; y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots y_p)$$

über, und an die Stelle von $(\bar{B})$ tritt eine Gleichung:

$$(D) \quad H(z_1, z_2, \ldots z_m; y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots y_p) = H(z_1^0, z_2^0, \ldots z_m^0; y_{m+1}^0, y_{m+2}^0, \ldots y_p^0),$$

in welcher:

$$\begin{aligned} z_h^0 &= z_h + w_h - \sum_k r_{hk} w_k + r_{h0} w_q \\ y_k^0 &= y_k + w_k + b_{kq} w_q \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots m \\ k = m+1, m+2, \ldots n \end{pmatrix}$$

und $y_{n+1}^0 = y_{n+1}, y_{n+2}^0 = y_{n+2}, \ldots y_p^0 = y_p$ zu setzen ist.

IV. Man kann bekanntlich die Werthe irgend welcher n Grössen $b_{1q}, b_{2q}, \ldots b_{nq}$ durch rationale Brüche desselben Nenners mit solcher Annäherung darstellen, dass die n Werthunterschiede, noch mit dem Nenner multiplicirt, beliebig klein werden. Dies wird z. B. gleich im Eingange von Hrn. HERMITE's Abhandlung »*Sur la fonction exponentielle*« erwähnt. Es erhellt unmittelbar, wenn man erwägt, dass unter den absolut kleinsten Resten von $1 + t^n$ auf einander folgenden ganzen Vielfachen von b_{kq}:

$$R(sb_{kq}), R((s+1)b_{kq}), R((s+2)b_{kq}), \ldots\ldots R((s+t^n)b_{kq})$$

nothwendig mindestens zwei für alle n Werthe von k in einem und demselben Intervalle von der Grösse t^{-1} liegen,[1] dass also die Differenz von zwei solchen Resten, welche in der Form:

$$\alpha_k + \beta b_{kq},$$

[1] Der Rest, welcher verbleibt, wenn man von einer reellen Grösse a die ihr zunächst benachbarte ganze Zahl subtrahirt, ist hier, wie in meiner Mittheilung vom 7. Februar d. J. mit $R(a)$ bezeichnet. Unter t ist eine beliebige positive ganze Zahl zu verstehen.

Digitized by Google

mit ganzzahligen Coefficienten α_k, β, dargestellt werden kann, ihrem absoluten Werthe nach kleiner als t^{-1} ist, während $|\beta| \leqq t^n$ wird.

Nimmt man nun für $w_1, w_2, \ldots w_n, w_q$ ganze Zahlen $w_1', w_2', \ldots w_n', w_q'$, für welche die n absoluten Werthe:

$$|w_k' + b_{kq} w_q'| \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

sämmtlich kleiner als eine willkürlich angenommene Grösse τ sind, so wird auch der absolute Werth des Aggregates von Ausdrücken $w_k' + b_{kq} w_q'$:

$$w_h' + b_{hq} w_q' - \sum_k r_{hk} (w_k' + b_{kq} w_q') \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots m \\ k = m+1, \ldots n \end{pmatrix}$$

oder des damit übereinstimmenden Ausdrucks:

$$w_h' - \sum_k r_{hk} w_k' + r_{ho} w_q' \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots m \\ k = m+1, \ldots n \end{pmatrix}$$

beliebig klein, wenn τ hinreichend klein angenommen wird. Dieser Ausdruck stellt aber eine rationale Zahl mit festem, d. h. von der Wahl der Zahlen w' nicht abhängigen Nenner dar; der Ausdruck muss also bei geeigneter Wahl der Zahlen w' sich auf Null reduciren. Setzt man alsdann der Einfachheit halber:

$$\text{(E)} \qquad w_k' + b_{kq} w_q' = b_{kq}' \qquad (k = 1, 2, \ldots m, m+1, \ldots n),$$

so wird in der Gleichung (D) von Art. III:

$$z_h^0 = z_h \ , \ y_k^0 = y_k + b_{kq}' \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots m \\ k = m+1, m+2, \ldots n \end{pmatrix},$$

und es besteht daher für solche Zahlen w' die einfachere Relation:

$$\text{(D')} \quad H(z_1, \ldots z_m; y_{m+1}, \ldots y_n; y_{n+1}, \ldots y_p) = H(z_1, \ldots z_m; y_{m+1} + b_{m+1,q}', \ldots y_n + b_{nq}'; y_{n+1}, \ldots y_p),$$

welche ausdrückt, dass die Function H ihren Werth nicht ändert, wenn den $n - m$ Variabeln $y_{m+1}, \ldots y_n$ beziehungsweise die Grössen $b_{m+1,q}', \ldots b_{nq}'$ hinzugefügt werden, die übrigen Variabeln aber ungeändert bleiben.

V. Es kann unbeschadet der Allgemeinheit angenommen werden, dass $|b_{wj}'|$ der grösste der Werthe:

$$|b_{m+1,q}'|, |b_{m+2,q}'|, \ldots |b_{nq}'|$$

ist. Setzt man nun:

$$\text{(F)} \qquad y_k' = y_k - \frac{b_{kq}'}{b_{nq}'} y_n \qquad (k = m+1, m+2, \ldots n-1),$$

so geht die Function H in eine Function:

$$H'(z_1, z_2, \ldots z_m; y_{m+1}', y_{m+2}', \ldots y_{n-1}'; y_n, y_{n+1}, \ldots y_p)$$

über, welche ihren Werth nicht ändert, wenn man y_n um b_{nq}' ver-

Digitized by Google

mehrt, alle übrigen Variabeln aber ungeändert lässt. Hieraus folgt, dass die Function H' von y_n unabhängig sein muss.

Es muss nämlich, nach der über die ursprüngliche Function $F(x_1, x_2, \ldots x_p)$ gemachten Voraussetzung gleichmässiger Stetigkeit, für jede beliebig gegebene positive Grösse σ eine Grösse τ von der Beschaffenheit gefunden werden können, dass die Functionswerthe von:

$$H(z_1, \ldots z_m; y_{m+1}, \ldots y_n; y_{n+1}, \ldots y_p)$$

sich um weniger als σ von einander unterscheiden, wenn jedes der Argumente nur irgend ein Intervall von der Grösse τ durchläuft. In Bezug auf das Argument y_n bleibt diese Eigenschaft bei der Transformation der Variabeln y in die Variabeln y', unabhängig von jeder Veränderung der Grössen b'_{kq}, erhalten; denn es ist hierfür bei der bezüglichen Substitution (F) durch die über die Wahl von b'_{nq} getroffene Bestimmung vorgesorgt, vermöge deren die Coefficienten der Substitution:

$$\frac{b'_{kq}}{b'_{nq}}$$

ihrem absoluten Werthe nach nicht grösser als Eins werden können. Da nun nach Art. IV die Grössen $|b'_{kq}|$ so zu wählen sind, dass auch die grösste derselben $|b'_{nq}|$ noch kleiner als τ ist, und da die Function H' ihren Werth beibehält, wenn man y_n um ganze Vielfache von b'_{nq} ändert, die übrigen Variabeln aber ungeändert lässt, so folgt, dass der Unterschied aller Functionswerthe von H', welche dieselbe bei beliebiger Veränderung von y_n allein annimmt, stets kleiner bleiben muss als jene beliebig gegebene Grösse σ.

VI. Ändert man y_n um eine Einheit, so ändern sich die Variabeln y'_k gemäss der Gleichung (F) des Art. V um die Grössen:

$$-\frac{b'_{kq}}{b'_{nq}} \qquad (k = m+1, m+2, \ldots n-1)$$

und die Variabeln z_h gemäss der Gleichung (D) des Art. III um $-r_{hn}$. Nimmt man nun in der vorstehenden Entwickelung an Stelle der n Grössen b_{kq} die $n-1$ Quotienten $\frac{b'_{kq}}{b'_{nq}}$ der durch die Gleichung (E) definirten n Grössen b', so kann man daraus $(n-1)$ beliebig kleine Grössen b''_{kq} bilden, die durch Gleichungen:

$$w''_k + \frac{b'_{kq}}{b'_{nq}} w''_n = b''_{kq} \qquad (k = 1, 2, \ldots n-1)$$

mit ganzzahligen Coefficienten w'' bestimmt sind. Dann bleibt die Function H' ungeändert, wenn gleichzeitig — analog wie in der Gleichung (D) am Schlusse von Art. III — die Variabeln:

Digitized by Google

$$z_h \text{ um } w''_h - \sum_k r_{hk} w''_k, \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots m \\ k = m+1, m+2, \ldots n-1 \end{pmatrix}$$
$$y'_k \text{ um } b''_{kq}$$

geändert werden. Zugleich sind die Quotienten der Grössen b', wie die Grössen b, durch die linearen Gleichungen[1]:

$$\frac{b'_{kq}}{b'_{nq}} = \sum_k r_{hk} \frac{b'_{kq}}{b'_{nq}} \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots m \\ k = m+1, m+2, \ldots n-1 \end{pmatrix}$$

mit einander verbunden; die Änderung von z_h lässt sich hiernach durch:

$$b''_{kq} - \sum_k r_{hk} b''_{kq} \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots m \\ k = m+1, m+2, \ldots n-1 \end{pmatrix},$$

also durch ein Aggregat beliebig kleiner Grössen darstellen, welches andererseits, wie der ursprüngliche Ausdruck $w''_h - \Sigma r_{hk} w''_k$ zeigt, durch Multiplication mit dem gemeinsamen Nenner der rationalen Zahlen r_{hk} gleich einer ganzen Zahl werden muss. Es folgt also, genau wie oben im Art. IV, dass bei geeigneter Wahl der Zahlen w'' die Änderung von z_h sich auf Null reduciren muss. Bestimmt man aus solchen Zahlen w'' gemäss der Gleichung (E′) die Grössen b''_{kq} und setzt dann analog der Substitution (F):

$$(F') \qquad y''_k = y'_k - \frac{b''_{kq}}{b''_{n-1,q}} y'_{n-1} \qquad (k = m+1, m+2, \ldots n-2),$$

so geht H' in eine Function H'' über, von der man wie oben erschliesst, dass sie von y'_{n-1} unabhängig ist. Die nothwendige Bedingung für die Zulässigkeit dieser Deduction, dass wenigstens eine der Grössen b''_{kq} nicht gleich Null werden könne, ist durch die Voraussetzung erfüllt, welche zu Anfang des Art. III gemacht worden ist. Denn, wenn zwischen den $n-m$ Grössen $b_{m+1,q}, b_{m+2,q}, \ldots b_{nq}$ keine lineare Relation mit rationalen Coefficienten besteht, kann das Verhältniss von b'_{kq} zu b'_{nq} offenbar keinen rationalen Werth erhalten.

VII. Durch weitere Fortsetzung der hier entwickelten Schlussweise ergiebt sich, dass die Function:

$$H(z_1, z_2, \ldots z_m; y_{m+1}, \ldots y_n; y_{n+1}, \ldots y_p)$$

von den sämmtlichen $n-m$ Variabeln der zweiten Gruppe, nämlich von $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots y_n$ unabhängig sein muss, während sie in Beziehung auf die m Variabeln der ersten Gruppe periodisch ist. Die Perioden sind, wie im Art. III gezeigt worden ist, sämmtlich rationale Zahlen, und eine beliebige Anzahl solcher Periodensysteme lässt sich stets auf m Periodensysteme reduciren. Diese Reduction kann am Einfachsten mittels der Methode bewirkt werden, welche ich im §. 24 meiner Festschrift zu Hrn. Kummer's Doctorjubiläum bei der Reduction der linearen

[1] Vergl. Art. III und IV.

Digitized by Google

Fundamentalformen auf solche mit möglichst wenig Gliedern angewandt habe. Dieselbe Methode dient auch zur Reduction eines aus linearen homogenen Functionen beliebig vieler Variabeln gebildeten Divisorensystems auf ein solches, welches die kleinste, d. h. eine mit der Stufenzahl übereinstimmende Anzahl von Elementen enthält; ich will sie aber hier ohne alle Bezugnahme auf die erwähnten Theorieen darlegen.[1]

VIII. Bezeichnet man die $m+r$ Periodensysteme der Variabeln z_h mit:

$$c_{hk} \qquad \begin{pmatrix} h=1,2,\ldots m \\ k=1,2,\ldots m+r \end{pmatrix},$$

und setzt man die Determinante der ersten m^2 Grössen c_{hi} als von Null verschieden voraus, so lassen sich die Elemente des $(m+1)$ten Periodensystems als lineare homogene Functionen der Elemente der ersten m Periodensysteme mit m rationalen Coefficienten darstellen. Reducirt man diese m Coefficienten sämmtlich, durch Weglassung der grössten Ganzen, auf echte Brüche, so kann man offenbar auch die so entstehenden linearen Functionen an Stelle der Elemente $c_{1,m+1}, c_{2,m+1}, \ldots c_{m,m+1}$ des $(m+1)$ten Periodensystems nehmen und aber dieses Periodensystem weglassen, wenn bei der angegebenen Reduction die sämmtlichen m Coefficienten der linearen Function gleich Null werden. Wenn dieses Verfahren auf alle r letzten Periodensysteme angewendet ist, muss wenigstens eine der Determinanten $m$ter Ordnung, welche sich aus den neuen $m+r$ Periodensystemen bilden lassen,[2] kleiner als die Determinante der ersten m^2 Grössen c_{hi} sein, und da schon diese als die kleinste von allen des ursprünglichen Systems vorausgesetzt werden konnte, und aber die Determinanten, weil sie rationale Zahlen mit bestimmten Nennern sind, nicht beliebig verkleinert werden können, so muss man bei jenem Verfahren einmal zu m Periodensystemen gelangen, durch welche sich alle folgenden und demnach auch die $m+r$ ursprünglichen Periodensysteme c_{hk} als lineare Functionen mit ganzzahligen Coefficienten ausdrücken lassen. Ein solches System von m Periodensystemen kann noch durch lineare Transformation der Variabeln z mit rationalen Coefficienten in das »Einheitsystem« δ_{ik} umgewandelt werden, und es ergiebt sich daher, dass die Function G des Art. I sich durch lineare Transformation der Variabeln $y_1, y_2, \ldots y_n$ mit rationalen Coefficienten in eine solche umwandeln lässt, welche von

---

[1] Ich habe die erwähnte Methode bereits im Wintersemester 1865/66 und seitdem fast regelmässig in meinen Universitäts-Vorlesungen auseinandergesetzt.

[2] Ist z. B. in einer der linearen Functionen der Coefficient von c_{h1} von Null verschieden und also ein echter Bruch, so wird die Determinante der ersten m Periodensysteme verkleinert, wenn man das erste Periodensystem durch das System jener linearen Functionen ersetzt.

Digitized by Google

$n-m$ Variabeln unabhängig und in Beziehung auf die übrigen m in der Weise periodisch ist, dass jede der Variabeln für sich um eine beliebige ganze Zahl vermehrt oder vermindert werden kann.

IX. Bei der bisherigen Deduction ist nur von der Grössenreihe:

$$b_{kq} \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

Gebrauch gemacht worden. Werden nun die übrigen Grössenreihen:

$$b_{k,n+1}, b_{k,n+2}, \ldots . b_{k,q-1} \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

in derselben Weise benutzt, so ergiebt sich als schliessliche und erschöpfende Folgerung aus der durch die Gleichung (A) ausgedrückten Eigenschaft der Function $F(x_1, x_2, \ldots x_p)$, dass

$$F(\Sigma a_{1h}y_h, \ldots . \Sigma a_{nh}y_h; y_{n+1} + \Sigma a_{n+1,h}y_h, \ldots . y_p + \Sigma a_{ph}y_h) \qquad (h=1,2,\ldots n)$$

durch lineare Transformation der Variabeln y mit rationalen Coefficienten in eine Function von weniger Variabeln verwandelt werden kann, welche ihren Werth beibehält, wenn man gewisse von den neuen Variabeln, und zwar jede für sich allein, um eine Einheit ändert.

X. Die Entwickelung vereinfacht sich, wenn man — statt alle Consequenzen aus der Voraussetzung einer bestimmten, durch die Gleichung (A) ausgedrückten Periodicitäts-Eigenschaft einer Function $F(x_1, x_2, \ldots x_p)$ zu ziehen — sich auf den Beweis des folgenden allgemeinen Satzes über die mögliche Anzahl von Periodensystemen beschränkt:

> Eine eindeutige Function von mehreren (reellen oder complexen) Variabeln kann stets durch lineare Transformation in eine solche verwandelt werden, für welche die Anzahl der Periodensysteme, aus denen sich alle der Function zugehörigen Periodensysteme linear mit ganzzahligen Coefficienten zusammensetzen lassen, genau gleich der Stufenzahl des aus allen Perioden gebildeten Grössensystems ist.

Unter der »*Stufenzahl*« (oder dem »*Range*«) eines Systems reeller oder complexer Grössen[1]:

$$a_{ik} \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots p \\ k=1,2,\ldots q \end{pmatrix}$$

soll hier die im Art. I mit n bezeichnete Zahl verstanden werden,

[1] Der Begriff der Stufenzahl verdankt weit höheren Gesichtspunkten seine Entstehung. Nach den Definitionen, welche ich in meiner oben citirten Festschrift aufgestellt habe, ist die Stufenzahl n des Systems a_{ik} nichts Anderes als die Stufenzahl des aus den q Functionen von p Variabeln: $\Sigma a_{ik}x_i$ gebildeten Divisorensystems. Hr. J. Molk hat den Ausdruck »Stufe« in seiner *Thèse:* »*Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité et sur la théorie générale de l'élimination*« mit »*rang*« übersetzt. Vergl. auch die Bedeutung des Wortes »Rang« in den Arbeiten des Hrn. Frobenius.

Digitized by Google

d. h. also die grösste Zahl von der Beschaffenheit, dass nicht sämmtliche aus dem System zu bildenden Determinanten $n$ter Ordnung verschwinden. Die Stufenzahl bleibt offenbar ungeändert, wenn man dem System beliebig viele Zeilen oder Colonnen von linearen Functionen der früheren Zeilen oder Colonnen hinzufügt, und es kann daher auch ein System von unendlich vielen Zeilen oder Colonnen, wie z. B. das aus allen Perioden einer Function bestehende System, einen bestimmten endlichen Rang haben.

Das System a_{ik} wird so beschaffen vorausgesetzt, dass jeder Zeile, in welcher nicht alle Elemente reell sind, eine andere mit den conjugirten Elementen entspricht.

Ist nun wie in Art. I die Determinante der ersten n^2 Elemente a_{ik} von Null verschieden, so ist gemäss der Definition der Stufenzahl n die Form:

$$\sum_k a_{ik} u_k \qquad (k = 1, 2, \ldots q),$$

für unbestimmte u, auch wenn $i > n$ ist, eine lineare Function derjenigen n Formen, bei denen $i = 1, 2, \ldots n$ ist. Das System der p Gleichungen:

$$\sum_k a_{ik} w_k = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots p \\ k = 1, 2, \ldots n, q \end{pmatrix}$$

lässt sich daher in ein System von folgender Gestalt:

$$w_k + b_{kq} w_q = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

bringen und also nach Art. IV entweder absolut oder mit beliebig grosser Annäherung in ganzen Zahlen w lösen.[1] Im ersteren Falle

[1] Dass jedes System linearer homogener Gleichungen sich in ganzen Zahlen mit beliebiger Annäherung lösen lässt, wenn die Anzahl der zu bestimmenden ganzen Zahlen grösser als die Stufenzahl des Coefficienten-Systems ist, kann auch direct, d. h. ohne das System umzuformen, bewiesen werden. Ich habe dies in meinen beiden, in den Comptes rendus der Pariser Akademie veröffentlichten Aufsätzen vom Januar 1883 und November 1884 gezeigt und darin überhaupt die näherungsweise Auflösung linearer Gleichungen eingehend behandelt. Aber der Nachweis der Möglichkeit einer solchen Auflösung ist schon von Hrn. HERMITE im 40. Bande, so wie implicite von RIEMANN im 71. Bande des Journals für Mathematik und von Hrn. WEIERSTRASS im Monatsbericht der Akademie vom November 1876, bei Behandlung der Frage der Anzahl der Periodensysteme, geführt worden. Diese Frage selbst wird in dem citirten WEIERSTRASS'schen Aufsatze für analytische Functionen in der Weise erledigt, dass eine Grenze für die Anzahl der zur Bildung aller Periodensysteme ausreichenden bestimmt wird, und zwar eben diejenige, welche sich oben als der Rang des gesammten Periodensystems erwiesen hat. In der RIEMANN'schen Entwickelung aber ist nur die Anzahl der Variabeln als Grenze für die Zahl der Periodensysteme nachgewiesen, und zwar eben nur in dem Falle, wo die Anzahl der Variabeln gleich dem Range des Periodensystems wird. Die anderen Fälle sind als »Ausnahmen« bei Seite gelassen, und am Schlusse des vierten Absatzes seines an Hrn. WEIERSTRASS gerichteten Schreibens hat sich RIEMANN mit der blossen Angabe »dass es folglich eine Function von weniger als n linearen Ausdrücken der Grössen x ist« begnügt, ohne die nähere Begründung der Conclusion hinzuzufügen.

Digitized by Google

lässt sich nach Art. VIII ein System von nur n Colonnen:

$$a_{ik}^{0} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots p \\ k = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix}$$

finden, durch welche die $n+1$ Colonnen:

$$a_{ik} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots p \\ k = 1, 2, \ldots n, q \end{pmatrix}$$

linear mit ganzzahligen Coefficienten dargestellt werden können. Im letzteren Falle aber bilden die durch die Gleichungen:

$$\sum_k a_{ik} w_k = a_{i,q+1} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots p \\ k = 1, 2, \ldots n, q \end{pmatrix}$$

bestimmten Grössen $a_{i,q+1}$ eine neue, $(q+1)$te, Colonne, welche dem System hinzugefügt werden kann, und welche aus lauter Elementen besteht, deren absoluter Betrag beliebig klein ist. Setzt man nun, analog wie oben im Art. V:

$$x_i' = x_i - \frac{a_{i,q+1}}{a_{p,q+1}} x_p ,$$

wenn der absolute Betrag von $a_{p,q+1}$ von keinem der anderen Grössen derselben Colonne übertroffen wird, so schliesst man wie a. a. O., dass die Function $F(x_1, x_2, \ldots x_p)$ durch die angegebene Substitution von x_p unabhängig werden muss.

So lange noch mehr Colonnen, als die Stufenzahl angiebt, vorhanden sind, kann hiernach entweder die Anzahl der Colonnen oder die Anzahl der Variabeln, im letzteren Falle zugleich die Stufenzahl selbst, vermindert werden. Man muss also schliesslich zu einer Function gelangen, für welche in der That die Anzahl der Colonnen von Perioden, d. h. der Periodensysteme, mit der Stufenzahl des gesammten Periodensystems vollkommen übereinstimmt.

Digitized by Google

45. Umwandlung der Citronensäure in Pyridin-Verbindungen.

Von A. Behrmann und A. W. Hofmann.

(Vorgelegt am 20. November; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XLVI]; — ausgegeben am 27. November.)

Ausgangspunkt der im Folgenden niedergelegten Beobachtungen sind die Versuche über die Einwirkung des Broms in alkalischer Lösung auf Amide gewesen, welche der Eine[1] von uns während der letzten drei Jahre mehrfach zum Gegenstand von Mittheilungen an die Akademie sowie an die deutsche chemische Gesellschaft gemacht hat.

Diese Versuche haben sich bisher ausschliesslich mit den Amiden einbasischer Säuren beschäftigt. Die Umwandlungen, welche dieselben erleiden, mussten den Wunsch erwecken, die Amide auch mehrbasischer Säuren in den Kreis der Betrachtung zu ziehen. In diesem Sinne sind denn auch die Amide der zugänglicheren zweibasischen Säuren, wie der Oxalsäure, Malonsäure und Bernsteinsäure, wiederholt in Angriff genommen worden. Allein die Ergebnisse dieser Versuche haben auch nicht entfernt den gehegten Erwartungen entsprochen; in den meisten Fällen erfolgte auf Zusatz einer alkalischen Bromlösung alsbald eine stürmische Stickstoffentwicklung, und man gelangte schliesslich zu Verbindungen, die keinen Stickstoff mehr enthielten, mithin aus dem Rahmen der beabsichtigten Untersuchung heraustraten.

Ganz ähnlich ist es uns bei dem Versuche ergangen, die Reaction an den Amiden der Citronensäure zu erproben. Bei der Einwirkung von Brom und Alkali auf das Citramid entwickelt sich Stickstoff in Strömen, und man stösst dann bei weiter fortgesetzter Einwirkung auf ähnliche Erscheinungen, wie sie Cahours[2] bei der Behandlung citronensaurer Salze mit Brom beobachtet hat.

Gelegentlich dieser Versuche waren jedoch die Amide der Citronensäure, welche man bisher noch sehr wenig studirt hat, und zumal das Citrotriamid in grösserer Menge dargestellt worden, und ein Paar Versuche gerade mit dem letztgenannten Körper führten bald zu Beobachtungen, welche werth schienen, weiter verfolgt zu werden.

[1] Hofmann, Mathem. u. naturwissensch. Sitzungsber. der Akad. d. Wissensch. 1882, 145 u. 191; Berichte der chem. Ges. XVII, 1406.

[2] Cahours, Ann. chim. phys. [3] XIX, 484.

Digitized by Google

Amide der Citronensäure.

Das *Citrotriamid* oder, wie wir es der Kürze halber nennen wollen, das *Citramid* ist bisher so gut wie unbekannt geblieben, was um so auffallender ist, als die entsprechende Anilinverbindung schon vor vielen Jahren von PEBAL[1] gelegentlich seiner schönen Arbeit über die Anilide der Citronensäure eingehend studirt worden ist. Über amidartige Derivate der Citronensäure liegen allerdings bereits Angaben von SARANDINAKI[2] und KÄMMERER[3] vor. Beide Forscher gingen bei ihren Versuchen von dem Äthyläther der Citronensäure aus, auf den sie das Ammoniak in alkoholischer Lösung einwirken liessen. Die einfachen, von der Theorie zunächst unzweifelhaft in Aussicht gestellten Amide der Citronensäure sind aber merkwürdiger Weise unter diesen Umständen weder von dem Einen noch von dem Anderen beobachtet worden. Möglich, dass sich der Äthyläther der Citronensäure, eine schwer destillirbare Flüssigkeit, nicht ganz leicht in reinem Zustande gewinnen lasse, oder dass die Einfachheit der Reaction durch die Gegenwart freien Alkohols beeinträchtigt werde. Thatsache ist, dass die von den oben genannten Forschern gewonnenen Verbindungen eine auffallende Zusammensetzung zeigen und theilweise auch durch ihre unliebsamen physikalischen Eigenschaften, — SARANDINAKI beschreibt sein Citramethan als ein amorphes, grünes, hygroskopisches Pulver, — die Besorgniss erwecken, es könnten nicht hinreichend scharf definirte Körper der Untersuchung unterworfen worden sein.

Jedenfalls schien es, angesichts dieser Beobachtungen, angezeigt, bei der Darstellung des Citramids von dem schön krystallisirten Citronensäure-Methyläther auszugehen und statt des alkoholischen wässeriges Ammoniak in Anwendung zu bringen.

Der *citronensaure Methyläther* ist zuerst von SAINT-EVRE[4] dargestellt und analysirt worden; er erhielt denselben in prismatischen Krystallen. Später hat sich DEMONDESIR[5] mit demselben beschäftigt; dieser Beobachter hat jedoch weder bezüglich der Darstellung noch bezüglich der Eigenschaften den Angaben SAINT-EVRE's wesentlich Neues hinzugefügt. Die ersten genaueren Mittheilungen über diesen Körper verdanken wir HUNÄUS[6], welcher den Schmelzpunkt zwischen 78.5 und 79°, den Siedepunkt (bei theilweiser Zersetzung) zwischen 283 und 287° angiebt.

---

[1] PEBAL, LIEB. Ann. LXXXII, 78.
[2] SARANDINAKI, Berichte der chem. Ges. V, 1101.
[3] KÄMMERER, Berichte der chem. Ges. VIII, 763.
[4] SAINT-EVRE, Compt. rend. XXI, 1441.
[5] DEMONDESIR, Compt. rend. XXXIII, 141.
[6] HUNÄUS, Berichte der chem. Gesellschaft IX, 1749.

Digitized by Google

Wir haben diesen Äther in grosser Menge nach dem gewöhnlichen Verfahren dargestellt, nämlich durch Einleiten von Salzsäure in eine Lösung von Citronensäure (1 Gew.-Th.) in reinem Methylalkohol (1 Gew.-Th.), bis das Gas nicht mehr absorbirt ward. Beim Erkalten der warmgewordenen Lösung schied sich der Äther in sehr schönen, prismatischen Krystallen ab, welche, da sie das Ausgangsmaterial für unsere Versuche bildeten, nochmals analysirt worden sind. Der Formel

$$C_6H_5O_4(OCH_3)_3$$

entsprechen folgende Werthe:

		Theorie	Versuch
C_9	108	46.15	46.12
H_{14}	14	5.98	6.18
O_7	112	47.87	—
	234	100.00.	

Die Ausbeute an Äther beträgt 80—85 Procent der Theorie. Die Mutterlauge liefert auf nochmaliges Einleiten von Salzsäuregas noch etwas Äther, allein es verlohnt sich kaum, ihn zu gewinnen.

Die bezüglich der Eigenschaften von Hunäus gemachten Angaben können wir bestätigen. Nur haben wir die von Hunäus betonte leichte Zersetzbarkeit des Äthers beim Kochen mit Wasser nicht beobachtet. Der Äther lässt sich sehr bequem aus siedendem Wasser umkrystallisiren, und selbst nach dreistündigem Kochen wurde bei einem besonderen Versuche beinahe die ganze Menge des angewendeten Äthers zurückgewonnen.

Das *Citramid* wurde zuerst von Demondesir[1] beobachtet, er erhielt es gelegentlich der bereits erwähnten Versuche über den Äther, welchen er behufs Darstellung des Amids mit alkoholischem Ammoniak behandelte. Er giebt nur an, dass es ein starrer Körper sei.

Wir haben das Amid durch Übergiessen von Citronensäure-Methyläther (1 Gew.-Th.) mit sehr starkem wässerigen Ammoniak (4—5 Gew.-Th.) bei gewöhnlicher Temperatur in reichlicher Menge gewonnen. In der Regel wurde die stärkste Ammoniakflüssigkeit von 0.88 Vol.-Gew., welche etwa 36 Procent Gas enthält, in Anwendung gebracht. Ammoniakflüssigkeit von grösserer Verdünnung, als dem Vol.-Gew. 0.91 entspricht, muss vermieden werden, weil in diesem Falle kein Citramid mehr erhalten würde. Lässt man die Flüssigkeit einige Stunden stehen, so sind die Krystalle des Äthers verschwunden, und bald darauf beginnt das Amid sich krystallinisch auszuscheiden. Mitunter erscheinen die Krystalle des letzteren bereits, ehe noch der Äther vollständig in

[1] A. o. a. O.

Digitized by Google

Lösung übergegangen ist. Wenn sich die Krystalle nicht weiter vermehren, werden sie abfiltrirt. Man erhält bei Anwendung starken Ammoniaks 50 bis 60 Procent der theoretischen Ausbeute, bei verdünnterem Ammoniak weit weniger. Die ausgeschiedenen Krystalle sind nahezu rein. Für die Analyse sind sie zuvor noch aus Wasser umkrystallisirt und dann bei 100° getrocknet worden. Der Formel

$$C_6H_5O_4(NH_2)_3$$

entsprechen folgende Werthe:

	Theorie		Versuch I.	Versuch II.	Versuch III.
C_6	72	38.10	38.22	—	—
H_{11}	11	5.82	6.02	—	—
N_3	42	22.22	—	22.60	22.02
O_4	64	33.86	—	—	—
	189	100.00.			

Nachdem sich der Methyläther durch die Einwirkung von wässerigem Ammoniak mit solcher Leichtigkeit in Citramid verwandelt hatte, war es, angesichts der Beobachtungen von Sarandinaki und von Kämmerer, von Interesse zu untersuchen, ob sich nicht auch bei Anwendung von alkoholischem Ammoniak das Citramid erhalten lasse. Der Methyläther geht in der That, wie man nicht anders erwarten konnte, auch bei Gegenwart von Alkohol in das Amid über. Die oben angeführte Stickstoffbestimmung III ist mit so gewonnenem Citramid ausgeführt worden. Bei Anwendung alkoholischen Ammoniaks erfolgt aber die Amidbildung ungleich langsamer, man muss die Mischung Wochen lang stehen lassen, und die Ausbeute ist stets weit geringer. Auch nimmt die Flüssigkeit an der Luft schnell eine grünliche Färbung an. Im zugeschmolzenen Rohr erhitzt, setzt die Mischung ein grünes, amorphes Pulver ab. Jedenfalls ist die Darstellung mit Hülfe des wässerigen Ammoniaks eine ungleich einfachere und ergiebigere.

Das Citramid ist in kaltem Wasser schwer, in heissem Wasser leicht löslich. 100 Gew.-Th. lösen bei 18° 2.7, bei 100° 33.3 Gew.-Th. Citramid. Von Alkohol, Äther und den übrigen neutralen Lösungsmitteln wird es nicht aufgenommen. Das Citramid lässt sich ohne Zersetzung bis auf 180—190° erhitzen; über 200° fängt es an, sich stark zu bräunen und ist bei 210—215° zu einer schwarzen Flüssigkeit geschmolzen. Durch Säuren und Alkalien erleidet das Citramid die den Amiden eigenthümliche Spaltung in Säure und Ammoniak. Unter gewissen Umständen erscheinen aber bei der Einwirkung von Säuren eigenthümliche Umbildungsproducte, auf welche wir weiter unten zurückkommen werden. Noch muss bemerkt werden, dass

Digitized by Google

man vergeblich versucht hat, durch Behandlung, sei es mit Acetylchlorid, sei es mit Essigsäureanhydrid, ein Acetylderivat des Amids zu erzeugen. Eine Quecksilberverbindung hat sich gleichfalls nicht erhalten lassen.

Es wurde bereits oben bemerkt, dass man selbst in günstigen Operationen nicht mehr als 50—60 Procent der theoretischen Ausbeute an Citramid erhalte. Es müssen also neben dem Citramid noch andere Verbindungen gebildet werden. Die Mutterlauge der Krystalle enthält in der That, wie dies auch Demondesir[1] bereits angedeutet hat, die Amidosäuren der Citronensäure. Sie waren aber bisher weder dargestellt noch näher untersucht worden. Ihre Isolirung gelingt, nicht ganz mühelos, auf folgende Weise:

Citrodiaminsäure. Die Mutterlauge des Citramids wird zur Consistenz eines Syrups eingedampft, wobei sie eine dunkle Farbe annimmt. Die concentrirte Flüssigkeit setzte selbst nach wochenlangem Stehen keine Krystalle ab. Wird sie aber mit gewöhnlicher Salpetersäure angesäuert und dann mit viel Alkohol und etwas Äther versetzt, so fallen Krystalle aus, welche man direct in Wasser auflösen und durch Wiederfällen mit Alkohol reinigen kann. Ist diese Operation nochmals wiederholt worden, so hat man schöne weisse, luftbeständige Blättchen erhalten, welche bei 158° schmelzen. Diese Krystalle sind in Wasser leicht löslich, die Lösung kann nicht zum Sieden erhitzt werden, ohne dass unter Ammoniakabspaltung Zersetzung eintritt; in Alkohol und Äther lösen sich die Krystalle kaum auf. Die Analyse der bei 100° getrockneten Verbindung zeigte, dass sie die Citrodiaminsäure

$$C_6H_5O_4(NH_2)_2OH$$

darstelle, welcher folgende Werthe entsprechen:

		Theorie	Versuch I.	Versuch II.	Versuch III.
C_6	72	37.89	37.83	—	—
H_{10}	10	5.26	5.27	—	—
N_2	28	14.74	—	14.37	14.86
O_5	80	42.11	—	—	—
	190	100.00.			

Die Zusammensetzung der Säure wurde durch die Analyse ihres Silbersalzes bestätigt. Versetzt man die Lösung des citrodiaminsauren Ammoniaks mit Silbernitrat, so setzt sich erst nach längerer Zeit ein krystallinisches Pulver ab, welches aber, einmal gebildet, schwer löslich

[1] A. o. a. O.

Digitized by Google

in Wasser ist. Bei 100° getrocknet liefert dieses Silbersalz 36.46 Procent Silber. Die Formel

$$C_6H_5O_4(NH_2)_2(OAg)$$

verlangt 36.37 Procent Silber.

Die übrigen Salze der Citrodiaminsäure, selbst das Bleisalz, sind löslich.

Citromonaminsäure. Sie kann in Gestalt ihres Silbersalzes isolirt werden. Zu dem Ende wird die syrupdicke Mutterlauge des Citramids, welche beim Abdampfen sauer geworden ist, mit Ammoniak und dann mit Silbernitrat versetzt. Bei dem Zusatz von Ammoniak muss das richtige Maass eingehalten werden. Hat man zu wenig zugefügt, so bilden sich pflasterartige, nicht leicht zu bearbeitende Niederschläge; zu viel Ammoniak verhindert jedwede Fällung. Ist die geeignete Menge getroffen worden, so entsteht ein gelblichweisser pulveriger Niederschlag, der schnell abfiltrit werden muss, damit nicht das sich langsamer ausscheidende Silbersalz der Diaminsäure mitfalle. Die Analyse des bei 100° getrockneten Pulvers zeigte, dass man es mit dem Silbersalze der Citromonaminsäure

$$C_6H_5O_4(NH_2)(OAg)_2$$

zu thun hatte, welchem folgende Werthe entsprechen:

	Theorie		Versuch			
			I.	II.	III.	IV.
C_6	72	17.78	17.46	—	—	—
H_7	7	1.73	2.00	—	—	—
N	14	3.46	—	3.75	—	—
O_6	96	23.70	—	—	—	—
Ag_2	216	53.33	—	—	53.20	53.01
	405	100.00.				

Die Isolirung der Citromonaminsäure bietet, ihrer grossen Zersetzlichkeit wegen, einige Schwierigkeit. Sie gelingt indessen, wenn man das Silbersalz, in Wasser suspendirt, mit Schwefelwasserstoff behandelt und die vom Schwefelsilber getrennte Flüssigkeit *in vacuo* verdampft. Auf dem Wasserbade würde man nichts anderes als Citronensäure und Ammoniak erhalten Löst man den *in vacuo* gewonnenen festen Rückstand in wenig Alkohol und versetzt die Lösung vorsichtig mit Ligroïn, so erhält man Krystalle der Citromonaminsäure, welche, wie die Citronensäure, an der Luft feucht werden, während die Diaminsäure, wie bereits bemerkt, luftbeständig ist. Die Säure ist ausserordentlich löslich in Wasser, weniger in Alkohol, unlöslich in Äther und in Ligroïn. Der Schmelzpunkt liegt bei 138°. Zum Beweise, dass wirklich die dem Silbersalze entsprechende Säure

Digitized by Google

vorliege, wurde der Stickstoffgehalt der in *in vacuo* getrockneten Säure ermittelt. Es wurden 7.80 Procent Stickstoff gefunden. Die Formel

$$C_6H_5O_4(NH_2)(OH)_2$$

verlangt 7.33.

Wir haben die Citraminsäuren, da es uns zunächst auf das Citramid ankam, stets als Nebenproducte erhalten. Wollte man die Aminsäuren in grösserer Menge gewinnen, so brauchte man nur schwächeres Ammoniak in Anwendung zu bringen. Alsbald sinkt die Ausbeute an Citramid; die Mutterlaugen enthalten alsdann reichliche Mengen der Säuren.

Wenn sich die Citraminsäuren schon bei dem Erhitzen ihrer wässerigen Lösungen leicht in Ammoniak und Citronensäure spalten, so erfolgt diese Umsetzung durch Alkalien und Säuren noch viel schneller. Bei Einwirkung der letzteren entstehen aber ebenfalls unerwartete Umbildungsproducte, und zwar dieselben, welche auch bei dem Citramid beobachtet wurden.

Citrazinsäure. Versetzt man die wässerige Lösung des Citramids oder einer der Citraminsäuren mit Salzsäure und verdampft die Lösung auf dem Wasserbade zur Trockne, so bleibt, beim Auflösen des zurückgebildeten citronensauren Ammoniaks in Wasser, ein gelbliches, schwach krystallinisches Pulver zurück, welches, unlöslich in Wasser und verdünnten Säuren, von Alkalien leicht aufgenommen, mithin als Säure charakterisirt wird. Diese Lösungen, zumal die in Ammoniak, zeigen eine eigenthümlich blaue Fluorescenz. Auf die angegebene Weise erhät man jedoch nur eine äusserst geringe Menge, — nur etwa 5 Procent des angewandten Amids, — von der neuen Substanz. Viel besser ist die Ausbeute, wenn man das Citramid in starker Schwefelsäure löst und diese Lösung in Wasser giesst. Es kommt hierbei indessen wesentlich auf die Concentration der Säure an. Bei Anwendung von unverdünnter Schwefelsäure entsteht keine Spur der Verbindung; eine Säure, welche 70 bis 75 Procent Schwefelsäurehydrat enthält, wurde schliesslich am zweckdienlichsten befunden. Man übergiesst das Citramid mit dem vier- bis fünffachen Gewichte von dieser Säure und erhitzt die Mischung auf etwa 130°; es bildet sich schnell eine klare Lösung, welche nur wenig gefärbt ist. Bei etwas starkem Erwärmen tritt namentlich gegen Ende der Operation eine schwache Gasentwicklung auf. Lässt man die Schwefelsäurelösung nach dem Erkalten in das zwei- bis dreifache Volum kalten Wassers fliessen, so scheidet sich die neue Säure alsbald in Gestalt eines gelblichen Pulvers aus, welches nur mit Wasser gewaschen zu werden braucht, um ein nahezu reines chemisches Individuum darzustellen.

Digitized by Google

Man erkannte bald, dass es keineswegs nur das Citramid ist, welches dieses Verhalten zeigt. Die beiden oben erwähnten Citraminsäuren erleiden unter dem Einflusse der Schwefelsäure genau dieselbe Umbildung. Die Mutterlauge des Citramids lässt sich daher gleichfalls mit Vortheil auf die neue Säure verarbeiten. Ja man braucht, will man sich schnell grössere Mengen derselben verschaffen, das Amid gar nicht besonders zu isoliren. Es genügt für diesen Zweck, den Methyläther der Citronensäure einfach mit der gewöhnlichen Ammoniakflüssigkeit des Handels zu übergiessen, die Flüssigkeit nach Lösung des Äthers zur Consistenz eines Syrups einzudampfen und den Syrup alsdann in angegebener Weise mit Schwefelsäure zu behandeln, um nach dem Eingiessen der Lösung in Wasser reichliche Mengen der neuen Säure zu gewinnen. Auf diese Weise können leicht bis zu 25 Procent des angewendeten Aethers an Säure erhalten werden.

Angesichts dieser Ergebnisse lag es nahe, zu versuchen, ob sich die neue Verbindung nicht auch direct aus dem citronensauren Ammoniak darstellen lasse. Trocknes citronensaures Ammoniak in Schwefelsäure von der angegebenen Concentration gelöst, gab auf Zusatz von Wasser keine Fällung. Aber auch nachdem das Salz mehrere Stunden lang in geschlossener Röhre auf 200° erhitzt worden war, liessen sich durch ähnliche Behandlung nur braune, völlig armorphe Niederschläge erhalten, welche mit der aus den Amiden erhaltenen Substanz nichts gemein hatten. Es wurden indessen, namentlich bei Luftzutritt, die eigenthümlichen Blaufärbungen beobachtet, welche von Sabanin und Laskowsky[1] als charakteristisch für die Citronensäure bereits angegeben worden sind.

Die Reinigung der neuen Substanz bot keine Schwierigkeiten. Sie wurde nach dem Auswaschen mit Wasser zur Entfernung zufälliger Verunreinigungen in Ammoniak gelöst und nach dem Filtriren mit Salzsäure gefällt. Die Säure wurde auf diese Weise um einen Stich heller, liess sich aber nicht mehr als krystallinisch erkennen.

Die Säure enthält kein Krystallwasser, denn das vacuumtrockene Pulver verliert bei 100° nicht mehr an Gewicht. Die Elementaranalyse des Körpers führte zu der einfachen Formel $C_6H_5NO_4$:

	Theorie		Versuch		
			I.	II.	III.
C_6	72	46.45	46.28	46.18	—
H_5	5	3.23	3.56	3.46	—
N	14	9.03	—	—	9.36
O_4	64	41.29	—	—	—
	155	100.00.			

[1] Sabanin und Laskowsky, Fres. Zeitschr. XVII, 74.

Digitized by Google

Für die neue Säure schlagen wir zur Erleichterung der Beschreibung den Namen *Citrazinsäure* vor, welcher keinerlei Ansicht über ihre Constitution ausdrückt.

Die Bildung der Citrazinsäure aus den Amiden der Citronensäure erfolgt, indem sich aus dem Citramid (I) Ammoniak, aus der Citrodiaminsäure (II) Ammoniak und Wasser, und endlich aus der Monaminsäure (III) Wasser abspaltet:

$$C_6H_{11}N_3O_4 = C_6H_5NO_4 + 2H_3N \quad (I)$$
$$C_6H_{10}N_2O_5 = C_6H_5NO_4 + H_3N + H_2O \quad (II)$$
$$C_6H_9NO_6 = C_6H_5NO_4 + 2H_2O \quad (III)$$

Die Citrazinsäure ist in Wasser, selbst in siedendem, nur äusserst wenig löslich, aber doch noch eben hinreichend, um ihre saure Reaction deutlich erkennen zu lassen. Von den übrigen neutralen Lösungsmitteln wird sie ebenfalls nicht aufgenommen. In siedender, concentrirter Salzsäure löst sie sich, obwohl auch nur spärlich; beim Erkalten der Lösung fällt sie deutlich krystallinisch aus. Der Niederschlag besteht aus mikroskopischen Platten. Concentrirte Schwefelsäure löst sie beim Erwärmen; auf Wasserzusatz fällt sie unverändert aus, wie bereits bei Beschreibung der Darstellung bemerkt wurde. Mit grosser Leichtigkeit löst sich die Citrazinsäure in allen alkalischen Flüssigkeiten, zumal auch in den Carbonaten der Alkalien, deren Kohlensäure in diesem Falle unter Aufbrausen entweicht. Die Lösungen der Citrazinate färben sich an der Luft schnell bläulich mit einem Stich in's Grünliche. Besonders auffallend ist diese Erscheinung bei der ammoniakalischen Lösung, welche nach einiger Zeit die tiefblaue Farbe des Kupferoxydammoniaks annimmt. Auf Zusatz von Säuren oder Alkalien verschwindet die Färbung augenblicklich. Eine sehr charakteristische Reaction zeigt die Citrazinsäure mit den Nitriten. Wirft man ein Stäubchen der Säure in eine heisse, möglichst neutrale Lösung von Kalium- oder Natriumnitrit, so färbt sich die Flüssigkeit augenblicklich tiefblau; hatte man eine kalte Lösung angewendet, so zeigt sich die Färbung erst nach einigen Minuten. Die Färbung erhält sich geraume Zeit.

Die Citrazinsäure ist eine sehr stabile Verbindung; sie verträgt eine Temperatur von 275° ohne Zersetzung, bei Temperaturen über 300° verkohlt sie ohne zu schmelzen. Sie lässt sich mit den stärksten Alkalien Stunden lang im Sieden erhalten, ohne dass sich eine Spur von Ammoniak entwickelte. Ammoniak tritt selbst beim Schmelzen mit Alkalien nicht auf. Die Säure zerlegt sich in diesem Falle bei sehr starkem Erhitzen unter Bildung von Cyankalium; auch Oxalsäure wurde wahrgenommen. Salzsäure übt bei mässigen Temperaturen keine

Digitized by Google

Wirkung auf die Citrazinsäure; bei 250° wird sie unter Ammoniakabspaltung und Bildung humusartiger Materien vollständig zersetzt.

Salze der Citrazinsäure. Dieselben bieten nur wenig Charakteristisches. Die Salze der Alkalien sind sehr löslich, das Ammoniaksalz zerlegt sich beim Eindampfen unter Rückbildung der Säure. Das Baryum- und das Calciumsalz sind schwer lösliche weisse Niederschläge, welche, wenn die Fällung in warmen verdünnten Lösungen stattfindet, in feinen, nadelförmigen Krystallen erhalten werden. An der Luft nehmen alle diese Salze, besonders im feuchten Zustande, schnell eine blaue oder blaugrüne Färbung an. Das Bleisalz ist ein gelblicher, das Kupfersalz ein brauner, das Silbersalz ein zeisiggelber Niederschlag, welch' letzterer nach kurzer Zeit sich unter Schwärzung zersetzt. Die bei der Analyse erhaltenen Ergebnisse sind, in Folge der leichten Veränderlichkeit der Salze beim Trocknen, nur wenig befriedigend. Das Baryum- und das Calciumsalz, welche ihrer krystallinischen Beschaffenheit wegen für die Analyse noch am geeignetsten erschienen, gaben Werthe, welche auf die Formel

$$C_6H_3M^{II}NO_4$$

hindeuten. Es wurde aber stets ein Verlust an Baryum und Calcium beobachtet, welcher der Gegenwart von $^1/_2$ Mol. Wasser entsprechen würde. Die Analyse des bei 150° getrockneten Baryumsalzes lieferte 45.80 und 46.08 Procent Baryum. Das wasserfreie Baryumcitrazinat verlangt 47.24 Procent. Bei Gegenwart von $^1/_2$ Mol. Wasser berechnet sich der Baryumgehalt zu 45.82. In dem Calciumsalz, welches seiner grösseren Zersetzlichkeit wegen nur bei 100° getrocknet werden konnte, wurden 19.83, 19.70 und 20.09 Procent Calcium gefunden. Das wasserfreie Calciumsalz der Citrazinsäure enthält 20.78 Procent Calcium. Unter Annahme von $^1/_2$ Mol. Wasser berechnen sich 19.79 Procent. Obwohl diese Zahlen Vieles zu wünschen übrig lassen, so gestatten sie doch den Schluss, dass 2 Atome Wasserstoff in dem Molecul der Citrazinsäure durch Metall ersetzbar sind.

Alkylderivate der Citrazinsäure. Befriedigendere Ergebnisse wurden bei der Untersuchung der Äther erhalten. Die Säure in Methyl- oder Aethylalkohol vertheilt, löst sich bei Einleiten von Salzsäuregas auf. Beim Erkalten der warm gewordenen Lösungen krystallisiren die Aether zum Theile aus, der Rest wird durch Wasser gefällt.

Das *Methylderivat* der Säure bildet glänzende Blättchen, welche sich, über 220° erhitzt, unter Bräunung zersetzen. Ein Theil sublimirt unverändert. Die Verbindung ist nur wenig in Wasser, Alkohol und Äther löslich. Die Analyse der aus viel Alkohol umkrystallisirten Substanz führte zu der Formel:

$$C_7H_7NO_4 = C_6H_4(CH_3)NO_4.$$

Digitized by Google

		Theorie	Versuch
C_7	84	49.70	49.76
H_7	7	4.14	4.37
N	14	8.29	—
O_4	64	37.87	—
	169	100.00.	

Äthylderivat der Citrazinsäure. Dasselbe wurde genau so dargestellt wie die Methylverbindung, welcher es auch, was Eigenschaften und Zusammensetzung anlangt, vollkommen entspricht. Die Formel

$$C_8H_9NO_4 = C_6H_4(C_2H_5)NO_4$$

verlangt folgende Werthe:

		Theorie	Versuch	
C_8	96	52.46	52.34	—
H_9	9	4.91	4.98	—
N	14	7.65	—	7.72
O_4	64	34.98	—	—
	183	100.00.		

Die beiden Alkylverbindungen besitzen, wie man nicht anders erwarten konnte, noch saure Eigenschaften. Sie lösen sich in Ammoniak mit gelber Farbe und werden durch Säuren aus diesen Lösungen wieder gefällt. Die ammoniakalische Lösung giebt mit Metalllösungen ähnliche Niederschläge wie die Citrazinsäure selbst. Bei der Analyse dieser Salze wurden ebenfalls keine ganz einfachen Werthe erhalten. Sie scheinen indessen nach den Formeln

$$C_6H_3(CH_3)M^{I}NO_4 \text{ und } C_6H_3(C_2H_5)M^{I}O_4$$

zusammengesetzt zu sein. Indessen wurden auch hier wieder Zahlen gefunden, welche auf die Gegenwart von $^1/_2$ Mol. Wasser in den Salzen hindeuten.

Um die Zusammensetzung der Salze der Citrazinsäure sowohl als ihrer Äthersäuren endgültig festzustellen, sind weitere Versuche erforderlich.

Acetylderivat der Citrazinsäure. Ein solches entsteht schon, wenn man die Säure in kochendem Essigsäureanhydrid auflöst. Beim Erkalten scheidet sich die Verbindung krystallinisch aus. Da sie sich sowohl mit Wasser als mit Alkohol leicht unter Rückbildung der Säure zersetzt, so konnte sie nur durch Pressen gereinigt werden. Die zuerst *in vacuo*, dann längere Zeit bei 100° getrocknete Verbindung zeigte die Zusammensetzung einer Diacetylverbindung:

$$C_{10}H_9NO_6 = C_6H_3(C_2H_3O)NO_4.$$

Digitized by Google

	Theorie		Versuch
C_{10}	120	50.21	50.23
H_9	9	3.76	4.01
N	14	5.86	—
O_6	96	40.17	—
	239	100.00.	

Umwandlung der Citrazinsäure in Tricarballylsäure. Die Zusammensetzung der Citrazinsäure wird in erwünschter Weise durch die Umwandlung bestätigt, welche sie unter dem Einflusse von Reductionsmitteln erleidet. Wird diese Säure längere Zeit mit Zinn und Salzsäure gekocht, so löst sie sich langsam auf. Die entzinnte Lösung lieferte, stark eingedampft, krystallinische Krusten, welche vor der Analyse noch einmal aus Wasser umkrystallisirt wurden. Diese Krystalle stellen eine Säure dar, welche durch die Analyse sowohl als durch das Studium ihrer Eigenschaften mit der von Dessaignes[1] und Simpson[2] fast gleichzeitig aus der Aconitsäure beziehungsweise aus dem Allylcyanid dargestellten Tricarballylsäure identificirt wurde. Die Formel

$$C_6H_8O_6$$

verlangt folgende Werthe:

	Theorie		Versuch
C_6	72	40.91	40.76
H_8	8	4.55	4.77
O_6	96	54.54	—
	176	100.00	

Das Bleisalz der Säure, ein weisser amorpher Niederschlag, lieferte 63.85 Procent Blei; das tricarballylsaure Blei enthält 64.22 Procent.

Der Schmelzpunkt der Säure wurde bei 158° gefunden, wie er von Simpson und von Wichelhaus[3] (157°) beobachtet worden ist. Es soll indessen nicht unerwähnt bleiben, dass der Schmelzpunkt der wiederholt umkrystallisirten Säure neuerdings von Lippmann[4] zu 166° angegeben wird.

Der Übergang der Citrazinsäure in die Tricarballylsäure ist in der Gleichung:

$$C_6H_5NO_4 + 2H_2O + H2 = C_6H_8O_6 + H_3N$$

gegeben.

Die im Vorstehenden beschriebenen Versuche haben die Natur der Citrazinsäure nicht völlig klargestellt. Namentlich zeigen sich

[1] Dessaignes, Lieb. Ann. Suppl. II, 188.
[2] Simpson, Lieb. Ann. CXXVIII, 351.
[3] Wichelhaus, Lieb. Ann. CXXXII, 61.
[4] Lippmann, diese Berichte XII, 1649.

Digitized by Google

bei der Analyse der Salze Unregelmässigkeiten, welche noch nicht vollständig ergründet worden sind. Die Untersuchung der Säure soll desshalb auch noch weitergeführt werden. Immerhin machen es die bereits vorliegenden Ergebnisse, zumal wenn man gleichzeitig den leichten Übergang der Citrazinsäure in unzweifelhafte Pyridinverbindungen in's Auge fasst, welcher im Folgenden dargelegt werden soll, sehr wahrscheinlich, dass man es mit einer Dioxycarbonsäure des Pyridins

$$C_5H_2(OH)_2N.COOH$$

zu thun habe.

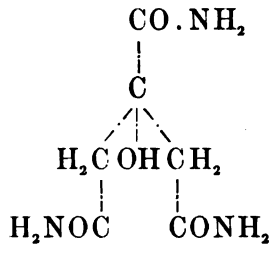
Mit dieser Auffassung stimmt die Zusammensetzung der Methyl- und Äthylverbindung, für welche man annehmen darf, dass die Alkylirung in der Carboxylgruppe stattgefunden hat. Weniger gut bequemen sich obiger Auffassung die Ergebnisse, welche bei der Analyse der Salze erhalten wurden. Auffallend bleibt es jedenfalls, dass man bis jetzt keine Salze

$$C_5H_2(OH)_2N.COOM^I \text{ und } C_5H_2(OM^I)_2COOM^I$$

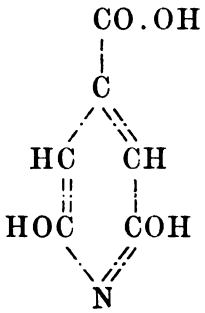
gewonnen hat.

Bestätigt sich durch weitere Studien die Ansicht, dass in der Citrazinsäure eine Dioxypyridincarbonsäure vorliege, so wird man anzunehmen haben, dass die Ringbildung sich bei der Abspaltung des Ammoniaks aus dem Citramid unter dem Einflusse der Schwefelsäure vollzogen habe, wie sich dies durch folgendes Schema veranschaulichen lässt:

Citramid



Citrazinsäure



Diese für die Citrazinsäure gegebene graphische Formel enthält noch viel Hypothetisches. Die Hydroxylgruppen, welche hier zu der Carboxylgruppe in der Metastellung angenommen sind, könnten ebenso gut in der Orthostellung oder sogar die eine in der Meta-, die andere in der Orthostellung sich befinden. Wohl aber darf man durch die Genesis der Säure als festgestellt betrachten, dass der Stickstoff des Pyridinringes zu der Carboxylgruppe die Parastellung einnehme. Es knüpfen sich an diese Feststellung einige Consequenzen, welche für

Digitized by Google

die Auffassung der Pyridinverbindungen im Allgemeinen von Interesse sind, und auf die wir weiter unten zurückkommen werden.

Man kennt bereits eine Säure von der Zusammensetzung der Citrazinsäure. Es ist dies die von How[1] entdeckte Komenaminsäure, welche in letzter Zeit von Ost[2] mit schönen Erfolgen studirt worden ist. Einige Eigenschaften der Citrazinsäure erinnern in der That an die der Komenaminsäure, so z. B. die grosse Stabilität, welche, wie Ost, früheren Angaben entgegen, nachgewiesen hat, auch von der Komenaminsäure getheilt wird. Auch die Salze der beiden Säuren zeigen eine unverkennbare Ähnlichkeit. Man braucht aber die Eigenschaften beider Verbindungen nur etwas genauer mit einander zu vergleichen, um alsbald zu erkennen, dass hier nur Isomerie, nicht Identität vorliege. Die Komenaminsäure, obgleich ebenfalls schwer löslich in kaltem Wasser, lässt sich aus siedendem Wasser umkrystallisiren, aus dem sie mit 2 Mol. Krystallwasser anschiesst, während sich die Citrazinsäure unter keinerlei Umständen mit Wasser vereinigt. Ferner lösen sich die Komenaminsäure sowie ihre Äther leicht in Salzsäure, eine Fähigkeit, welche, wie bereits bemerkt, der Citrazinsäure und ihren Äthern abgeht. Noch verdient bemerkt zu werden, dass die Komenaminsäure mit Eisenchlorid eine blutrothe Reaction giebt, während die Citrazinsäure nur eine ganz unbedeutende Färbung zeigt. Endlich unterscheidet sich die Citrazinsäure auch durch das bereits oben erwähnte Verhalten zu den Nitriten von der Komenaminsäure. Wir verdanken der Güte des Hrn. Prof. Ost eine Probe reiner Komenaminsäure; sie zeigt mit den Nitriten keinerlei Blaufärbung.

Die Isomerie der Citrazinsäure mit der Komenaminsäure ist gleichwohl maassgebend für die Richtung gewesen, welche bei der Untersuchung der neuen Säure zunächst eingeschlagen worden ist.

Durch Einwirkung von Phosphorpentachlorid verwandelt sich die Komenaminsäure in eine chlorirte Pyridincarbonsäure, und es schien von Interesse, einen vergleichenden Versuch mit der Citrazinsäure anzustellen. Es hat sich in der That ergeben, dass auch letztere ein ganz ähnliches Verhalten zeigt, dass sie gleichfalls in eine chlorirte Pyridincarbonsäure übergeht, welche aber mit der der Komenaminsäure entstammenden nicht identisch, sondern nur isomer ist.

Dichlorpyridincarbonsäure. Digerirt man die Citrazinsäure (1 Gew.-Th.) am Rückflusskühler längere Zeit mit Phosphorpentachlorid (5 Gew.-The.), welchem man, um die Masse zu verflüssigen, etwas Phosphoroxychlorid zugesetzt hat, so löst sich die Säure unter Salzsäureentwicke-

[1] How, Ann. Chem. Pharm. LXXX, 65.
[2] Ost, Journ. f. pr. Chem., N. F., XXVII, 257.

Digitized by Google

lung zu einer homogenen Flüssigkeit auf. Wird diese Flüssigkeit in Wasser gegossen, so scheidet sich ein schweres Öl von stechendem Geruch aus, welches sich bei längerer Berührung mit Wasser in Citrazinsäure zurückverwandelt, also wohl das Chlorid der Säure enthalten dürfte.

Eine tiefere Umbildung erleidet die Säure, wenn man die Mischung derselben mit Pentachlorid und Oxychlorid im geschlossenen Rohr drei bis vier Stunden lang auf 250° erhitzt. Beim Öffnen des Rohrs entweicht Salzsäure in Strömen. Wird der flüssige Röhreninhalt gelinde erwärmt, bis sich das Phosphoroxychlorid verflüchtigt hat, so bleibt ein stechend riechendes Öl zurück, welches bei der Behandlung mit viel siedendem Wasser zum grössten Theil aufgelöst wird. Leitet man durch die siedende Flüssigkeit überdies Wasserdampf, so verflüchtigen sich kleine Mengen eines Öls von scharfem Geruch, aus dem sich gelegentlich Krystallnadeln absetzen. Aus dem filtrirten Kolbeninhalt schiesst beim Erkalten eine reichliche Krystallisation gelblicher Blättchen an, welche, ein paar Mal aus Wasser oder besser verdünntem Alkohol umkrystallisirt, farblos werden.

Die Krystalle zeigen den constanten Schmelzpunkt 210°; bei höherer Temperatur sublimirt ein Theil, indem die grössere Menge verkohlt. Die Krystalle lösen sich schwer in kaltem, leichter, aber doch nur wenig, in siedendem Wasser, mässig in kaltem, reichlich in siedendem Alkohol, ausserordentlich leicht in Äther; unlöslich in Salzsäure, lösen sie sich bei gelindem Erwärmen in concentrirter Schwefelsäure und werden daraus durch Wasser unverändert gefällt. Endlich lösen sie sich leicht in allen alkalischen Flüssigkeiten, aus denen sie durch Salzsäure niedergeschlagen und somit als Säure erkannt werden. Die Krystalle können bei 100° ohne Verlust getrocknet werden. Auch mit Wasserdampf lässt sich der Körper nicht verflüchtigen. Die oben erwähnten Krystalle, welche sich aus dem Destillate abgesetzt hatten, sind allerdings durch eine Schmelzpunktbestimmung mit der Säure identificirt worden. Aber diese Krystalle sind offenbar in Form des Säurechlorids übergegangen, aus welchem sich bei der Berührung mit Wasser die Säure zurückgebildet hat. Das neben den Krystallen in dem Destillate auftretende Öl ist, wie eine Chlorbestimmung (63.36 Procent) ergeben hat, sehr reich an Chlor; es ist nicht näher untersucht worden.

Bei der Analyse, für welche die neue Säure bei 100° getrocknet wurde, gab sie sich als eine Dichlorpyridincarbonsäure,

$$C_6H_3Cl_2NO_2 = C_5H_2Cl_2N.COOH,$$

zu erkennen:

Digitized by Google

		Theorie	Versuch	
C_6	72	37.50	37.52	—
H_3	3	1.56	1.83	—
Cl_2	71	36.98	—	36.70
N	14	7.29	—	—
O_2	32	16.67	—	—
	192	100.00.		

Mit Silbernitrat liefert das Ammoniaksalz dieser Säure einen weissen Niederschlag, welcher aus viel siedendem Wasser in prachtvollen, farblosen Nadeln erhalten wird. In dem *in vacuo* getrockneten Silbersalze wurden 35.86 Procent Silber gefunden. Das Silbersalz

$$C_5H_2Cl_2N.COOAg$$

verlangt 36.12 Procent.

Die Bildung der chlorirten Säure aus der Citrazinsäure ist leicht verständlich, wenn man letztere, im Sinne der bereits oben gegebenen Andeutungen, als eine Dioxypyridincarbonsäure auffassen darf. Man hat dann die Gleichung

$$C_5H_2(OH)_2N.COOH + 2PCl_5 = C_5H_2Cl_2N.COOH + 2PCl_3O + 2HCl.$$

Die aus der Citrazinsäure entstehende gechlorte Säure ist isomer mit der von Ost aus der Komenaminsäure in ähnlicher Weise gewonnenen. Dass beide Säuren nicht identisch sind, erhellt alsbald aus der Vergleichung ihrer Eigenschaften. Unsere Säure krystallisirt stets wasserfrei, während die Ost'sche mit 1 Mol. Wasser anschiesst. Der Schmelzpunkt der letzteren liegt bei 180°, während die Säure aus der Citrazinsäure erst bei 210° schmilzt. Erstere verflüchtigt sich überdies mit Wasserdämpfen, eine Eigenschaft, welche dem Citrazinsäure-Abkömmling abgeht. Am unzweideutigsten aber stellt sich die Verschiedenheit beider Säuren heraus, wenn sie der Einwirkung der Jodwasserstoffsäure unterworfen werden.

Umwandlung der Dichlorpyridincarbonsäure in Pyridincarbonsäure. Erhitzt man die chlorirte Säure (1 Gew.-Th.) mit stärkster Jodwasserstoffsäure (5 Gew.-The.) im geschlossenen Rohr drei bis vier Stunden lang auf eine Temperatur von 170°—180°, so ist das Hauptproduct eine chlorfreie Säure. Die Digestionsröhren enthalten kein gespanntes Gas, in der Flüssigkeit hat eine reichliche Ausscheidung von Jodkrystallen stattgefunden. Man versetzt den Röhreninhalt mit Wasser und erhitzt längere Zeit zum Sieden, um das Jod und die noch vorhandene Jodwasserstoffsäure möglichst zu entfernen. Wird die filtrirte Flüssigkeit nunmehr vorsichtig mit Ammoniak versetzt, so scheiden sich braun gefärbte Krystalle aus, welche sich in überschüssig zugefügtem Ammoniak wieder auflösen würden. Man reinigt die Kry-

Digitized by Google

stalle am bequemsten durch Sublimation. Beim langsamen Erhitzen der abgepressten Krystalle entweicht zuerst noch etwas Jod, alsdann sublimirt die Säure in weissen lockeren Flittern, welche sich in Form eines Krystallkranzes in dem oberen Theile der Schale anlegen. Die Krystallflitter werden zur vollständigen Reinigung nochmals aus siedendem Wasser umkrystallisirt.

Die Analyse der bei 100° getrockneten Substanz zeigt, dass ein einfacher Ersatz des Chlors durch Wasserstoff stattgefunden hat. Der Formel

$$C_6H_5NO_2 = C_5H_4N.COOH$$

entsprechen folgende Werthe:

		Theorie	Versuch
C_6	72	58.54	58.48
H_5	5	4.07	4.24
N	14	11.38	—
O_2	32	26.01	—
	123	100.00.	

Die Säure ist schwer löslich in kaltem, leichter in heissem Wasser; in Alkohol, selbst siedendem, sowie in Äther ist sie nur wenig löslich. Das Ammoniaksalz und die Salze der Alkalien sind löslich; sie bildet ein unlösliches Silbersalz, welches, zunächst ein flockiger Niederschlag, beim Erwärmen krystallinisch wird. Das Kupfersalz ist ein blaugrüner, erkennbar krystallinischer Niederschlag.

Die Säure löst sich als Pyridincarbonsäure auch in Salzsäure; diese Lösung giebt mit concentrirtem Platinchlorid ein in dicken Prismen krystallisirendes orangegelbes Platinsalz. Die Formel

$$2(C_5H_4N.COOH.HCl)PtCl_4 + 2H_2O$$

erheischt 28.38 Procent Platin; gefunden wurden 28.01 Procent. Die beiden Wassermolecule entweichen beim Erwärmen auf 130°. Der berechnete Wasserverlust ist 5.19, der gefundene 5.23 Procent.

Dass die Säure sublimirbar sei, wurde bereits angegeben; sie hinterlässt keinen Rückstand. In der Luft erwärmt, verflüchtigt sie sich ohne zu schmelzen, wird sie aber im zugeschmolzenen Röhrchen erhitzt, so schmilzt sie bei 306°. Dieser Schmelzpunkt charakterisirt den Körper unzweifelhaft als die von Skraup[1], Weidel[2] und Anderen studirte, bisher mit dem Namen γ-Pyridincarbonsäure oder auch wohl Isonicotinsäure bezeichnete Verbindung. Skraup giebt den Schmelzpunkt der γ-Pyridincarbonsäure zu 305°, Weidel den der

[1] Skraup, Berichte der chem. Ges. XII, 2332.
[2] Weidel, Monatshefte I, 41.

Digitized by Google

Isonicotinsäure zu 309.5° an. Die von Weidel[1] aufgefundene, aus α-Picolin entstehende Picolinsäure (α-Pyridincarbonsäure) schmilzt bei 134—136°, die zunächst aus Nicotin dargestellte, von Huber[2], Weidel[3] und Laiblin[4] untersuchte Nicotinsäure (β-Pyridincarbonsäure) schmilzt bei 225°. Die von Ost aus Komenaminsäure erhaltene Carbonsäure ist durch die Bestimmung ihres Schmelzpunktes unzweifelhaft mit der Picolinsäure identificirt worden, von der aus der Citrazinsäure entstehenden mithin absolut verschieden.

Es soll nicht unerwähnt bleiben, dass unsere Pyridincarbonsäure auch in allen übrigen Eigenschaften, — soweit dieselben bekannt sind, — mit der Isonicotinsäure übereinstimmt. Wie bereits oben angedeutet worden ist, lässt die Bildung der Citrazinsäure aus der Citronensäure schliessen, dass in ersterer Stickstoff und Carboxylgruppe die Parastellung zu einander einnehmen. Dieselbe Stellung muss begreiflicher Weise auch für die der Citrazinsäure entstammenden Abkömmlinge gelten, und es ist somit ein weiterer Beweis erbracht, dass die Isonicotinsäure als die Parapyridincarbonsäure aufgefasst werden muss.

Reduction der Paradichlorpyridincarbonsäure zu Parapicolin. Bei einigen Reductionen der chlorirten Säure wurde unter Beibehaltung aller übrigen Versuchsbedingungen der Mischung etwas gewöhnlicher Phosphor zugesetzt. In diesen Fällen waren die beobachteten Erscheinungen andere. Die Digestionsröhren, aus denen beim Öffnen ein gespanntes Gas entwich, enthielten eine farblose oder schwach gelb gefärbte, stark saure Flüssigkeit, welche auf Zusatz eines Alkalis den Geruch einer Pyridinbase zu erkennen gab. Zur Abscheidung derselben wurde durch die mit Alkali übersättigte Flüssigkeit ein Strom Wasserdampf geleitet und das stark alkalisch reagirende Destillat mit Salzsäure zur Syrupconsistenz eingedampft. Zusatz von Alkali zu diesem Syrup setzte eine farblose Base in Freiheit, welche, mit dem Scheidetrichter abgehoben und über Kalihydrat entwässert, den constanten Siedepunkt 142—144° zeigte. Die Reduction hatte sich offenbar auf die Carboxylgruppe erstreckt, und statt der Parapyridincarbonsäure war methylirtes Pyridin, d. h. Picolin und zwar Parapicolin, entstanden. Die Analyse des schönen, ziemlich schwer löslichen, in vierseitigen Blättchen krystallisirenden Platinsalzes liess in dieser Beziehung keinen Zweifel. Das *in vacuo* getrocknete Salz verlor, auf 140° erhitzt, nichts an Gewicht.

---

[1] Weidel, Berichte der chem. Ges. XII, 1992.
[2] Huber, Lieb. Ann. CXLI, 277.
[3] Laiblin, Lieb. Ann. CXCVI, 134.
[4] Weidel, Lieb. Ann. CLXV, 130.

Digitized by Google

Der Formel

$$C_{12}H_{16}N_2PtCl_6 = 2(C_5H_4(CH_3)N \cdot HCl)PtCl_4$$

entsprechen folgende Werthe:

	Theorie		Versuch	
C_{12}	144	24.08	24.37	—
H_{16}	16	2.68	3.20	—
N_2	28	4.68	—	—
Pt	197	32.94	—	32.85
Cl_6	213	35.62	—	—
	398	100.00.		

Wird das Parapicolin vorsichtig mit Kaliumpermanganat oxydirt, so entsteht wieder die bei 306° schmelzende Parapyridincarbonsäure.

Bemerkenswerth ist die Verschiedenheit der Ergebnisse, welche bei der Einwirkung des Jodwasserstoffs auf die Dichlorpyridincarbonsäure bei Abwesenheit und bei Gegenwart von Phosphor erhalten wurden. Während sich im ersten Falle einfach Wasserstoff dem Chlor substituirt, wird im letzteren die Carboxylgruppe zur Methylgruppe reducirt. Derartige Reductionen sind von Berthelot[1] bereits mehrfach beobachtet worden, z. B. auch bei der Benzoësäure, welche dabei in Toluol überging. Die Temperaturen, bei welchen Berthelot arbeitete, waren aber um 100° höher als diejenige, bei welcher sich die Umwandlung der in erster Linie gebildeten Parapyridincarbonsäure in Methylpyridin vollzieht.

Noch soll nicht unerwähnt bleiben, dass Versuche, durch directe Behandlung der Citrazinsäure mit Jodwasserstoffsäure zu Pyridinderiraten zu gelangen, ohne Erfolg geblieben sind. Der Stickstoff tritt sofort als Ammoniak aus.

Die eigenthümliche Umbildung, welche die Amide der Citronensäure unter dem Einflusse der Schwefelsäure erleiden, hat uns veranlasst, das Verhalten der Amide anderer mehrbasischer Säuren der aliphatischen Reihe in ähnlicher Richtung zu studiren. Die Ergebnisse dieser Untersuchung werden wir der Akademie in einer späteren Mittheilung vorlegen.

[1] Berthelot, Bull. soc. chim. de Paris 1868, I, 96.

Digitized by Google

Digitized by Google

46. Untersuchungen über die Bedeutung todter Röhren und lebender Zellen für die Wasserbewegung in der Pflanze.

Von Dr. M. Westermaier.

(Vorgelegt von Hrn. Schwendener am 27. November; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XLVIII]; — ausgegeben am 4. December.)

Hierzu Taf. VI.

Immer festeren Boden gewinnt in neuester Zeit die Ansicht, dass der Wasserbedarf der Pflanze bis in die Spitzen der höchsten baumartigen Gewächse hinauf zunächst aus dem Vorrath gedeckt wird, welcher in den Gefässen und Tracheïden enthalten ist, und dass diese Elemente zugleich als Reservoire und als Leitungen fungiren. Diese mehr und mehr sich Bahn brechende Vorstellung wird um so früher zur feststehenden Lehre in der Gewebephysiologie werden, je mehr sich die Zahl der bestehenden anatomisch-physiologischen Wechselbeziehungen häuft.

Nachdem ich in einer früheren Publication[1] dem lebenden Parenchym des Xylems eine entscheidende Bedeutung für die Wasserbewegung zugeschrieben habe, liegt es mir natürlich nahe, bei Weiterverfolgung dieser Fragen für die dort vertretene Ansicht neue Stützen beizubringen. Es handelt sich hiebei hauptsächlich um folgende zwei Sätze:

I. Die anatomische Thatsache des vielfachen Contacts zwischen dem parenchymatischen und dem Gefässsystem hat ihre vorzüglichste Bedeutung darin, dass die vereinte Thätigkeit beider Systeme die Wasserbewegung bewerkstelligt, nicht aber die isolirte Thätigkeit eines dieser Systeme.

II. Das lebende Parenchym vermag für sich allein durch Saugung von Zelle zu Zelle Wasser nur geringe Strecken weit nach oben zu befördern.

Nach den zwei eben bezeichneten Richtungen hin bewegen sich auch die hier mitgetheilten Untersuchungen.

[1] Ber. der Deutschen Bot. Gesellschaft. Bd. I. S. 373.

Digitized by Google

I. Physiologische Bedeutung intercellularer Gänge im Xylem von Equisetum hiemale und einiger Monokotylen.

Wenn wirklich die Hauptrolle der Gefässe in der Function der Wasserleitung zu erblicken ist, und wenn insbesondere die so innige anatomische Beziehung der Gefässe und Tracheïden zu den lebenden Zellen für diese Function von grösstem Gewicht ist, so kann die Frage mit Recht aufgeworfen werden, ob die intercellularen Gänge im Xylem mancher *Monokotylen* und der *Equiseten* in ähnlicher Weise wie die Gefässe fungiren (d. h. also wenigstens zeitweise Wasser führen); denn die genannten Kanäle (bisher als Luftgänge angesehen) stellen nicht bloss wie die Gefässe todte Röhren im Gefässbündel dar, sondern sind auch ähnlich den Gefässen von zartwandigen Zellen begleitet, ja mehr oder minder umhüllt. Entspricht nun dieser anatomischen Analogie auch eine physiologische? Wir werden sehen, dass zwischen den beiderlei todten Kanälen, den Gefässen einerseits, den Gängen anderseits auch in physiologischer Hinsicht Parallelismus besteht.

Es liess sich der jedenfalls zeitweilige Wassergehalt dieser Intercellulargänge in einer Reihe von Fällen constatiren. Die Methode der Beobachtung war folgende. Dicke Querschnitte der betreffenden Pflanzentheile wurden ohne Medium und ohne Deckglas sofort nach ihrer Anfertigung auf dem Objectträger in Luft bei mässiger Vergrösserung mikroskopisch untersucht. Das allmählich verdunstende Wasser macht dann unter den Augen des Beobachters der auftretenden Luft Platz. — Die in Rede stehenden Gänge liegen bekanntlich unmittelbar in der Nachbarschaft der primordialen Gefässe.

Es wurden näher untersucht *Equisetum hiemale* (Stamm), *Sagittaria sagittaefolia* (Blattstiel), *Butomus umbellatus* (Blatt), *Alisma Plantago* (Blattstiel), *Heleocharis palustris* (Halm), *Scirpus silvaticus* (Halm), *Acorus Calamus* (Blatt). Während die erste Pflanze der hier aufgeführten Reihe die Erscheinung am leichtesten und reichlichsten darbietet, sah ich dieselbe bei *Acorus Calamus* nur sehr selten und nur localisirt, d. h. an einzelnen Stellen der untersuchten Blätter. Für sich allein müsste ich diese Beobachtung an *Acorus* als unsicher bezeichnen. Das Material an *Acorus*-Blättern lieferte mir, das muss ich jedoch beifügen, ein nur wenige Quadratmeter grosses Bassin im Berliner Universitätsgarten. Die Annahme ist begründet, dass die Pflanze hier einen verhältnissmässig wasserarmen Standort inne hat; zur Verhinderung gänzlichen Austrocknens wird nämlich von Zeit zu Zeit Wasser eingegossen; ein solches Bassin kann also mit einem nie austrocknenden Teich nicht ohne Weiteres gleichgestellt werden.

Digitized by Google

Die Pflanzentheile, um die es sich hier handelt, sind nach Obigem nicht allenfalls untergetauchte Organe, sondern gehören theils Landpflanzen an *(Equisetum hiemale)*, theils sind es in der Luft vegetirende Organe von Wasser- und Sumpfgewächsen. DE BARY's Bemerkung,[1] dass in ähnlichen Gängen gewisser submerser Pflanzentheile Wasser enthalten sei, wird sicherlich richtig sein; wenn hingegen ebendort für die anderen und also hier vornehmlich zu behandelnden Fälle schlechthin Luft als Inhalt der betreffenden Gänge hingestellt wird, so muss ich dieser Angabe entgegentreten.

Ich beginne mit *Equisetum hiemale*. Dieser Fall ist nämlich nicht bloss für die vorliegende Frage verwerthbar, sondern verdient auch in seinem Verhältniss zu einem anderen Gewebesystem, nämlich zur Schutzscheide, unser Interesse.

Die sogenannten »Carinalhöhlen« bei *Equisetum hiemale* wurden an frischen Trieben von etwa 15^{cm} Länge und darüber Ende Mai und Anfangs Juni d. J. vielfach wasserführend gefunden. Nicht bloss auf dicken Querschnitten, sondern auch auf einem Längsschnitt sah ich allmälig Luft eindringen. Der Intercellulargang, welcher einen erheblichen Theil des Leitbündels ausmacht, ist von zartwandigen Zellen umgeben. An seinem Rande findet sich da und dort ein oder das andere primordiale Gefäss. Lenken wir nun den beobachtenden Blick von der so einfachen Thatsache des Wassergehalts jenes Kanals hinweg auf seine anatomische Umgebung (s. Fig. 5), so begegnet uns die CASPARY'sche Schutzscheide, eine äussere und eine innere; insbesonders letztere soll uns beschäftigen. Durch SCHWENDENER's Arbeit »Über die Schutzscheiden und ihre Verstärkungen«[2] ist uns die mechanische Bedeutung dieses Gewebesystems zur Kenntniss gekommen. Aus dem angeführten Werke folgt die Berechtigung zu einer physiologischen Parallele zwischen den Belegen aus mechanischen Zellen an der Aussenseite des Leptoms, sowie an zartwandigem Holzparenchym an der Innenseite mancher Gefässbündel einerseits, und den einfachen oder durch Aussenscheiden verstärkten Schutzscheidenumhüllungen anderseits. Zuzugeben ist allerdings, dass eine vollkommen befriedigende Aufklärung bezüglich der Bedeutung jener Localbelege, sowie der isolirten Bastsränge noch nicht vorliegt.

Nimmt man nun noch die von PFITZER in seiner Arbeit »Über die Schutzscheide der deutschen *Equisetaceen*[3] mitgetheilte Thatsache hinzu, dass auch in dieser Pflanzengruppe die dünnwandige Schutzscheide und zwar besonders die Innenscheide eine mechanische Ver-

[1] Vergleichende Anatomie S. 340.
[2] Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften in Berlin 1882.
[3] PRINGSHEIM's Jahrb. f. wiss. Bot. Bd. VI.

Digitized by Google

stärkung durch dickwandige (braune) Zellen erhalten kann,[1] so erscheint durch den Nachweis des Wassergehalts die Bedeutung der Schutzscheide, die sich zwischen Markhöhlung und dem intercellularen Leitbündelkanal hinzieht, in noch hellerem Licht. So lange man nämlich den Gang im Gefässbündel, der nur durch wenige Zellschichten von der Markhöhlung geschieden ist, als Luftkanal ansprach, stützte sich die Deutung der den Kanal umgebenden Zellen als zartwandiges Holzparenchym vorzugsweise auf das topographische Moment, dass diese Zellen den Primordialgefässen benachbart liegen. Kann nun aber, wie wir sahen, dem Kanal vollends ein ähnliches Verhalten, wie den Gefässen, nämlich abwechselnder Wasser- und Luftgehalt, zugeschrieben werden, so liegt auch die Holzparenchymnatur jener Zellen klarer vor Augen. Somit kann die Analogie zwischen dem Schutzscheidenbeleg und einem beliebigen Beleg aus mechanischen Zellen, welcher zartwandiges Holzparenchym an der Innenseite eines Gefässbündels begleitet, in begründeter Weise aufgestellt werden. Nachdem wir nämlich annehmen müssen, dass die Zellen, welche die »Carinalhöhlen« umgeben, in den Kanal hinein zu Zeiten Wasser filtriren lassen, gleichwie Holzparenchym in die Lumina der Gefässe, so liegt auch die Annahme von Dimensionsänderungen der den Gang begrenzenden Zellen und ihrer Umgebung in Folge von Wasserabgabe und Wasseraufnahme sehr nahe.

An den Nachweis von Flüssigkeit in den »Carinalhöhlen« schliesse ich die Mittheilung einer weiteren Thatsache an, die, soweit mir bekannt, noch nicht hervorgehoben wurde. In den überwinternden Schäften von *Equisetum hiemale* ist auch in der Markhöhlung zeitweise Wasser vorhanden, und zwar beobachtete ich diese Erscheinung in den zwei letzten Winterperioden. Manche Internodien sind ganz mit Flüssigkeit erfüllt. Es hatte sogar den Anschein, als ob dieselbe unter einem gewissen höheren Drucke stehe; denn hie und da spritzt aus einer Stichwunde, die man seitlich am Internodium mit einer Nadel anbringt, eine kleine Menge Flüssigkeit hervor.[2]

Nicht unerwähnt soll bleiben, dass bei *Equisetum pratense* und *E. silvaticum*, wo eine Caspary'sche Scheide auf der Innenseite der Bündel im Halm fehlt, eine mit etwas verdickten Zellwänden ver-

[1] S. Fig. 3 und 4, Taf. XVIII. Pringsheim's Jahrb. Bd. VI. Die betreffenden Figuren gehören zum Rhizom von *Equisetum silvaticum*.

[2] Gütiger Mittheilung des Hrn. Dr. Poronié zufolge bin ich in der Lage, zu bemerken, dass Wassergehalt in der Markhöhlung von ihm gelegentlich bei *Equisetum pratense*, ausserdem bei *Equisetum Telmateja* beobachtet wurde. Die in Rede stehende Erscheinung ist also nicht bloss auf eine Art beschränkt, und ich füge hinzu, auch nicht auf den Winter; denn die eben erwähnten Beobachtungen wurden im Frühjahr oder Sommer gemacht.

Digitized by Google

sehene Schicht hufeisenförmig Flanke und Innenseite des Leitbündels umzieht, und so offenbar die Function der Schutzscheide übernimmt. Vom Intercellulargang und zwar von seiner dem Mark zugekehrten Seite ist auch diese verdickte Zellschicht wie sonst die Schutzscheide durch eine Lage dünnwandiger Zellen getrennt.

Der Kernpunkt unserer bisherigen Betrachtung liegt sowohl bei dem besprochenen Falle von *Equisetum hiemale*, wie bei den zunächst folgenden kurz anzuführenden Beispielen in dem Nachweis, dass die betreffenden Intercellulargänge des Xylems mit den sie umhüllenden dünnwandigen Zellen anatomisch und physiologisch Analoga der Gefässe mit dem sie begleitenden Parenchym sind.

Wir gehen zu einer anderen Pflanze über, nämlich zu *Sagittaria sagittaefolia*. Zur Untersuchung dienten die inneren Bündel des Blattstiels, deren eines in Fig. 3 theilweise abgebildet ist. In dem grossen Intercellulargang (W) wurde Wasser nachgewiesen. Dieser Fall schliesst sich am engsten an *Equisetum* an; zunächst vergleichbar ist das anatomische Verhalten der Mestomstränge von *Equisetum limosum*. Im letzteren wie im vorliegenden Falle umschliesst eine CASPARY'sche Schutzscheide das gesammte Leitbündel. Dort ähnlich wie hier liegen zwischen Schutzscheide und Intercellularkanal auf der Xylemseite des Bündels ein bis zwei Zellschichten, welche ich in allen diesen Fällen als Holzparenchym anspreche. (Bei *Alisma Plantago* z. B. zeigten die Zellen in der Peripherie des Kanals im Längsschnitt des Blattstieles zahlreiche horizontale, sowie schwach geneigte Querwände.)

Lehrreich ist ferner der Vergleich eines dieser inneren Bündel von *Sagittaria sagittaefolia* mit gewissen Fibrovasal-Strängen an der Peripherie des Blattstiels. Unter letzteren sind grössere und kleinere zu unterscheiden. Von den grösseren hat das eine oder andere sowohl aussen als innen einen Bastbeleg. Die Elemente des innenseitigen Bastbeleges, der ein- bis zweischichtig ist, entsprechen an den in Rede stehenden Bündeln genau den dünnwandigen Schutzscheidezellen bei den inneren Bündeln; zwischen innenseitigem Beleg und Intercellularkanal liegen eine bis zwei Schichten der dünnwandigen Zellen.

Die Analogie zwischen Gefässen und den fraglichen Gängen lässt sich noch weiter führen. Gleichwie es neben Gefässen, die rings von Holzparenchym umgeben sind, auch zahlreiche Fälle gibt, in welchen Gefässe nur mit einem Theil ihrer Wand an lebende Zellen stossen, so treten auch an die besagten Kanäle manchmal einige mechanische Zellen heran. Diesen Fall zeigt uns Fig. 2, welche eine Gefässbündelpartie aus dem Halm von *Heleocharis palustris* darstellt. Während hier ferner der innenseitige Beleg von mechanischen Zellen ein continuirlicher ist, sehen wir in Fig. 1 (*Butomus umbellatus*, Blattstiel) an

Digitized by Google

der Hadromseite einen unterbrochenen Stereombeleg. In beiden Fällen ist Wasser im intercellularen Gange beobachtet worden.

Der intercellulare Bündelcanal von *Acorus Calamus* (Blatt) ist, soweit er nicht an Gefässe oder gefässartige Elemente grenzt, von lauter dünnwandigen Zellen umgeben (Fig. 4).

II. Über die Wanderung des Wassers im lebenden Parenchym von Zelle zu Zelle.

Der leitende Gedanke, der mich dazu führte, bei einer Untersuchung über die Wasserbewegung im Pflanzenkörper gerade auf die Saugung im Parenchym grosses Gewicht zu legen, ist kurz folgender. Das Holz besteht aus lebenden und todten Elementen. Entweder liefern die ersteren allein Kräfte und Bahnen für die Wasserbewegung, oder es sind dies im Gegentheil die todten Holzelemente — ohne die lebenden, — oder endlich drittens eine combinirte Thätigkeit beider Systeme ist nothwendig zur Erfüllung dieser Function.

Es seien mir hier wenige Bemerkungen hinsichtlich einiger bereits bestehenden Lehren über diese Frage gestattet.

Nach Sachs sind Imbibitionskräfte das Agens, die verholzte Zellwand aber ist die Bahn für den Transspirationsstrom. Eine Unterscheidung zwischen lebenden Zellen und todten Elementen kommt hierbei nicht in Betracht. Die angebliche Beweglichkeit des Imbibitionswassers in der verholzten Zellwand ist aber noch problematisch, und wie schwer es wird, auch nur bescheidene experimentelle Belege für dieselbe beizubringen, geht aus der neuesten Veröffentlichung Dufour's[1] hervor. Bedenklich ist dort[2] besonders die Ansicht, dass die Zunahme der Holzzellwandmasse gegen den Herbst hin im Hinblick auf die gesteigerte Transpiration in jener Periode mit der von ihm vertheidigten Lehre gut vereinbar sei. Diese Annahme steht nämlich in einem gewissen Widerspruch mit der gerade von Sachs (Vorlesungen über Pflanzenphysiol. S. 275) vertretenen Anschauung, dass das Herbstholz weniger leitungsfähig sei, als das Frühjahrsholz.

Dass die »Imbibitionstheorie« mit der Anatomie des Holzes und der Gefässbündel überhaupt nicht in innigem Zusammenhang steht, braucht wohl nicht näher auseinandergesetzt zu werden. Derselbe Vorwurf, wenn auch vielleicht nicht in demselben Maasse, kann gegen die Lehren von Böhm und R. Hartig erhoben werden. Trotz mancherlei Verschiedenheiten in den Darstellungen der beiden letztgenannten For-

[1] Arbeiten des Bot. Inst. in Würzburg III, 1: »Beiträge zur Imbibitionstheorie«.
[2] Vergl. S. 38 ebendas.

Digitized by Google

scher kommen ihre Anschauungen doch in dem wesentlichen Punkt überein, dass die Lumina der todten Elemente (Gefässe und Tracheïden) die Bahnen, Luftdruckverschiedenheiten in denselben die bewegenden Kräfte für das emporsteigende Wasser liefern. Gerade rücksichtlich dieses Punktes ist schon von verschiedenen Seiten, u. A. von ZIMMERMANN (Ber. d. Deutschen Bot. Ges. I, S. 183) das physikalisch Unzureichende jener Vorstellung hervorgehoben worden. Ein Verdienst von BÖHM wird aber immerhin bleiben, dass er der wichtigen Thatsache des zeitweisen Vorkommens von Wasser im Lumen der Gefässe und Tracheïden schliesslich doch allgemeine Anerkennung verschafft hat.

FREDR. ELFVING (Über den Transpirationsstrom in den Pflanzen, 1884; Abdruck aus Acta Soc. Scientiar. Fennicae T. XIV) lässt S. 19 a. a. O.) ähnlich wie BÖHM für eine unbestimmte Höhe durch Saugung der Luftblasen von Element zu Element das Gleichgewicht zwischen Ab- und Zufuhr des Wassers wieder hergestellt werden. Der Verfasser hat aber die ZIMMERMANN'sche Darlegung (Ber. d. Deutsch. Bot. Ges. I, 183) der Begrenztheit einer solchen Bewegungsfortpflanzung nicht widerlegt. Der Zweck dieser Mittheilung ist übrigens keineswegs, eine kritische Beleuchtung der verschiedenen Anschauungen über Wasserbewegung in hohen Bäumen zu geben.

Gehen wir also zu den lebenden Holzelementen über. Die Aufstellung der Frage, in welchem Maasse eine beliebige lebende Zelle, welche mit gleichartigen Elementen zu einem Complex verbunden ist, wasseranziehend auf die benachbarten Zellen wirkt, wenn sie wasserärmer ist als diese ihre Umgebung, liegt zwar nahe; die Frage ist aber wenig untersucht und scheint mir in ihrer Bedeutung von manchen Forschern, welche sich dem Studium der Wasserbewegung in neuerer Zeit widmen, nicht genügend gewürdigt zu werden. Die Erwägung, dass eine solche Fortbewegung des Wassers (durch Wasseranziehung von Zelle zu Zelle), auch wenn sie nur auf kurze Strecken hin sich vollzieht, doch durch die anatomischen Verhältnisse zu grosser Bedeutung gelangt, darf nicht sobald wieder in den Hintergrund geschoben werden.

Bei meinen früheren Versuchen über die »Saugung im Parenchym« (Ber. der Deutsch. Bot. Gesellsch. Bd. 1) blieb das von mir angestrebte Ziel unerreicht, indem ich die maximale Steighöhe des Wassers durch Saugung von Zelle zu Zelle auch für die gewählten Umstände nicht anzugeben vermochte. Ich war vielmehr der Ansicht, die längsten der damals von mir verwendeten Parenchymstränge seien noch zu kurz, und glaubte mich einstweilen darauf beschränken zu müssen, ein gewisses Maass (circa 80^{cm}) von Leistungsfähigkeit zu constatiren. Nach meinen neuesten Versuchen liegt das beobachtete Maximum tiefer.

Digitized by Google

Diese neuen Beobachtungen sind aber nicht an demselben Versuchsobject, nämlich an Markgewebezellen, angestellt, sondern, wie unten näher beschrieben ist, an Wassergewebestreifen. Was jene früheren Versuche mit Markgewebesträngen betrifft, so habe ich jetzt allen Grund zu vermuthen, dass sich bei denselben Wasser aus der feuchten Luft im Cylinder auf die Oberfläche der Stränge niedergeschlagen hat. Für die Markgewebe muss ich zur Zeit wegen der oben genannten Erscheinung im Speciellen und wegen unsicherer und einander widersprechender Versuchsergebnisse im Allgemeinen darauf verzichten, sichere Angaben über die Steighöhe des Wassers durch endosmotische Saugung zu bringen. Meine früher gemachten Angaben über dieselbe sind also nicht zuverlässig, was ich hiemit wiederhole.

Als Resultat der fünf unten zunächst besprochenen neuen Versuche hebe ich hervor, dass in jedem der angeführten Fälle nur der untere Theil des über Wasser befindlichen Gewebestreifens turgescent wurde, und dass in keinem der angeführten Versuche das ganze über Wasser schwebende Stück über 10^{cm} lang war. Hieraus folgere ich, dass sogar, wenn bei diesen Versuchen kleine Wassermengen sich auf der Oberfläche einer Versuchslamelle niedergeschlagen hätten, dennoch die Steighöhe nicht mehr als einige Centimeter beträgt. Darauf allein kommt es mir an, die unter gegebenen Umständen erreichte Maximalleistung durch Saugung als eine geringe zu erweisen. Die Bedingungen, dass Saugung stattfinden konnte, waren ja gegeben. Dass endlich überhaupt eine Wanderung von Wasser durch Saugung von Zelle zu Zelle stattfinden kann, wenn auch nur auf kleine Entfernungen hin, braucht wohl kaum erst bewiesen zu werden. Wenn z. B. ein abgetrenntes *Sedum*-Blatt der Art austrocknet, dass innere Zellen in Folge von Wasserverlust collabiren, während äussere noch reichlicher mit Wasser versehen sind, so geht daraus hervor, dass die äusseren den inneren Wasser entzogen haben.

Ich operirte neuerdings mit abgetrennten Streifen epidermalen Wassergewebes von *Peperomia (magnoliaefolia* oder *latifolia)* und von *Tradescantia discolor*. Bei diesem Material ist auch eine capillare Wirkung, wenigstens im Innern des Gewebes, möglichst ausgeschlossen. Dafür spricht ebenfalls der Erfolg der Versuche. Aus der folgenden Beschreibung einzelner derselben ergiebt sich die angewandte Methode.

a. *Tradescantia discolor.*

Von dem Blatt wurde ein Wassergewebestreifen abgeschnitten und nach kurz dauerndem Liegen an der Luft, also noch frisch, wenn auch nicht steif, in einem Cylinder von circa 20^{cm} Höhe aufgehängt

Digitized by Google

und zwar so, dass das unterste Ende in Wasser tauchte, während ein 5^{cm} langes Stück über dem Wasserspiegel sich befand. Von der Innenfläche des Glascylinders, soweit dieselbe über Wasser war, wurden ungefähr $^2/_3$ mit feuchtem Filtrirpapier bedeckt. Die Mündung des Cylinders war mit einem Kautschukpfropf verschlossen, in dessen Durchbohrung mittelst eines Hollundermarkcylinders und Fadens der Gewebestreifen hing. Das Hollundermark bildete zugleich den Verschluss des Loches. Am untersten Ende des Streifens (unter Wasser) war eine Vorrichtung nothwendig, welche das dauernde Verbleiben dieses Endes unter Wasser sicherte, indem mittelst Fadens ein schwerer Gegenstand (Bleistück) das Streifenende senkrecht nach unten zog. Ohne diese Einrichtung rollt sich nämlich der Hypodermstreifen allmälig auf, so dass nichts mehr von ihm in Wasser taucht. Wenn man z. B. einen ziemlich frischen Wassergewebestreifen ganz in Wasser legt, so nimmt er durch ungleiche Ausdehnung in Folge von Wasseraufnahme alsbald die Form einer Spirale an, wobei die Epidermis nach innen zu liegen kommt. Die Verdunstung war in unserem Versuche also durch den Verschluss und die erwähnte Bekleidung der Cylinderinnenfläche sehr herabgedrückt.

Nach zwei Tagen befand sich der oberste Theil des in der Luft befindlichen Stückes in einem verschiedenen Zustand gegenüber dem ebenfalls noch über Wasser schwebenden unteren Theil. Der oberste (kleinere) Theil war ganz schlaff. Nur circa 4^{cm} hoch konnte sich in diesem Falle das Gewebe in einem turgescenten Zustande erhalten.

Bei einem ähnlichen Versuche konnte man am Schluss des Versuches die vom Wasserspiegel nach oben abnehmende Dicke des Streifens wahrnehmen. Circa $2^1/_2{}^{cm}$ zunächst dem Wasser waren hier steif, während das oberste Stück von ungefähr derselben Länge schlaff war. In Wasser eingelegt wurden nun auch die obersten Theile dicker und steif, zum Beweis, dass die Zellen wohl noch Wasser aufnehmen konnten, das ihnen in nächster Nähe geboten wurde. Bei diesem Versuche pflanzte sich somit die bis zur starken Turgescenz d. h. Steifheit des Gewebes führende Anfüllung des Parenchyms vom Wasserspiegel an aufwärts 2 bis 3^{cm} weit fort.

b. *Peperomia.*

Durch Liegen eines Blattstückes an der Luft verlor dasselbe in Folge von Verdunstung einen Theil seines Wassers. Ein jetzt abpräparirter Wassergewebestreifen war nun natürlich schlaff. Ein solcher wurde in einem Kölbchen von 13.5^{cm} Höhe aufgehängt, so dass 1 bis $1^1/_2{}^{cm}$ in Wasser tauchten und $6^1/_2{}^{cm}$ über Wasser sich

Digitized by Google

befanden. Der Streifen hing an einem Stückchen feinen Drahts, der durch den das Kölbchen verschliessenden Kork festgehalten war. Die Innenwand des Kolbens, soweit sie an Luft grenzte, war zum kleineren Theil mit feuchtem Filtrirpapier bekleidet, um die Luft feuchter zu machen und so die weitere Verdunstung im Gewebe herabzudrücken. Nach Verlauf eines Tages waren die $2^1/_2$ untersten Centimeter des ganzen Streifens turgescent. Der übrige Theil des Stranges war schlaff, seine Zellen collabirt. Hiernach hatte sich die Anfüllung der Wassergewebezellen nur einen Centimeter hoch über den Wasserspiegel fortgepflanzt. Das obere noch schlaffe Ende wurde, nachdem der Streifen nun in Wasser längere Zeit (circa einen Tag) gelegt worden war, auch etwas wenig steif, seine Zellen waren jetzt nicht mehr oder doch jedenfalls wenig collabirt.

Bei einem anderen Versuche wurde gleichfalls der Versuchsstreifen von einem Blattstück abgetrennt, das an der Luft schon einiges Wasser verloren hatte. Die betreffende Wassergewebelamelle zeigte an demjenigen Ende, welches beim Versuche in Wasser tauchte, vor dem Einhängen deutliche Collabescenzerscheinungen. Am entgegengesetzten Ende ergab die mikroskopische Untersuchung vor dem Einhängen in den Kolben nur Spuren von Collabescenz der Zellen. In seiner ganzen Länge war der Versuchsstreifen jetzt ziemlich schlaff. Mit einem Centimeter tauchte nun die Lamelle in Wasser, 4^{cm} befanden sich über Wasser. Nach zwei Tagen zeigte sich, dass der Streifen circa 3^{cm} von oben her dünn und schlaff war gegenüber der nach unten dem Wasserspiegel genäherten Partie, welche dicker war und eine gewisse Steifheit besass. Die Steighöhe betrug in diesem Fall also ungefähr 1^{cm}.

Bei einem ähnlichen Versuche erwies sich der Zustand des Wassergewebestreifens zur Zeit des Einhängens der Art, dass durchweg eine geringe Collabescenz zu constatiren war (die bekannte Querstreifung resp. Faltung der Zellwände war unter dem Mikroskop sichtbar). Nach drei Tagen war die obere Partie der Versuchslamelle schlaff, ihre Zellen collabirt. Im unteren Theil des über Wasser schwebenden Stückes, und zwar vom Wasserspiegel ungefähr 3^{cm} aufwärts, waren die Zellen nicht mehr collabirt, das Gewebe steif. (Bei diesem Versuche war etwa ein Drittel der über Wasser befindlichen Kölbcheninnenfläche mit feuchtem Filtrirpapier bedeckt. Der Verschluss des Kolbens geschah regelmässig mit Kork.)

Bei einem ebenfalls noch anzuführenden Versuche liess ich in einem mit feuchtem Filtrirpapier halbausgekleideten Kölbchen, das mit Kork verschlossen war, einen noch ziemlich steifen Gewebestreifen so hängen, dass er gar nicht in Wasser tauchte; nach zwei Tagen

Digitized by Google

erwies sich der Streifen bei mikroskopischer Untersuchung noch turgescent; so gering war also die Verdunstung.

Den soeben mitgetheilten Versuchen (April) folgten noch andere (November) mit demselben Material, welche die Bestätigung des wesentlichen Resultats der ersteren ergaben. Hier hebe ich aus der letzten Versuchsreihe Folgendes hervor.

Wird ein Hypodermstreifen von *Peperomia* (eine der obigen Arten wurde verwendet), welcher in Folge der in ihm herrschenden Wasservertheilung an der Epidermisseite convex ist, in einem verschlossenen Gefäss mit einem Ende (etwa zur Hälfte) in Wasser getaucht, während das andere über Wasser schwebt, so krümmt sich bald der untergetauchte Theil durch Wasseraufnahme so, dass die Epidermis auf die concave Seite zu liegen kommt; die nun vorhandene S-förmige Krümmung des ganzen Streifens zeigt sich noch nach 18 Stunden erhalten; daraus geht hervor, dass die Wasseraufnahme der Zelle in der über Wasser befindlichen Streifenpartie (3—4^{cm} lang) durch Saugung von unten her in der bezeichneten Zeit für die Länge von 4^{cm} nicht einmal jenen Grad von Turgescenz bewirkt hat, der eine Geradestreckung herbeiführen konnte. Ein solcher Streifen wurde dann zur Prüfung, ob die Zellen noch lebend waren, ganz in Wasser gebracht und krümmte sich nun in seiner ganzen Ausdehnung so, dass die Epidermis auf der concaven Seite sich befand.

Hier mögen noch einige Worte Platz finden über die Widerstände, welche hienach bei der Bewegung des Wassers von Zelle zu Zelle überwunden werden müssen. Nehmen wir für das untersuchte Wassergewebe von *Peperomia* eine durchschnittliche Steighöhe von 3^{cm} durch Saugung an und für die endosmotische Kraft dieser Zellen nach meinen früheren Versuchen (Ber. d. Deutsch. Bot. Ges. I, 371) die Höhe von 3 Atmosphären, so ergibt sich nach beendigtem Versuch eine Druckdifferenz von circa 14^{cm} Wasser zwischen zwei übereinander liegenden Zellen.[1]

Die Tragweite vorstehender Versuche erscheint auf den ersten Blick minimal. Denn was bedeutet eine Steighöhe von wenigen Centi-

[1] Auf einen Streifen Wassergewebe von 3^{cm} Länge kommen nämlich circa 214 Zellen oder 428 Primordialschlauchmembranen, da die Breite einer Zelle circa 140 Mik. beträgt. In einem solchen Versuchsstreifen stuft sich hienach der hydrostatische Druck vom Wasserspiegel an aufwärts innerhalb 3^{cm} von circa 3 Atmosphären auf Null ab. Eine Beobachtung spricht nämlich in der That dafür, dass im obersten schlaff gebliebenen Theil eines Streifens nach dem Versuch die Zellenmembranen nicht gespannt, sondern wellig verbogen sind, dass also hier der hydrostatische Druck = 0 ist. Es kommt mir übrigens für die Hauptfrage nicht darauf an, ob die Steighöhe in unserm Falle noch 1^{cm} mehr beträgt; nur als eine geringe versuchte ich sie zu erweisen, wie ich hier wiederhole.

Digitized by Google

metern (bei höherer Concentration des Zellinhalts allerdings sich steigernd) im Hinblick auf die Höhe der höchsten baumartigen Gewächse? An eine Fortpflanzung der Saugung in einem Holzparenchymstrange von 100′ Länge von oben bis unten ist hienach nicht zu denken. Ganz anders liegt die Sache, wenn wir unsern Blick erweitern und die meines Wissens ausnahmslose anatomische Wechselbeziehung des parenchymatischen Systems und des Gefässsystems in Betracht ziehen. Diese Betrachtungsweise ist keine willkürliche, sondern eine durch die anatomischen Verhältnisse allseitig gebotene. In dem Augenblick, in welchem man erwägt, dass uns jeder Querschnitt durch beliebige Organe von Gefässpflanzen die beiden Systeme in ihrem innigen Contact zeigt, gewinnt die Erscheinung einer nur wenige Centimeter betragenden Steighöhe durch Saugung im lebenden Gewebe eine ganz andere Bedeutung.

Über eine denkbare Art der combinirten Thätigkeit beider genannten Systeme habe ich mich in der citirten früheren Veröffentlichung (Ber. d. Deutsch. Bot. Ges. Bd. I, S. 374 ff. bereits ausgesprochen. Auf das dort Gesagte erlaube ich mir an dieser Stelle hinzuweisen.

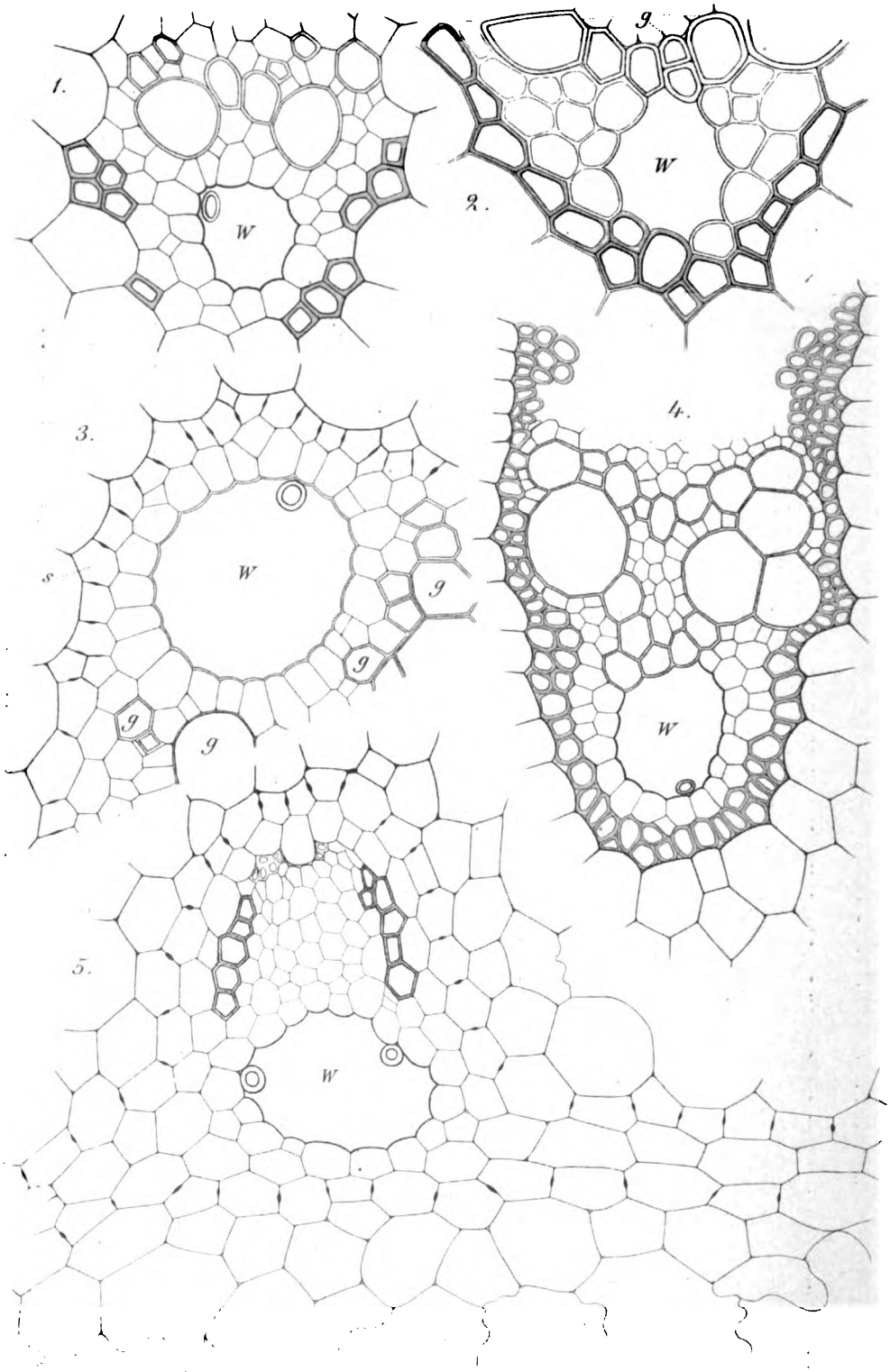
Der Verfasser der vorläufigen Mittheilung über »die Wasserbewegung im Holze«, Scheit, (Bot. Zeit. 1884 S. 177 ff.) wird vielleicht im ersten Theil dieses Aufsatzes einen Hinweis finden, dahin gehend, dass dem Holzparenchym eine Wichtigkeit bei der Wasserversorgung wohl zugeschrieben werden darf. Anderseits ist es a priori keine unwahrscheinliche Schlussfolgerung, die Eigenschaften des lebenden Xylemparenchyms in unterirdischen Wurzeln auch auf das gleichnamige Gewebe im oberirdischen Stamm zu übertragen.

Godlewski hingegen gelangte (laut gütiger mündlicher Mittheilung) in seinen Studien über die Wasserbewegung in Bäumen zu einer Anschauung, welche mit meinem Grundgedanken in einem wesentlichen Punkt übereinstimmt.

Da im Laufe der letzten zehn Jahre die anatomisch-physiologische Forschung als eine fruchtbare sich bereits erwiesen hat, so darf ich weiterhin die Bemerkung hinzufügen: Die Erkenntniss der Nothwendigkeit einer anatomischen Grundlage für gewebephysiologische Lehren hat nicht bloss hinsichtlich einzelner Fälle Werth, sondern beansprucht principielle Bedeutung. Es würde hienach, angewendet auf unseren Fall, eine einzige Beobachtung, welche ergiebt, dass die Gefässe eines Pflanzenorgans continuirlich oder auch nur auf grosse Strecken hin von typisch mechanischen Zellen rings umhüllt sind, die hier vorgetragene Auffassung erschüttern, weil eben den mechanischen Zellen das Vermögen, endosmotisch zu saugen und Wasser auszuscheiden, nicht zuzuschreiben ist.

Digitized by Google

Digitized by Google



Westermaier del Westermaier: Wasserbewegung in den Pflanzen. C. Laue lith.

Digitized by Google

Es ist nur eine ganz berechtigte Forderung, auch in Beziehung auf die Wasserbewegung den Nachweis einer vollständigen Harmonie zwischen Bau und Function zu verlangen, und hierauf stütze ich die Behauptung:

Entweder ist das tracheale System sammt dem System lebender Holzzellen (Holzparenchym und Markstrahlen) an der Emporschaffung des Wassers in die Spitzen der höchsten Gewächse unbetheiligt, oder aber beide Systeme dienen vereint dieser Function.

Für die Entscheidung im letzteren Sinne liefert vorstehende Mittheilung einen kleinen Beitrag.

Erklärung der Figuren.

Fig. 1. *Butomus umbellatus*, Blattstiel. Xylempartie aus einem Gefässbündel im Querschnitt. *W* ist hier wie in den folgenden Figuren der intercellulare Kanal. Die mechanischen Elemente sind alle gelb gehalten. (330 Mal.)

Fig. 2. *Heleocharis palustris*, Halm. Innere Partie eines Gefässbündels im Querschnitt. Bei *g* Gefässe. Der Intercellulargang *W* wird seitlich von dünnwandigen Zellen begrenzt. (700 Mal.)

Fig. 3. *Sagittaria sagittaefolia*, Blattstiel. Querschnittspartie aus einem inneren Bündel, den Intercellulargang *W* und seine Umgebung zeigend, insbesondere die Schutzscheide *s*. Bei *g* liegen Gefässe. (330 Mal.)

Fig 4. *Acorus Calamus*, Blatt. Xylempartie aus einem Gefässbündel mit dem Intercellularkanal *W* und seiner anatomischen Umgebung. (330 Mal.) Vergl. Text S. 1106.

Fig. 5. *Equisetum hiemale*, Halm. Gefässbündel mit Umgebung im Querschnitt darstellend. Aussen- und Innenscheide durch den dunklen Punkt auf der Radialwand hervortretend. Die »Carinal-Höhle« (*W*) ist ein Wassergang. (330 Mal.)

Digitized by Google

Digitized by Google

47. Über Blitzphotographien.

Von Dr. H. Kayser,
Privatdocenten und Assistenten am physikalischen Institute.

(Vorgelegt von Hrn. von Helmholtz am 23. October; — gedruckt im Bericht vom 27. November [St. XLVIII]: — ausgegeben am 4. December.)

Hierzu Taf. VII und VIII.

Es ist, so viel mir bekannt, in diesem Jahre zum ersten Mal versucht worden und gelungen, Blitze photographisch zu fixiren. Solche Aufnahmen lassen sich nur bei nächtlichen Gewittern machen, sind aber dann auch höchst einfach, indem man die vorher auf Unendlich eingestellte Camera gegen die Stelle des Himmels richtet, an der sich das Gewitter befindet. Man kann dann beliebig lange exponiren; jeder Blitz, der an der betreffenden Stelle des Himmels auftritt, markirt sich auf der Platte.

Im Juli d. J. zogen über Berlin einige sehr stark elektrische Abendgewitter, welche ich benutzt habe, um eine Reihe von Blitzaufnahmen zu machen. Die Platten zeigen, dass, abweichend von der früher verbreiteten Meinung, der Blitz nicht immer eine einfache Entladung zwischen zwei Punkten ist, sondern dass die Entladung sehr häufig zwar von einem Punkte ausgeht, aber in vielen Punkten endet. Es zweigen sich von einem Hauptstamm dünnere Seitenäste nach allen Richtungen ab, welche wieder Seitenzweige haben, so dass ein solcher Blitz wie die Karte eines Flusssystems aussieht, wo zahlreiche Bäche und Nebenflüsse zusammenströmen, um schliesslich einen Hauptstamm zu bilden, von welchem man wohl ein bestimmtes Ende, aber keinen solchen Anfang erkennt; nur durchläuft der Blitz den Weg umgekehrt, wie der Fluss. Mitunter ist auch ein deutliches Hauptende des Blitzes zu erkennen, indem ein starker Strahl zwei Punkte verbindet, und von ihm nur schwache, kurze Seitenäste abgehen. Endlich kommen viele schwächere unverzweigte Blitze vor.

Diese Erscheinung der verästelten Blitze war schon durch die ersten erschienenen Photographien bekannt geworden; ich will daher hier nicht näher darauf eingehen, sondern eine höchst merkwürdige und zum Theil unaufgeklärte Erscheinung besprechen, welche einer von den fixirten Blitzen darbietet. Es war am 16. Juli gegen 10 Uhr

Digitized by Google

Abends, als der stärkste Blitz des Gewitters erfolgte, dem sehr schnell, etwa nach einer Secunde, ein gewaltiger Donnerschlag folgte. Etwa fünf Minuten vorher hatte ich eine Platte exponirt, auf welche ausser diesem Hauptblitz noch mehrere andere Entladungen gekommen sind. Die Photographie, von welcher eine genaue Nachbildung in Lichtdruck als Taf. VII beiliegt, zeigt Folgendes: Der Hauptstrahl besteht nicht aus einer hellen Linie, sondern ist aus vier dicht neben einander liegenden Linien gebildet. Man sieht links[1] den stärksten Strahl, an den sich nach rechts ein breiteres helles Band anschliesst, welches nachher noch näher zu besprechen sein wird. Dann folgen weiter nach rechts zwei dicht neben einander verlaufende Strahlen; dieselben sind in der Reproduction in einen zusammengeflossen, in der Vergrösserung eines Theiles des Blitzes aber, die in Taf. VIII vorliegt, deutlich getrennt zu erkennen. Nach einem etwas grösseren Abstande folgt endlich ein vierter Strahl. Alle vier laufen im Wesentlichen parallel durch alle Zacken und Krümmungen fort, und weichen nur in kleinen Details von einander ab.

Es fragt sich nun, wie dieser vierfache Blitz zu erklären sei; es sind, so viel ich sehe, vier Annahmen möglich. Man könnte nämlich erstens annehmen, dass die vier Strahlen nicht zu einer und derselben Entladung gehören, sondern zufällig zu verschiedenen Zeiten an derselben Stelle des Himmels übergeschlagen sind; dem widerspricht aber die Parallelität der vier Blitze, welche mit Sicherheit darauf hinweist, dass sie durch denselben Canal erhitzter Luft gegangen sind, also auch innerhalb eines sehr kurzen Zeitraumes stattgefunden haben und zusammengehören. — Eine zweite Annahme wäre, dass die vier Entladungen gleichzeitig vorhanden waren, so wie bei reichlichem Elektricitätszufluss zwischen den Conductoren einer Elektrisirmaschine mehrere Funken gleichzeitig überspringen. Aber auch dieser Annahme widerspricht die Parallelität; denn wie bei der Elektrisirmaschine, so müssten auch hier die gleichzeitigen Entladungen sich abstossen und divergirende Büschel bilden. — Man könnte drittens denken, dass die vier Entladungen nicht gleichzeitig, sondern sehr rasch hinter einander von der Wolke zur Erde übergeschlagen seien; das setzte aber einen sehr leichten und reichlichen Elektricitätszufluss zu der eben entladenen Stelle der Wolke voraus, um das Potential so schnell wieder auf die nöthige Höhe zu bringen. Ein so geringer Leitungswiderstand der Wolken scheint aber nicht wahrscheinlich.

Es bleibt endlich als vierte, und wohl zutreffende Erklärung, dass wir es hier mit einer oscillirenden Entladung zu thun haben,

[1] Im Lichtdruck, Taf. XIV, ist rechts und links vertauscht.

Digitized by Google

bei welcher in sehr kurzen Zwischenräumen Entladungen in entgegengesetzter Richtung verlaufen. Dann würde der erste Funke auf seinem Wege von der Wolke zur Erde einen Canal erhitzter Luft hinterlassen; der nächste von der Erde zur Wolke gehende Funke würde denselben Canal benutzen, der im Wesentlichen noch besteht, nur durch den Wind etwas verschoben ist, u. s. w. So würde man von den vier Entladungen vier neben einander liegende Bilder erhalten, wenn der Wind senkrecht zur Axe des photographischen Apparates gerichtet ist; das war er an jenem Abend, wo er von West nach Ost, im Bilde von links nach rechts wehte. Dass derartig oscillirende Entladungen bei Blitzen vorkommen, habe ich bei stärkeren Gewittern mehrfach beobachtet; man sieht dann den Blitz auf seinem Wege einige Male hin und her fahren; dazu müssen freilich die Oscillationen ziemlich langsame sein, sonst nimmt das Auge sie nicht einzeln wahr. — Durch derartige Entladungen wird sich vielleicht auch eine Beobachtung DOVE's erklären lassen, aus der er schloss, die Blitze seien intermittirende Entladungen.[1]

Wenn diese Erklärung richtig ist, so lassen sich einige interessante Rechnungen ausführen. Die Entfernung des Blitzes kann angenähert zu 350^{m} angenommen werden, kann indessen auch weniger betragen haben, jedoch kaum unter 200^{m}. Die Brennweite des Objectivs beträgt 0.18^{m}; eine Länge von 1^{mm} auf der Platte entspricht daher einer Länge von etwa 2.817^{m} in der Natur. Danach betragen die Abstände zwischen den vier Entladungen: 3.08^{m}; 0.35^{m}; 0.63^{m}. Diese Abstände sind durch Verschiebung des Canals in der Zeit zwischen je zwei Entladungen entstanden. Die Windgeschwindigkeit während des Blitzes betrug etwa 30^{km} pro Stunde, oder 8.5^{m} pro Secunde; der Wind würde daher obige Verschiebungen hervorgebracht haben in 0.362^{sec}; 0.041^{sec}; 0.074^{sec}; und diese Zeiten würden den Zwischenraum zwischen den Oscillationen angeben. Die ganze Entladung würde nicht eine halbe Secunde gedauert haben. Es scheint mir, dass diese Grössenverhältnisse durchaus denkbare sind.

Die Blitze zusammen befinden sich in einem Canal, der deutlich viel heller ist, als die Umgebung, und dessen Ränder am hellsten sind. Wir haben es hier wohl mit einer Erscheinung zu thun, welche der Aureole entspricht. Der helle Rand entsteht durch die cylindrische Gestalt des leuchtenden Raumes. Von den vier Theilen des Blitzes gehen eine ganze Anzahl schwächerer Seitenentladungen aus, die sich zum Theil noch weiter verzweigen. Diese Äste, soweit sie auf der Platte sichtbar sind, und soweit sie zweifellos zum grossen Blitz ge-

[1] DOVE, POGG. Ann. 35 S. 379—380. 1835.

Digitized by Google

hören, endigen in etwa sechszig verschiedenen Punkten, was freilich nur auf dem Negativ selbst zu zählen ist, während im Abdruck viele feinste Ästchen verschwinden. Die ganze Länge des Blitzes beträgt etwa 300^m, die Breite der Aureole etwa 28^m.

Die interessanteste und räthselhafteste Erscheinung ist jedoch der helle Streif, welcher den ersten Blitzstrahl auf der rechten Seite begleitet. Unter der Lupe zeigt er eine ganz eigenthümliche Structur; um dieselbe sichtbar zu machen, ist ein Stück des Blitzes auf Taf. VII vergrössert reproducirt. Hier sieht man deutlich, dass das Band aus hellen horizontalen Schichten besteht, welche durch dunkle Zwischenräume getrennt sind.

Für diese Erscheinung fehlt mir jede sichere Erklärung. Die Idee, dass wir es mit Schichten zu thun haben, wie wir sie bei Entladung in luftverdünnten Räumen sehen, welche aber auch bei hohen Drucken auftreten, ist zu verwerfen, da alsdann der Blitzstrahl durch die Mitte der Schichten hindurchgehen müsste, nicht aber dieselben auf der einen Seite begrenzen. Letzterer Umstand macht es vielmehr wahrscheinlich, dass wir in den Schichten irgend welche leuchtende Materie haben, welche durch den Wind von der Blitzbahn aus fortgeweht ist. Da es während des Blitzes ziemlich stark regnete, liegt der Gedanke nahe, dass der Blitz die auf seinem Wege befindlichen Regentropfen in leuchtenden Dampf verwandelt habe, und jeder Tropfen eine Schicht geliefert habe. Dann würde es sich auch ungezwungen erklären lassen, warum nur der erste Blitz von Schichten begleitet ist: es würde bei den folgenden Entladungen der Canal noch von heissen Gasen, nicht aber von Wassertropfen erfüllt gewesen sein.

Gegen diese Erklärung sprechen indessen doch einzelne Umstände. Es scheint nicht recht wahrscheinlich, dass die Tropfen in so regelmässiger Weise auf dem Wege des Blitzes vertheilt gewesen sind, wie es die Schichten sind; auch ist kein Grund einzusehen, wesshalb jeder Tropfen eine abgegrenzte Schicht geliefert haben soll, und die Schichten sich nicht vermischt haben, so dass ein leuchtendes Band entsteht. Weiter spricht folgende Überlegung dagegen: Die Schichten haben eine Länge von etwa 1.7^m, eine Höhe von 0.35^m; nimmt man eine Tiefe von auch nur 0.35^m an, so ergiebt sich das Volumen jeder Schicht zu etwa 0.2^{cbm}. Nimmt man ferner an, dass je 15 Tropfen 1^g wiegen, — was schon recht grosse Tropfen voraussetzt, — so lässt sich leicht die Temperatur berechnen, welche geherrscht haben müsste, um jeden Tropfen durch Verdampfung und Dissociation in eine Schicht zu verwandeln. Man findet etwa $400000°$C. Diese Zahl kann vielleicht auf ein Viertel reduzirt werden durch die Annahme, dass die Schicht im Bilde durch Fortbewegung einer kleineren leuch-

Digitized by Google

tenden Masse entstanden sei, aber immerhin bleibt die Temperatur unwahrscheinlich hoch.

Es muss daher die Frage nach der Entstehung der Schichten als eine noch offene angesehen werden. Ihre Lösung wird wohl gelingen, wenn häufiger Blitzphotographien hergestellt werden, als das bei den hiesigen Witterungsverhältnissen möglich ist. Es wäre sehr wünschenswerth, wenn in dieser Beziehung begünstigtere Beobachter recht zahlreiche Aufnahmen machen wollten; denn die wenigen bisher ans Licht getretenen Photographien haben schon eine Menge interessanter Erscheinungen bekannt gemacht.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei

Digitized by Google

Digitized by Google

H. Kayser: Über Blitzphotographien.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

48. Über den Angelapparat des Lophius piscatorius.

Von Prof. G. Fritsch.

(Vorgelegt von Hrn. E. du Bois-Reymond am 4. December; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. L]; — ausgegeben am 11. December.)

Bereits im Jahre 1874, als ich zum Zweck zoologischer Studien die Küste Kleinasiens bereiste, war es mir gelungen an dem verlängerten Mark des Anglerfisches ein bisher völlig unbekanntes, höchst merkwürdiges Centralorgan aufzufinden. Das Gehirn besitzt nämlich hinter dem Calamus scriptorius der Rautengrube eine oberflächlich lagernde Schicht riesenhafter Ganglienzellen, welche die hintere Längsspalte der Medulla ausfüllt.

Die eigenthümliche Anhäufung dieser mächtigen nervösen Elemente am Centralorgan musste mich mit Nothwendigkeit an die entsprechende Anordnung solcher Theile am Gehirn des Zitterrochens erinnern, und ich gab diesem Gedanken Ausdruck, indem ich diesen Gehirnabschnitt in der damals einer Königlichen Akademie vorgelegten Arbeit über das Fischgehirn »einen pseudoëlektrischen Lappen« nannte.

Aus Mangel an Material war es mir zu jener Zeit unmöglich, die Natur dieses Organs näher zu untersuchen; die merkwürdigen Vergleichungspunkte mit nervösen Centren elektrischer Nerven mussten mich aber gewiss bestimmen bei der letzten, dem Studium elektrischer Fische gewidmeten Reise auch den Lophius piscatorius in das Programm aufzunehmen.

Diesem Plan gemäss wurde gehandelt, aber erst jetzt fand sich genügende Musse, um die auf der Reise begonnene Arbeit über den genannten Fisch zu einem befriedigenden Abschluss zu bringen. Die Ergebnisse scheinen mir bemerkenswerth, da sie mannigfache Betrachtungen über die Natur nervöser Elemente, zumal der Centren elektrischer Nerven mit sich bringen, welche geeignet sind, mehr Licht in diesen dunklen Gebieten zu verbreiten.

Im Folgenden möchte ich mir erlauben, die hauptsächlichsten Resultate übersichtlich zusammen zu stellen, die ausführliche Beschreibung einer späteren Zeit vorbehaltend.

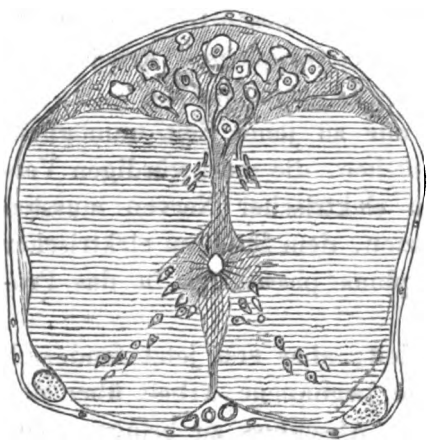
Die Ganglienzellen des zu beschreibenden Centralorgans dürften nach Schätzung in runder Zahl etwa 200 betragen. Sie sind multipolar, doch überwiegt der Axencylinderfortsatz durch seine Mächtigkeit in auffallender Weise. Ihre Grösse beträgt 0.13^{mm} bis 0.257^{mm},

Digitized by Google

der bläschenförmige Kern hat ovale Gestalt bei 0.07^{mm} des Hauptdurchmessers, das mächtige, robuste Kernkörperchen noch 0.034^{mm}.

Die Zellen passen sich in ihrer allgemeinen Gestaltung der Nachbarschaft an, indem sie in der Mitte des Organs mehr rundlich sind, links und rechts, sowie an dem hinteren Ende sich auf den unterliegenden Theilen der Medulla abflachen. Sie werden von einer im Leben fast durchsichtigen Auflockerung der Neuroglia umhüllt, welche sich um jede einzelne Zelle nach Art einer unvollkommenen Kapsel etwas verdichtet. Die enorme Grösse und freie Lagerung der Zellen macht es möglich, sie ohne Schwierigkeit mit unbewaffnetem Auge am unverletzten Centralorgan zu erkennen. Das kräftige, feinkörnige Protoplasma des Zellleibes ist besonders bei den grösseren Zellen vielfach ausgebuchtet und an dem Umkreis selbst von Vacuolen durchsetzt, in welche sich die gerade hier sehr zahlreichen Capillargefässe hineinzudrängen pflegen.

Der abwärts vorragende Theil des Protoplasmakörpers giebt einem mächtigen Axencylinder den Ursprung, der von ihm mit breiter Basis entspringt und nun im Bogen um die rundlichen Anschwellungen der Medulla besonders medianwärts in die Tiefe dringt. Noch etwas höher als der Centralcanal (den Fisch stets horizontal gedacht) sammeln sich die Axencylinder zu einer compacten Fasermasse, deren Verlauf nach vorn zu gerichtet ist, d. h. sie verlaufen wie die sogenannte aufsteigende Trigeminuswurzel anderer Wirbelthiere. Die Durchmesser der Axencylinder betragen in diesem Abschnitt bis 0.027^{mm}. Sie erreichen in ihrem Verlauf die Austrittstellen der Vagus- und Trigeminuswurzeln, welche beiden Faserbahnen beim Lophius noch engere Beziehungen zu einander halten als gewöhnlich, und verlassen das Gehirn, indem sie sich alsbald sensitiven Wurzeln des Vagus und Trigeminus anschliessen.



Durchschnitt der Medulla oblongata mit dem Lobus n. later. von Lophius. (Schematisch.)

Es galt nun zu untersuchen, ob sie im weiteren Verlauf noch kenntlich sein würden; zu meiner grossen Freude liess sich constatiren, dass dies ohne Schwierigkeit gelingt, da die Verlängerungen der Axencylinder in den Wurzeln sogar noch an Breite zunehmen und Kolossalfasern darstellen, welche den Durchmesser von 0.032^{mm} zeigen können, während die breiten, motorischen Axencylinder desselben Präparates nur 0.0032 messen. Es scheint, dass diese Ver-

Digitized by Google

mehrung des Faserdurchmessers auf Verschmelzung von Axencylinderfortsätzen zurückzuführen ist, da die Zahl der letzteren, ebenso wie die der Zellen selbst grösser ist als die Zahl der gebildeten Kolossalfasern.

Sehr auffallend ist auch, dass diese im Unterschied von den motorischen Nervenfasern wenigstens im Balsampräparat keine Spur einer Markscheide erkennen lassen, sondern von einer starken, mit ovalen Kernen dicht besetzten HENLE-SCHWANN'schen Scheide umgeben sind. Sie füllen dieselbe häufig vollkommen aus, in anderen Fällen hat sich ihre Substanz, offenbar durch Schrumpfung hier und da von der Wandung zurückgezogen. Der Faserquerschnitt ist deutlich punktirt als Ausdruck fibrillärer Zusammensetzung, welche auch der Längsschnitt erkennen lässt, wenn auch weniger deutlich als man nach der Punktirung des Querschnittes vermuthen könnte; dies dürfte seinen Grund in dem Umstande haben, dass die Fibrillen nicht parallel angeordnet sind, sondern sich etwas verflechten. Die Kolossalfasern imbibiren sich weniger leicht mit Carmin als die motorischen, kurz, sie verhalten sich darin, ebenso wie in Bezug auf die Scheiden, ähnlich den blassen Nervenfasern. Die weiter abwärts von den Vaguswurzeln gelegenen Nervenursprünge erhalten keine der Riesenfasern mehr; vielleicht dass Nervus spinalis I noch vereinzelte, weniger deutlich unterschiedene aufnimmt.

Es fragt sich nun: Was bedeuten die Kolossalfasern und wo endigen sie?

Wir sind gewiss berechtigt, diesem Plus auf Seiten des Nervensystems gegenüber ein entsprechendes Plus an peripherischen Organen zu erwarten, und es könnten vielleicht auch dem Lophius elektrische Batterien eigenthümlich sein. Von solchen ist bisher indessen Niemandem etwas bekannt geworden, dagegen zeigt der Fisch eine Entwickelung des Hautsystems, wie sie meines Wissens einzig in ihrer Art dasteht.

Der italienische Fischer nennt den Lophius »Pescatore«, wonach der Fisch bekanntlich auch im System bezeichnet wurde, und begrüsst ihn also als Handwerkscollegen. In der That ist dieser Name sehr treffend gewählt; denn der Lophius erwirbt sich wirklich »sein tägliches Fleisch« als geschickter Angler. Die Möglichkeit zu solcher Thätigkeit giebt ihm eben die merkwürdige Entwickelung des Hautsystems, welche ein erstaunliches Beispiel specieller Anpassung darstellt.

Der kurze, mit unverhältnissmässig breitem und grossem Kopf versehene Körper des Fisches, dessen Weite des Maules über ein Drittel der Gesammtlänge beträgt, ist längs der Kieferränder, an den Seitenlinien und Flossen mit zierlich blattförmigen Anhängen der Haut besetzt, welche im Leben regelmässig und symmetrisch geordnet erscheinen. Die Blättchenreihen maskiren den träge am Boden ruhenden,

Digitized by Google

halb im Schlamm eingegrabenen Fisch so vollkommen, dass er aussieht, als hätten verblasste Florideen und Corallineen einen flachen Stein dicht überwachsen. So liegt er im Hinterhalt und lässt, unbemerkt von der Beute, seinen Angelapparat spielen.

Als solcher dient ihm ein langer bis auf den Rand der Nasenbeine vorgeschobener, dünner Flossenstrahl, welcher, selbst ganz steif und erheblich lang, beweglich am Grunde eingelenkt ist, wo sich als Erheber und Senker zwei Muskelpaare ansetzen. An dem Ende dieses nackten, im Wasser wenig sichtbaren Strahles, des Angelstockes, findet sich ein mannigfach gestalteter Anhang von weichem Gewebe, bald wurmförmig von Aussehen, bald wie ein monströses Insect mit langen Flügeln. Es fehlt somit der Angel nicht an der Lockspeise und scheint in manchen Gewässern das Angeln mit dem Wurm günstiger zu sein, in anderen wiederum das mit der Fliege; freilich kann der fischige Fischer nicht nach eigener Wahl die Lockspeise wechseln, sonder muss dies der Naturzüchtung überlassen.

Die angelockte Beute wird dann von dem Lophius ohne Mühe aufgeschnappt; sie fährt ihm wohl von selbst, nach dem plötzlich niedergelegten Köder haschend in den zum richtigen Moment geöffneten Rachen, der seiner enormen Weite nach mit dem Hamen des menschlichen Fischers verglichen werden kann.

In Smyrna zeigten die Lophius öfter den wurmförmigen Anhang der Angel, in Neapel und Triest gewöhnlich den fliegenförmigen, zuweilen selbst ungemein verlängerte Membranen. Hinter dem Hauptstrahl, der eigentlichen Angel, folgen noch ein oder mehrere andere, welche aber nicht den Endanhang führen, sondern ganz nackt sind oder unregelmässige Anhänge in verschiedener Höhe am Strahl tragen, also nur zur Vervollständigung der Maske dienen können.

Es lag nahe, das soeben beschriebene Centralorgan mit der mächtigen Entwickelung des Hautsystems in Verbindung zu bringen, und diese Vermuthung hat der Verlauf der Kolossalfasern, soweit sich derselbe bisher feststellen liess, auch bestätigt. Ich führte bereits oben an, dass dieselben sich den sensitiven Bahnen anschliessen, und gewiss kann man schon von vornherein annehmen, dass die je zwei Muskelpaare der Strahlen auf dem Kopfe, wie solche kleiner den Rückenflossenstrahlen gleichfalls eigen sind, den enormen Aufwand in der Entwickelung gangliöser Centren nicht gut erklären könnten. Die Hunderte von Blättchenanhängen auf der Haut, welche mit Gefühlsnerven zu versehen sind, wäre es auch nur, um über die zierliche, regelmässige Anordnung zu wachen, machen jedenfalls einen höheren Anspruch an die Innervationscentren.

In den Wurzeln des Trigeminus und Vagus, begleitet von gewöhnlichen sensitiven und sympathischen Fasern, ziehen die Kolossal-

Digitized by Google

fasern zu den Spinalganglien dieser Nerven, um dann jenseits in die Hautäste des Seitennervensystems und der Trigeminusverzweigung einzutreten. Sie sind hier durch plötzlichen Zerfall beim Durchtritt durch die Ganglien, wo sich ihnen die Fortsätze dieser Zellen beimischen, erheblich schmaler geworden, und bilden bei der geringen oder fehlenden Entwickelung des Markes dichte, schwieriger zu erkennende Bündel, deren Endverzweigung in der Haut bisher noch nicht festgestellt werden konnte. Vielleicht führen sie uns später zu Endapparaten, die noch andere der Zeit ungeahnte Beziehungen auf die Function haben.

Was die allgemeinen Betrachtungen anlangt, zu denen der Befund anregt, so möchte ich zunächst darauf hinweisen, wie erfreulich es für das Studium der Ganglienzellen überhaupt sein dürfte, ein Object gefunden zu haben, welches durch die relative Grösse, die freie Lagerung und nicht sehr mühsame Beschaffung des Materials die Möglichkeit bietet, mancher Frage nach der Natur dieser Elemente näher zu treten. Wenn man hier eine Ganglienzelle in eine Schnittserie zerlegt hat und mittels einer nur hundertfachen Vergrösserung untersucht, so kann man z. B. nicht mehr auf die Idee kommen, ob nicht vielleicht der Axencylinderfortsatz vom Kern, oder gar vom Kernkörperchen seinen Ursprung nimmt. Es verschwindet die von Max Schultze vertheidigte Vorstellung vom fibrillären Bau des Protoplasma's der Ganglienzelle selbst und gewinnt diejenige vom fibrillären Bau des von ihr ausgehenden Axencylinders. Wenn irgend wo, so ist hier über den Bau des Kernes und des Kernkörperchens weitere Einsicht zu gewinnen, da zumal letzteres ein wahrer Riese seines Geschlechtes ist. Ferner muss die Anordnung der Elementartheilchen in den Kolossalfasern leichter zu erforschen sein als in anderen bekannten Nervenfasern.

Wir sehen wiederum im vorliegenden Falle, wie bei den elektrischen Fischen, welche innige Wechselbeziehung zwischen der Ausbildung peripherischer Organe und der zu ihnen gehörigen nervösen Centren besteht. Die Vergleichungspunkte mit dem Bau der elektrischen Fische mussten mir persönlich mit Rücksicht auf die noch unbeendeten Arbeiten in diesem Gebiet besonders wichtig erscheinen.

Ich glaube es mit vollster Überzeugung aussprechen zu dürfen, dass der Befund bei Lophius meiner Behauptung, die Entwickelung des elektrischen Organs nebst zugehörigen Nerven bei Malopterurus gehöre einer anderen nicht musculären Kategorie solcher Bildungen an, eine neue, unerwartete Stütze gewährt. Der Zitterwels hat nicht mehr allein seine Riesenganglienzellen, noch auch die von denselben ausgehenden Kolossalfasern, sondern theilt diese Eigenthümlichkeit mit dem Anglerfisch. Bei beiden Fischgattungen lagern die Ganglienzellen im sensitiven Gebiet des Rückenmarks; bei beiden verlaufen

Digitized by Google

die Nerven derselben zu Hautorganen. Sie trennen sich durch diese Merkmale definitiv vom Charakter der motorischen Centren.

Die Analogie zwischen beiden Organen unterliegt indessen gewissen Beschränkungen: Bei Malopterurus sind es nur zwei Ganglienzellen, bei Lophius eine erhebliche Anzahl; bei ersterem sind sie in der Rückenmarksubstanz hinter dem Centralcanal eingebettet, bei letzterem derselben aufgelagert; bei jenem entwickelt sich die elektrische Faser aus einem Geflecht der mächtig ausgebildeten Protoplasmafortsätze, bei diesem treten diese Fortsätze nur schwach auf und der Axencylinderfortsatz entspringt direct; beim Zitterwels sind die Scheiden des elektrischen Nerven im Vergleich zum Axencylinder, den eine spärliche Markscheide umgiebt, ungeheuer vermehrt, beim Anglerfisch fehlt ein deutliches Fettmark um die mächtigen Axencylinder der Wurzeln; dieselben senken sich wie eine richtige sensitive Nervenwurzel in Spinalganglien ein, während nach Bilharz jene an den Ganglien ununterbrochen vorbeiziehen sollen.

Auch diese Abweichungen geben viel zu denken und dürften geeignet sein mehr Licht über die Natur der in Rede stehenden Organe zu verbreiten. Freilich ist es zur Zeit noch unmöglich anders als vermuthungsweise darüber zu sprechen. So möchte ich die Verschiedenheit des Nervenursprungs von der Zelle nicht als eine principielle, sondern als eine graduelle auffassen; denn bei den Lophiuszellen ist der breit von dem lückenhaften, unregelmässigen Protoplasmakörper entspringende Axencylinder auch schon etwas aus der innigen Verbindung mit der Zelle gerückt, wie es dann unter noch stärkerer Ausbildung der Fortsätze bei Malopterurus in so hohem Grade der Fall ist.

Ich habe die Überzeugung gewonnen, dass die mächtige Entwickelung der Protoplasmafortsätze bei den nur zweifach auftretenden Ganglienzellen des Malopterurus das Zeichen ist, dass sie mit entfernteren Centralorganen (etwa dem auffallend grossen Cerebellum) in besonders inniger Verbindung stehen, während die locker lagernden, virtuell beinahe unipolaren Ganglienzellen des Lophius (bei minimalem Cerebellum) ein Centralorgan von grösserer Selbständigkeit bekunden.

So würde der scheinbare Widerspruch beim Zitterwels im Vergleich mit den andern elektrischen Fischen, wo zahlreiche Ganglienkörper die Innervation der elektrischen Organe besorgen, weniger befremdend; d. h. man hätte sich zu denken, dass die vielen Ganglienzellen (mit einem überwiegenden Fortsatz) bei Torpedo und Gymnotus, respective Lophius, die Innervation directer besorgen als die zwei Zellen des Malopterurus mit den mächtigen Geflechten der Fortsätze. Ein Seitenblick auf Mormyrus, mit dem ungeheueren Kleinhirn, bei äusserst dürftigem Rückenmark, legt die Vermuthung ebenfalls nahe,

Digitized by Google

die alte Anschauung der Anatomen, der eben genannte Hirntheil habe etwas mit der Innervation der elektrischen Organe zu thun, sei nicht ganz unberechtigt.

Ist meine Behauptung richtig, dass beim Zitterwels die elektrischen Organe umgewandelten Drüsenelementen homolog sind, so würde die Besonderheit der Organnerven, welche durch den Ursprung, die enormen Scheiden, dürftige Markentwickelung, Nichtbetheiligung an den Spinalganglien eine Mittelstellung zwischen motorischen und sensitiven Nerven einnehmen, als Drüsennerven begreiflicher werden.

Schliesslich möchte ich noch ein paar Worte hinsichtlich des Lophius-Rückenmarks anfügen. Der geringen Entwickelung des Rumpfes entspricht die auffallende Verkürzung des Rückenmarkes, welches früh und vollständig in die Bildung einer Cauda equina übergeht. Es könnte die Annahme entstehen, dass die sonst in der Medulla spinalis vertheilten Ganglienzellen wegen der Verkürzung des Organs etwa an eine Stelle zusammengedrängt seien, um die oben beschriebene Ansammlung hinter der Rautengrube zu bilden.

Diese Annahme ist allerdings schon durch die Beobachtungen über Lagerung der Zellen, Natur und Verlauf der daraus hervorgehenden Axencylinder widerlegt, zumal den spinalen Wurzeln kein nennenswerther Antheil an diesen zufliesst; es kommt aber hinzu, dass das Lophius-Rückenmark trotz seiner Verkürzung und geringem Durchmesser gut ausgebildete, motorische Ganglien der Vorderhörner in reichlicher Anzahl enthält.

Somit vereinigt sich Alles, um die beschriebene Bildung als ein Centralorgan *sui generis* erscheinen zu lassen, wofür ich die Bezeichnung Lobus nervi lateralis vorschlage, da die davon ausgehenden Nerven wenigstens vorwiegend in das Seitennervensystem übertreten.

Möge es seiner Vorzüge wegen allen Freunden anatomischer und physiologischer Studien des Nervensystems hierdurch zu genauerer Erforschung angelegentlich empfohlen sein.

Digitized by Google

Digitized by Google

49. Über einige Anwendungen der Theorie der Formänderung, welche ein Körper erfährt, wenn er magnetisch oder diëlektrisch polarisirt wird.

Von G. Kirchhoff.

(Vorgetragen am 11. December; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. LI]; — ausgegeben am 18. December.)

Ich erlaube mir der Akademie einige Anwendungen der Theorie der Formänderung vorzulegen, welche ein Körper erfährt, wenn er magnetisch oder diëlektrisch polarisirt wird. Ich will anknüpfen an die Darstellung dieser Theorie, die ich in den Sitzungsberichten vom 28. Februar 1884 gegeben habe, und die dort gebrauchten Bezeichnungen benutzen. Der betrachtete Körper ist dort als ein fester elastischer vorausgesetzt; man braucht in den dort abgeleiteten Formeln aber nur die mit k'' bezeichnete Constante $= 0$ zu setzen, um sie auf den Fall anwendbar zu machen, dass der Körper eine Flüssigkeit, eine tropfbare oder gasförmige, ist, wodurch man diejenigen Formeln erhält, die für diesen Fall Hr. von Helmholtz in einer Mittheilung an die Akademie am 17. Februar 1881 abgeleitet hat, und die wiederum in die früher schon von Sir W. Thomson und Cl. Maxwell aufgestellten übergehen, wenn die Constante $k' = 0$ gesetzt wird, was erlaubt ist, wenn die Flüssigkeit als incompressibel betrachtet werden darf, da dann ihre Gleichgewichtsfigur von dem Werthe von k' unabhängig ist. Auf diesen einfachsten Fall kommen die Versuche zurück, deren Beschreibung Hr. Quincke am 5. April 1883 und am 17. Januar 1884 der Akademie vorgelegt und durch die er die Diëlektricitäts-Constante und die von ihm sogenannte Diamagnetisirungs-Constante für eine grosse Zahl von Flüssigkeiten bestimmt hat. Es sollen die nächsten Betrachtungen sich auf eine Anordnung beziehen, wie sie bei diesen Quincke'schen Versuchen stattfand.

1.

Man denke sich ein magnetisches Feld, das durch einen elektrischen Strom hervorgerufen ist, der nach Willkür erzeugt und unterbrochen werden kann. Bei den Quincke'schen Versuchen war dasselbe

Digitized by Google

mit Hülfe eines kräftigen Elektromagnetes hergestellt, dessen ebene Polflächen in einem Abstande von einigen Millimetern von einander sich befanden. In dem grössten Theile des Raumes zwischen den Polflächen war die magnetische Kraft nahezu constant, in der Nähe ihrer Ränder nahm sie schnell ab und war nahezu = o in mässiger Entfernung von diesen Rändern ausserhalb jenes Raumes. In einem solchen magnetischen Felde seien verschiedene Körper, die einander berühren, theils feste, theils flüssige, vorhanden; die festen sollen als starr, die flüssigen als incompressibel angesehen werden, sowohl wenn sie tropfbar, als wenn sie gasförmig sind; die Änderungen der Dichtigkeit sollen also vernachlässigt werden, ausser insofern, als sie Änderungen des Druckes bedingen. Es handelt sich darum, die Bedingungen für das Gleichgewicht der Flüssigkeiten zu bilden; als wirksam sollen dabei neben den magnetischen Kräften die Schwere und die Capillarkräfte angenommen werden. Der Index 1 beziehe sich auf eine der Flüssigkeiten, p_1 sei der Druck in einem Punkte derselben, der Druck, der abhängig ist von der in unendlich kleinen Grenzen variirenden Dichtigkeit, ϕ_1 das magnetische Gesammtpotential, μ_1 die Dichtigkeit, g die Intensität der Schwere, und die Richtung der x-Axe sei die der Schwere. Aus dem S. 148 meiner citirten Abhandlung für die Kraft A aufgestellten Ausdrucke folgt dann

$$p_1 = \mu_1 g x + \frac{k_1'}{2}\left(\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\right)^2\right) + c_1, \qquad (1)$$

wo c_1 eine Constante bezeichnet. Eine ähnliche Gleichung gilt für jede der vorhandenen Flüssigkeiten.

Für die Berührungsfläche zweier Flüssigkeiten, 1 und 2, hat die Differenz $p_1 - p_2$ einen von Null verschiedenen Werth. Derselbe rührt zum Theil von den Capillarkräften, zum Theil von den magnetischen her. Es seien r' und r'' die Hauptkrümmungsradien eines Elementes der Berührungsfläche, positiv gerechnet, wenn die Oberfläche der Flüssigkeit 1 eine convexe ist, n die nach dem Innern der ersten Flüssigkeit gerichtete Normale des Elements, H eine von der Natur der beiden Flüssigkeiten abhängige Constante; dann ist

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 = {} & \frac{H}{2}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}\right) + \left(\frac{1}{4\pi} + k_1\right)\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial n}\right)^2 - \left(\frac{1}{4\pi} + k_2\right)\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial n}\right)^2 \\ & - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi} + k_1 - k_1'\right)\left(\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\right)^2\right) \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi} + k_2 - k_2'\right)\left(\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial z}\right)^2\right). \end{aligned} \qquad (2)$$

Digitized by Google

Man findet diese Gleichung aus den a. a. O. S. 147 für $A_x, A_y, \ldots$ aufgestellten Ausdrücken, wenn man eine der Coordinatenaxen mit der Normale n zusammenfallen lässt und benutzt, dass für die Berührungsfläche

$$\phi_1 = \phi_2$$
$$\left(\frac{1}{4\pi} + k_1\right)\frac{\partial\phi_1}{\partial n} = \left(\frac{1}{4\pi} + k_2\right)\frac{\partial\phi_2}{\partial n} \tag{3}$$

ist. Substituirt man in die Gleichung (2) für p_1 den in (1) angegebenen Ausdruck, für p_2 den entsprechenden und eliminirt mit Hülfe von (3) ϕ_2, so erhält man

$$c_1 - c_2 = (\mu_2 - \mu_1)\,gx + \frac{H}{2}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}\right) \tag{4}$$
$$- \frac{2\pi(k_2 - k_1)^2}{1 + 4\pi k_2}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial n}\right)^2 + \frac{k_2 - k_1}{2}\left(\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\right)^2\right).$$

Stossen 3 verschiedenartige Körper in einer Linie zusammen, so wirken auf die Theile dieser Linie noch besondere, von der Capillarität herrührende Kräfte, welche mit einander im Gleichgewicht sein müssen. Fällt die Grenzlinie der Berührungsfläche zweier Flüssigkeiten in die Oberfläche eines festen Körpers, die hier keine scharfe Kante darbietet, so ist die Bedingung für dieses Gleichgewicht die, dass die Trennungsfläche der beiden Flüssigkeiten die Oberfläche des festen Körpers unter einem bestimmten Winkel schneidet. Dieser Winkel muss derselbe sein, mögen magnetische Kräfte wirken oder nicht wirken.

2.

Es kann der Fall stattfinden, dass das Gleichgewicht beim Eintritt der magnetischen Kräfte dadurch erhalten wird, dass man den Druck in geeigneter Weise verändert, ohne dass irgendwo die geometrischen Verhältnisse geändert werden. Sind nur zwei Flüssigkeiten, 1 und 2, vorhanden und sind δc_1 und δc_2 die Vergrösserungen, welche die Constanten c_1 und c_2 erfahren, wenn die magnetischen Kräfte in Wirksamkeit treten und das Gleichgewicht erhalten wird, so muss nach (4) für die Berührungsfläche

$$\delta c_1 - \delta c_2 = -\frac{2\pi(k_2 - k_1)^2}{1 + 4\pi k_2}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial n}\right)^2 + \frac{k_2 - k_1}{2}\left(\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\right)^2\right) \tag{5}$$

sein.

Es werde nun angenommen, dass k_1 und k_2 als unendlich klein betrachtet werden dürfen. Diese Voraussetzung ist bei den von Hrn.

Digitized by Google

Quincke untersuchten Flüssigkeiten erfüllt. Diejenige von ihnen, bei der k seinen grössten Werth hatte, war eine wässrige Lösung von Eisenchlorid von der Dichtigkeit 1.51, und für diese fand er[1]

$$k = 65.10^{-6},$$

wenn für atmosphärische Luft diese Grösse = Null gesetzt wird. Ausser den beiden Flüssigkeiten 1 und 2 mögen in dem magnetischen Felde noch feste polarisirbare Körper vorhanden sein, für welche die Constante k ebenfalls unendlich kleine Werthe besitzt. Die Gleichung (5) vereinfacht sich dann zunächst dadurch, dass das erste Glied ihrer rechten Seite gegen das zweite vernachlässigt werden kann.

Ferner darf für ϕ_1 der Werth gesetzt werden, den das Potential haben würde, wenn überall in dem magnetischen Felde $k = 0$ wäre, oder wenn (was gleichbedeutend hiermit sein soll) atmosphärische Luft das ganze magnetische Feld erfüllte. Bezeichnet man durch ϕ diesen Werth, so wird die genannte Gleichung also

$$\delta c_1 - \delta c_2 = \frac{k_2 - k_1}{2}\left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right).$$

Damit diese, für die Berührungsfläche von 1 und 2 geltende Bedingung erfüllt werden kann, muss die magnetische Kraft für diese Fläche eine constante Grösse haben.

Die Flüssigkeit 1 sowohl, als die Flüssigkeit 2 soll bis zu Orten reichen, in denen die magnetischen Kräfte, wenn sie erregt sind, eine verschwindend kleine Intensität besitzen; der Gleichung (1) zufolge sind dann δc_1 und δc_2 die Vergrösserungen, die der Druck hier erfährt, wenn die magnetischen Kräfte in Thätigkeit gesetzt werden und das Gleichgewicht erhalten wird. Endlich möge die Anordnung getroffen sein, dass die Druckänderung $\delta c_2 = 0$ ist; die Druckvermehrung δc_1 ist dann

$$= \frac{k_2 - k_1}{2}\left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right). \qquad (6)$$

Nach dieser Formel hat Hr. Quincke seine Versuche berechnet. Die Voraussetzungen, die derselben zu Grunde liegen, waren bei ihnen in zwei verschiedenen Weisen verwirklicht. Bei der einen Methode diente eine gläserne, U-förmige Röhre, die mit der zu untersuchenden Flüssigkeit theilweise gefüllt war, und deren einer Schenkel zwischen den Polflächen des Elektromagneten, deren anderer ausserhalb der-

[1] Hr. Quincke hat aus seinen Messungen eine Grösse berechnet, die er f genannt hat und die mit dem hier eingeführten k in der Relation steht

$$k = f \cdot 2g.$$

Digitized by Google

selben sich befand. Die zu untersuchende Flüssigkeit ist hier als die Flüssigkeit 1, die atmosphärische Luft als die Flüssigkeit 2 zu rechnen. Bei der anderen Methode erfüllte die zu untersuchende Flüssigkeit den grössten Theil des Raumes zwischen den horizontal gestellten Polflächen, während den Rest eine flache Luftblase einnahm, die beide Polflächen berührte und mit einem aussen befindlichen Manometer communicirte. Hier ist die zu untersuchende Flüssigkeit die Flüssigkeit 2 und die atmosphärische Luft die Flüssigkeit 1.

3.

Die hier angestellten theoretischen Betrachtungen gelten auch, wenn statt der magnetischen Kräfte elektrische thätig sind, und Hr. QUINCKE hat auch die Diëlektricitäts-Constanten verschiedener isolirender Flüssigkeiten durch Versuche bestimmt, die den zuletzt erwähnten magnetischen Versuchen ganz ähnlich sind. Zwischen zwei horizontale Condensatorplatten, die in einem, mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllten Gefässe aufgestellt waren, hatte er eine flache Luftblase gebracht, die beide Platten berührte und durch eine, in der oberen mündende Röhre mit einem Manometer communicirte, das ausserhalb des Gefässes sich befand. Wurde der Condensator geladen, so zeigte das Manometer eine Vermehrung des Druckes an. Auch für diese gilt der Ausdruck (6), obwohl hier die Grössen k_1 und k_2 nicht als unendlich klein zu betrachten sind, wenn nur die Dicke der Luftblase (also der Abstand der Condensatorplatten) unendlich klein ist gegen ihre horizontalen Dimensionen.

Es seien $x = 0$ und $x = \alpha$ die Gleichungen der inneren Oberflächen der beiden Condensatorplatten, $\phi = 0$ und $\phi = P$ die Werthe des Potentials in diesen, wenn sie geladen sind. Alle in Betracht kommenden Grenzflächen heterogener Körper sollen Rotationsflächen sein, deren gemeinsame Axe die x-Axe ist. Welche Function ϕ von x, y, z in der Nähe des Randes der Luftblase ist, lässt sich mit den jetzigen Hülfsmitteln der Analysis allgemein nicht finden, aber man weiss Folgendes: Es ist ϕ überall eine Function von x und $\sqrt{y^2+z^2}$; für $x = 0$ und $x = \alpha$ verschwinden an den Oberflächen der Condensatorplatten $\frac{\partial\phi}{\partial y}$ und $\frac{\partial\phi}{\partial z}$, und in einer Entfernung vom Rande der Blase, die gross genug gegen α ist, ist sowohl in ihr, als in der umgebenden Flüssigkeit

$$\phi = P\frac{x}{\alpha}. \tag{7}$$

Digitized by Google

Nun fasse man einen unendlich kleinen Raum ins Auge, der begrenzt ist

durch die Ebenen $x = 0$ und $x = \alpha$,

einen Theil der xy-Ebene, in dem y positiv ist,

eine Ebene, die durch die x-Axe gelegt ist, mit der xy-Ebene den unendlich kleinen Winkel ϑ bildet und zwischen den positiven Theilen der y-Axe und der z-Axe sich befindet,

und endlich zwei Cylinderflächen, die um die x-Axe mit den Radien β_1 und β_2 beschrieben sind.

Diese Radien sollen so gewählt sein, dass die erste Cylinderfläche in der Luft, die zweite in der äusseren Flüssigkeit in der Region sich befindet, in der der in (7) für ϕ angegebene Ausdruck gilt. Es muss dann $\beta_2 - \beta_1$ unendlich gross gegen α sein; dabei soll aber diese Differenz noch unendlich klein gegen die Werthe sein, die β_1 und β_2 selbst besitzen.

Es soll ausgedrückt werden, dass die Summe der y-Componenten der Kräfte verschwindet, welche auf die in dem bezeichneten Raume vorhandene Masse ausgeübt werden. Dabei sollen die elektrischen Kräfte, welche hier wirksam sind, ersetzt werden durch die auf die Oberfläche wirkenden Druckkräfte, durch die sie ersetzt werden können, und deren Componenten durch $A_x, B_x, \ldots$ bezeichnet werden mögen.

Für die Ebenen $x = 0$ und $x = \alpha$ ist $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$, und, da allgemein

$$B_x = -\left(\frac{1}{4\pi} + k\right) \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

ist, so tragen die Theile dieser Ebenen, welche zur Oberfläche des gedachten Raumes gehören, zu der gesuchten Summe nichts bei.

Was zu dieser Summe die Cylinderflächen, deren Radien β_1 und β_2 genannt sind, hinzubringen, ist, wenn man nur die Grössen der höchsten Ordnung berücksichtigt, den Index 1 auf die Luft und den Index 2 auf die umgebende Flüssigkeit bezieht,

$$= \alpha \beta_1 \vartheta \frac{k_1 - k_2 - k_1' + k_2'}{2} \frac{P^2}{\alpha^2}. \tag{8}$$

Der Theil der xy-Ebene, der zur Begrenzung des gedachten Raumes gehört, trägt auch nichts zu der zu bildenden Summe bei, da allgemein

$$B_z = -\left(\frac{1}{4\pi} + k\right) \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

und hier $\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$ ist.

Digitized by Google

Die letzte Begrenzungsfläche des betreffenden Raumes hat die Grösse

$$\alpha(\beta_2 - \beta_1)$$

und die y-Componente des auf die Einheit ihrer Fläche bezogenen Druckes ist

$$= C_z \vartheta,$$

wo C_z unter der Annahme $z = 0$ zu berechnen ist. Dieses C_z ist von der Ordnung von $\frac{P^2}{\alpha^2}$ und daher ist auch der Beitrag, den diese Fläche zu der in Rede stehenden Summe liefert, unendlich klein gegen das in (8) angegebene Glied.

Daher ist die Gleichgewichtsbedingung, welche gebildet werden sollte,

$$0 = \alpha\beta_1\vartheta \frac{k_1 - k_2 - k_1' + k_2'}{2} \frac{P^2}{\alpha^2} + \beta_1\vartheta \int_0^\alpha (p_1 - p_2)\, dx.$$

Drückt man hier p_1 und p_2 mit Hülfe von (1) aus, zieht von der dann entstehenden Gleichung diejenige ab, in die sie sich verwandelt, wenn man annimmt, dass die elektrischen Kräfte ausser Thätigkeit gesetzt sind, giebt den Zeichen δc_1 und δc_2 die entsprechende Bedeutung, wie bei der Discussion der magnetischen Versuche des Hrn. QUINCKE, und setzt auch hier $\delta c_2 = 0$, so erhält man für δc_1

$$\frac{k_2 - k_1}{2} \frac{P^2}{\alpha^2},$$

einen Ausdruck, für den auch der Ausdruck (6) geschrieben werden kann.

4.

Hr. QUINCKE brachte zwischen seine, durch eine isolirende Flüssigkeit getrennten Condensatorplatten eine Luftblase, die nur die obere Platte berührte; wurde der Condensator geladen, so verlängerte sich die Blase in der Richtung der Kraftlinien und zog sich zusammen in den auf diesen senkrechten Richtungen. Zwischen den Polflächen seines Elektromagnetes zeigte unter entsprechenden Verhältnissen eine Luftblase diese Erscheinung nicht und auch ein hängender Tropfen verschiedener magnetischer Flüssigkeiten erlitt keine Formänderung, wenn der Magnetismus erregt wurde. Eine Anordnung, die ähnlich der eben erwähnten ist und keine Schwierigkeit der Rechnung darbietet, soll hier theoretisch verfolgt werden.

Der Raum, so weit er in Betracht kommt, sei von zwei Flüssigkeiten, 1 und 2, erfüllt, die, wenn die elektrischen oder magnetischen

Digitized by Google

Kräfte nicht wirken, durch eine Kugelfläche vom Radius R getrennt sind. Damit das der Fall sein kann, muss die Schwere unwirksam sein. Sind die elektrischen oder magnetischen Kräfte erregt, so sollen sie ein Potential erzeugen, das in der äusseren Flüssigkeit, der Flüssigkeit 2, in grosser Entfernung von der Flüssigkeit 1 der Gleichung

$$\phi_2 = -a_2 x \tag{9}$$

genügt, wo a_2 eine Constante ist. Es soll die Gestalt bestimmt werden, die dabei die Grenzfläche der beiden Flüssigkeiten annimmt. Für dieselbe ergiebt sich aus der Gleichung (4) die Bedingung

$$\delta c_1 = \frac{H}{2}\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}-\frac{2}{R}\right) - \frac{2\pi(k_2-k_1)^2}{1+4\pi k_2}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial n}\right)^2 + \frac{k_2-k_1}{2}\left(\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\right)^2\right). \tag{10}$$

Es hat die Flüssigkeit 1 einen Mittelpunkt; in diesen lege man den Anfangspunkt der Coordinaten. Die gesuchte Fläche ist dann eine Rotationsfläche, deren Axe die x-Axe ist, und für ihren Schnitt mit der xy-Ebene ist daher

$$\pm\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}\right) = \frac{1}{y}\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} + \frac{1}{dy}d\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

Setzt man

$$x = \rho\cos\vartheta \qquad y = \rho\sin\vartheta,$$

nimmt ϑ als unabhängige Variable an und macht

$$\frac{d\rho}{d\vartheta} = \rho' \qquad \frac{d^2\rho}{d\vartheta^2} = \rho'',$$

so wird diese Gleichung

$$\pm\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}\right) = \frac{\rho'\cos\vartheta-\rho\sin\vartheta}{\rho\sin\vartheta\sqrt{\rho'^2+\rho^2}} + \frac{\rho''\rho-2\rho'^2-\rho^2}{(\rho'^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Man setze ferner

$$\rho = R(1+u)$$

und nehme u als unendlich klein an. Man erhält dann, indem man die Zweideutigkeit des Vorzeichens durch die Erwägung hebt, dass, wenn u verschwindet, $r' = r'' = R$ wird,

$$\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}-\frac{2}{R} = -\frac{1}{R}\left(\frac{d^2u}{d\vartheta^2}+\operatorname{cotg}\vartheta\frac{du}{d\vartheta}+2u\right)$$

oder

$$= -\frac{1}{R}\left((1-\mu^2)\frac{d^2u}{d\mu^2}-2\mu\frac{du}{d\mu}+2u\right), \tag{11}$$

wenn

$$\mu = \cos\vartheta.$$

Digitized by Google

Die Functionen ϕ_1 und ϕ_2 sind aus der Differentialgleichung $\Delta\phi = 0$, der sie genügen müssen, der Bedingung (9) und den Bedingungen (3) zu bestimmen. Die letzten sind, da u als unendlich klein angenommen ist, zu erfüllen für $\rho = R$. Daraus folgt

$$\phi_1 = -a_1\rho\mu$$
$$\phi_2 = -\left(a_2\rho + \frac{b_2R^3}{\rho^2}\right)\mu,$$

wo

$$a_1 = \frac{3(1+4\pi k_2)}{3+4\pi(k_1+2k_2)}a_2$$
$$b_2 = \frac{4\pi(k_2-k_1)}{3+4\pi(k_1+2k_2)}a_2,$$

und $$\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial n}\right)^2 = a_1^2\mu^2, \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\right)^2 = a_1^2.$$

Substituirt man diese Werthe, sowie den Ausdruck (11) in die Gleichung (16), so erhält man

$$(1-\mu^2)\frac{d^2u}{d\mu^2} - 2\mu\frac{du}{d\mu} + 2u = A - B\mu^2,$$

wo

$$A = -\frac{2R}{H}\left(\delta c_1 + \frac{k_1-k_2}{2}a_1^2\right)$$
$$B = \frac{R}{H}\frac{4\pi(k_1-k_2)^2}{1+4\pi k_2}a_1^2.$$

Wären A und $B = 0$, so wäre diese Gleichung die Differentialgleichung für die Kugelfunctionen erster Ordnung von einem Argument. Ein particuläres Integral der gefundenen Gleichung ist

$$u = \frac{A}{2} - \frac{B}{4}(1-\mu^2);$$

das allgemeine erhält man, wenn man die Ausdrücke

$$\mu \text{ und } \tfrac{1}{2}\mu\lg\frac{1+\mu}{1-\mu} - 1,$$

mit willkürlichen Constanten multiplicirt, hinzufügt. Diese Constanten sind hier aber gleich Null zu setzen, da u für $\mu = +1$ und $\mu = -1$ endlich bleiben und denselben Werth annehmen muss; denselben Werth, da der Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt der Flüssigkeit 1 gelegt ist. Die Annahme, dass dieselbe incompressibel sei, giebt eine Relation zwischen den Constanten A und B; in der That folgt aus ihr

Digitized by Google

$$\int_{-1}^{+1} u d\mu = 0, \text{ d. h. } A = \tfrac{1}{3} B,$$

so dass sich ergiebt

$$u = \frac{B}{4}(\mu^2 - \tfrac{1}{3}).$$

Hiernach erleidet die Flüssigkeit 1 in der Richtung der Kraftlinien eine Dilatation, die

$$= \frac{B}{6} \text{ d. h. } = \frac{R}{3H} \frac{2\pi (k_1 - k_2)^2}{1 + 4\pi k_2} a_1^2,$$

in jeder darauf senkrechten Richtung eine Contraction, die halb so gross ist. Die Dilatationen und Contractionen, die stattfinden, sind mit dem Quadrate der Differenz $k_1 - k_2$ proportional; darauf beruht es, dass sie im elektrischen Felde, wo diese Differenz einen erheblichen Werth hat, sich zeigen, während sie im magnetischen Felde, wo dieselbe ungemein klein ist, sich der Beobachtung entziehen.

5.

Es soll schliesslich die Formänderung berechnet werden, die eine Kugel von Eisen erfährt, wenn sie durch eine constante magnetische Kraft magnetisirt wird.

Diesem Falle entspricht es, dass in grosser Entfernung von der Kugel

$$\phi = -Jx$$

ist; J ist dann die Intensität der magnetisirenden Kraft, die Richtung der x-Axe ihre Richtung. Für die umgebende Luft werde $k = 0$ gesetzt und das Zeichen k auf das Eisen bezogen; dann ist im Innern der Kugel

$$\phi = -\frac{J}{1 + \frac{4\pi}{3} k} x.$$

Daraus folgt, dass die in meiner citirten Abhandlung[1] S. 148 mit A, B, C bezeichneten Kräfte verschwinden, und die mit $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ bezeichneten Druckkräfte, wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt der Kugel legt und ihren Radius mit R bezeichnet, diese Werthe annehmen:

[1] Sitzungsberichte vom 28. Februar 1884.

Digitized by Google

$$\overline{A} = \frac{J^2}{\left(1 + \frac{4\pi}{3}k\right)^2 R^3}\left(2\pi k^2 x^3 + \frac{k - k' - k''}{2} R^2 x\right)$$
$$\overline{B} = \frac{J^2}{\left(1 + \frac{4\pi}{3}k\right)^2 R^3}\left(2\pi k^2 x^2 y + \frac{k - k'}{2} R^2 y\right) \qquad (12)$$
$$\overline{C} = \frac{J^2}{\left(1 + \frac{4\pi}{3}k\right)^2 R^3}\left(2\pi k^2 x^2 z + \frac{k - k'}{2} R^2 z\right).$$

Nennt man u, v, w die Componenten der Verrückung, welche in Folge der Magnetisirung der materielle Punkt der Kugel erfährt, welcher vorher die Coordinaten x, y, z hatte, und setzt

$$X_x = -2K\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \Theta\sigma\right) \quad Y_z = Z_y = -K\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$
$$Y_y = -2K\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \Theta\sigma\right) \quad Z_x = X_z = -K\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$
$$Z_z = -2K\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \Theta\sigma\right) \quad X_y = Y_x = -K\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad (13)$$
$$\sigma = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

so hat man in Folge davon, dass die Kräfte A, B, C gleich Null sind,

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0 \qquad (14)$$
$$\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0$$

und für $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ist

$$R\overline{A} = -(xX_x + yX_y + zX_z)$$
$$R\overline{B} = -(xY_x + yY_y + zY_z) \qquad (15)$$
$$R\overline{C} = -(xZ_x + yZ_y + zZ_z).$$

Aus den Gleichungen (12), (13), (14), (15) sind u, v, w zu berechnen. Ihre Ausdrücke lassen sich, wie die in (12) angegebenen Ausdrücke von $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ aus je drei Theilen zusammensetzen, von denen der erste den Factor $2\pi k^2$, der zweite den Factor $\frac{k - k'}{2}$, der dritte den Factor $-\frac{k''}{2}$ enthält; man kann daher setzen

Digitized by Google

$$u = \frac{J^2}{\left(1+\frac{4\pi}{3}k\right)^2}\left(2\pi k^2 u_1 + \frac{k-k'}{2}u_2 - \frac{k''}{2}u_3\right)$$
$$v = \frac{J^2}{\left(1+\frac{4\pi}{3}k\right)^2}\left(2\pi k^2 v_1 + \frac{k-k'}{2}v_2 - \frac{k''}{2}v_3\right) \qquad (16)$$
$$w = \frac{J^2}{\left(1+\frac{4\pi}{3}k\right)^2}\left(2\pi k^2 w_1 + \frac{k-k'}{2}w_2 - \frac{k''}{2}w_3\right).$$

u_1, v_1, w_1 oder u_2, v_2, w_2 oder u_3, v_3, w_3 müssen dann den Gleichungen genügen, die aus den für u, v, w aufgestellten entstehen, wenn man (12) ersetzt durch

$$\overline{A} = \frac{x^3}{R^3} \qquad \overline{B} = \frac{x^2 y}{R^3} \qquad \overline{C} = \frac{x^2 z}{R^3} \qquad (17)$$

oder durch

$$\overline{A} = \frac{x}{R} \qquad B = \frac{y}{R} \qquad C = \frac{z}{R} \qquad (18)$$

oder durch

$$\overline{A} = \frac{x}{R} \qquad \overline{B} = 0 \qquad \overline{C} = 0. \qquad (19)$$

Den für u_1, v_1, w_1 geltenden Bedingungen kann man durch die Annahme

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 x^3 + b_1(y^2+z^2)x + c_1 R^2 x \\ v_1 &= a_1' x^2 y + b_1'(y^2+z^2)y + c_1' R^2 y \\ w_1 &= a_1' x^2 z + b_1'(y^2+z^2)z + c_1' R^2 z \end{aligned} \qquad (20)$$

genügen, wenn man die sechs Constanten $a_1, b_1, c_1, a_1', b_1', c_1'$ passend bestimmt. Bei dieser Annahme geben die Gleichungen (13)

$$\sigma = (3a_1 + 2a_1')x^2 + (b_1 + 4b_1')(y^2+z^2) + (c_1 + 2c_1')R^2$$
$$X_x = -2K\left(3a_1 x^2 + b_1(y^2+z^2) + c_1 R^2 + \Theta\sigma\right)$$
$$Y_y = -2K\left(a_1' x^2 + b_1'(3y^2+z^2) + c_1' R^2 + \Theta\sigma\right)$$
$$Z_z = -2K\left(a_1' x^2 + b_1'(y^2+3z^2) + c_1' R^2 + \Theta\sigma\right)$$
$$Y_z = Z_y = -4K b_1' yz$$
$$Z_x = X_z = -2K(a_1' + b_1)zx$$
$$X_y = Y_x = -2K(a_1' + b_1)xy.$$

Hiernach reduciren sich die Gleichungen (14) auf die beiden Relationen zwischen den eingeführten Constanten:

$$0 = 3a_1 + a_1' + b_1 + \Theta(3a_1 + 2a_1')$$
$$0 = a_1' + b_1 + 8b_1' + 2\Theta(b_1 + 4b_1').$$

Digitized by Google

Die Gleichungen (15) ergeben bei Rücksicht auf (17), wenn man $x^2+y^2+z^2$ für R^2 in den Ausdrücken für X_x, Y_y, Z_z setzt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2KR^2} &= 3a_1 + c_1 + \Theta(3a_1 + 2a_1' + c_1 + 2c_1')\\ 0 &= a_1' + 2b_1 + c_1 + \Theta(b_1 + 4b_1' + c_1 + 2c_1')\\ \frac{1}{2KR^2} &= 2a_1' + b_1 + c_1' + \Theta(3a_1 + 2a_1' + c_1 + 2c_1')\\ 0 &= 3b_1' + c_1' + \Theta(b_1 + 4b_1' + c_1 + c_1').\end{aligned}$$

So hat man sechs Gleichungen für die sechs Unbekannten $a_1, b_1, c_1, a_1', b_1', c_1'$; ihre Auflösung giebt:

$$\begin{aligned}b_1 &= (7+8\Theta)\frac{a_1}{4\Theta}, \quad a_1' = -(7+6\Theta)\frac{a_1}{4\Theta}, \quad b_1' = -2\Theta\frac{a_1}{4\Theta}\\ c_1 &= -\frac{7+31\Theta+32\Theta^2}{1+3\Theta}\frac{a_1}{4\Theta}, \quad c_1' = \frac{6\Theta+16\Theta^2}{1+3\Theta}\frac{a_1}{4\Theta}\end{aligned} \tag{21}$$

und

$$\frac{1}{2KR^2} = -(7+19\Theta)\frac{a_1}{4\Theta}.$$

Man kann ferner

$$u_2 = a_2 x, \quad v_2 = a_2 y, \quad w_2 = a_2 z \tag{22}$$

setzen, woraus nach (13) folgt

$$\begin{aligned}\sigma &= 3a_2\\ X_x = Y_y = Z_z &= -2K(1+3\Theta)a_2\\ Y_z = Z_x = X_y &= 0;\end{aligned}$$

dabei werden die Gleichungen (14) erfüllt und die Gleichungen (15) geben mit Hülfe von (18)

$$a_2 = \frac{1}{2K(1+3\Theta)}. \tag{23}$$

Endlich mache man

$$u_3 = a_3 x, \quad v_3 = b_3 y, \quad w_3 = b_3 z; \tag{24}$$

dabei wird

$$\sigma = a_3 + 2b_3$$

$$X_x = -2K\big(a_3 + \Theta(a_3+2b_3)\big), \quad Y_y = Z_z = -2K\big(b_3 + \Theta(a_3+2b_3)\big)$$

$$Y_z = Z_z = X_y = 0.$$

Auch hier werden die Gleichungen (14) von selbst erfüllt und die Gleichungen (15) geben bei Rücksicht auf (19)

$$a_3 = \frac{1+2\Theta}{2K(1+3\Theta)}, \quad b_3 = -\frac{\Theta}{2K(1+3\Theta)}. \tag{25}$$

Digitized by Google

Substituirt man in die Gleichungen (16) die in (20), (21), (22), (23), (24), (25) gegebenen Ausdrücke, so hat man die Lösung der vorgelegten Aufgabe.

Um die Werthe der Verrückungen u, v, w numerisch berechnen zu können, muss man zunächst die Grösse k kennen. Es ist dieselbe in der hier zu Grunde gelegten Theorie als eine Constante vorausgesetzt, man weiss aber, dass sie thatsächlich in hohem Grade veränderlich ist; man schliesst sich, bei beliebiger Gestalt des Eisenkörpers und beliebig gegebenen magnetisirenden Kräften, näher an die Wirklichkeit an, wenn man k als eine durch Beobachtungen zu bestimmende Function von

$$\sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2}$$

annimmt. Bezeichnet man dieses Argument durch $\mathfrak{R}$ und nimmt als Einheit dafür

$$\frac{\mathrm{gr}^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{cm}^{\frac{1}{2}}\cdot\mathrm{sec}}$$

an, eine Einheit, die zehnmal so gross ist als die von Gauss für magnetische Kräfte eingeführte, so ergeben die von Hrn. Stoletow[1] ausgeführten Messungen, dass k von 21.5 bis 174 zunimmt, wenn $\mathfrak{R}$ von 0.43 bis 3.2 wächst, und bis 42.1 sinkt, wenn $\mathfrak{R}$ weiter bis 31 vergrössert wird. Für eine Eisenkugel, die unter dem Einfluss einer constanten magnetisirenden Kraft, J, steht, gelten die unter der Annahme, dass k eine Constante ist, abgeleiteten Formeln auch bei Rücksicht auf die Veränderlichkeit dieser Grösse; nur ist der Werth derselben verschieden zu setzen je nach dem Werthe von J; er ist zu bestimmen aus der Beziehung zwischen k und $\mathfrak{R}$ und der Gleichung

$$\mathfrak{R}=\frac{J}{1+\frac{4\pi}{3}k}.$$

Es wäre

$$\begin{aligned} k &= 21.4 \quad \text{oder} = 175 \quad \text{oder} = 42.1 \\ \text{für } J &= 39.1 \quad \text{oder} = 2340 \quad \text{oder} = 5450. \end{aligned}$$

Über die Werthe von k' und k'' hat man gar keine Erfahrung. Setzt man aber voraus, dass sie nicht gross gegen k sind, und nimmt an, dass die Kraft J zwischen dem kleinsten und dem grössten der eben angeführten Werthe liegt, so braucht man bei der Berechnung

[1] Pogg. Ann. Bd. 146 S. 461.

Digitized by Google

der für die Verrückungen u, v, w in (16) gegebenen Ausdrücke k' und k'', und auch k, nicht genauer zu kennen; man kann dann k als unendlich gross betrachten und schreiben

$$u = \frac{9}{8\pi} J^2 u_1 , \quad v = \frac{9}{8\pi} J^2 v_1 , \quad w = \frac{9}{8\pi} J^2 w_1 . \tag{26}$$

Ist E der Elasticitäts-Coefficient des Eisens, so ist

$$E = 2K \frac{1 + 3\Theta}{1 + 2\Theta},$$

und setzt man mit POISSON

$$\Theta = \tfrac{1}{2},$$

so geben daher die Gleichungen (21)

$$a_1 = -\frac{5}{33} \frac{1}{ER^2}, \quad b_1 = -\frac{5}{6} \frac{1}{ER^2}, \quad c_1 = \frac{61}{66} \frac{1}{ER^2}$$
$$a_1' = \frac{25}{33} \frac{1}{ER^2}, \quad b_1' = = \frac{5}{66} \frac{1}{ER^2}, \quad c_1' = -\frac{7}{33} \frac{1}{ER^2}.$$

Aus (20) und (26) folgt hiernach

$$u = \frac{3}{176\pi} \frac{J^2}{ER^2} \left(-10x^3 - 55(y^2 + z^2)x + 61R^2 x\right)$$
$$v = \frac{3}{176\pi} \frac{J^2}{ER^2} \left(50x^2 y + 5(y^2 + z^2)y - 14R^2 y\right)$$
$$w = \frac{3}{176\pi} \frac{J^2}{ER^2} \left(50x^2 z + 5(y^2 + z^2)z - 14R^2 z\right).$$

Für die räumliche Dilatation, σ, ergiebt sich dabei

$$\sigma = \frac{3}{176\pi} \frac{J^2}{ER^2} \left(70x^2 - 35(y^2 + z^2) - 33R^2\right).$$

Ein Radius der Kugel, der die Richtung der magnetisirenden Kraft hat, erleidet die Verlängerung

$$\frac{153}{176\pi} \frac{J^2}{E} R,$$

ein Radius, der senkrecht zu dieser Kraft ist, die Verkürzung

$$\frac{27}{176\pi} \frac{J^2}{E} R.$$

Ein magnetisches Feld, wie es hier vorausgesetzt ist, kann mit Hülfe eines elektrischen Stromes hervorgebracht werden, der eine Spirale durchfliesst, welche die Eisenkugel umgiebt und so lang ist, dass die magnetische Kraft des Stromes in dem Raume, den die

Digitized by Google

Kugel einnimmt, als constant betrachtet werden kann. Ist n die Zahl der Windungen, die auf ein Centimeter in der Richtung der Länge der Spirale kommen, und i die Intensität des Stromes in Ampères ausgedrückt, so ist dann

$$J = \frac{4\pi}{10} ni \frac{\mathrm{gr}^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{cm}^{\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{sec}};$$

setzt man für den Elasticitäts-Coefficienten des Eisens

$$E = 1.88 \cdot 10^{12} \frac{\mathrm{gr}}{\mathrm{cm} \cdot \mathrm{sec}^2},$$

so ergiebt sich die Verlängerung eines Radius der Kugel, der der Axe der Spirale parallel ist

$$= n^2 i^2 \cdot 2.32 \cdot 10^{-13} \cdot R.$$

Schon im Jahre 1847 hat Joule[1] die Verlängerungen gemessen, die Eisenstäbe erfahren, wenn sie in einer Spirale magnetisirt werden, Verlängerungen, welche im Maximum 1.4 Milliontel der Länge betrugen. Ähnliche Messungen bei einer Kugel auszuführen würde wegen der Kleinheit der Formänderungen kaum möglich sein.

[1] Phil. Mag. Vol. XXX. p. 76. 225.

Digitized by Google

50. Über eine Form, in welche sich das allgemeine Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung bringen lässt, wenn dasselbe algebraisch ist.

Von L. Fuchs.

(Vorgetragen am 11. December; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. LI]; — ausgegeben am 18. December.)

1.

Es sei

$$(A) \qquad f\left(\frac{dy}{dz}, y, z, A, B, \ldots\right) = 0$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung von der Art, dass f eine ganze rationale Function von $\frac{dy}{dz}, y, z$ und einer endlichen Anzahl gegebener Functionen $A, B, \ldots$ von z, deren Ableitungen ebenfalls rationale Functionen von $z, A, B, \ldots$ sind und welche überdiess nicht mit z und unter einander durch eine algebraische Gleichung verbunden sind. Der Grad von f sei der m^{te} in Bezug auf $\frac{dy}{dz}$, und es werde vorausgesetzt, dass f in dem Sinne irreductibel ist, dass dasselbe nicht in Factoren von gleicher Beschaffenheit wie f und von niedrigerem Grade in Bezug auf $\frac{dy}{dz}$ zerlegbar sei.

Es möge das allgemeine Integral der Gleichung (A) einer Gleichung

$$(1) \qquad F(y, z) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \ldots a_n = 0$$

genügen, deren Coefficienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ganze rationale Functionen von $z, A, B, \ldots$ sind.

Es sei

$$(2) \qquad a_i = \Sigma P^{(i)}_{\varkappa\lambda\mu\ldots} z^\varkappa A^\lambda B^\mu \ldots,$$

wo die Grössen P Constanten bedeuten. Man bestimmt diese Constanten dadurch, dass man zwischen den Gleichungen (1), (A) und

$$(3) \qquad \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dz} = 0$$

Digitized by Google

$\frac{dy}{dz}$ und y eliminirt. Da die resultirende Gleichung in Bezug auf $z, A, B, \ldots$ identisch erfüllt sein muss, so ergiebt sich aus derselben eine gewisse Anzahl algebraischer Gleichungen zwischen den Coefficienten P, welche alle diese Grössen durch eine derselben, die wir mit c bezeichnen wollen, bestimmen. Eliminirt man mit Hülfe dieser Gleichungen aus Gleichung (1) die sämmtlichen Grössen P bis auf die eine c, so erhält man eine Gleichung

$$\phi(c, y, z) = 0 \tag{4}$$

von der Beschaffenheit, dass ϕ eine ganze rationale Function von $c, y, z, A, B, \ldots$ wird. Dieses liefert also den Satz:

Wenn das allgemeine Integral y der Gleichung (A) eine algebraische Function von $z, A, B, \ldots$ sein soll, so genügt y einer algebraischen Gleichung, deren Coefficienten ganze rationale Functionen von $z, A, B, \ldots$ und einer willkürlichen Constanten c sind.

Wir setzen voraus, dass die Gleichung (4) von allen fremden Factoren befreit sei, d. h. dass sie die Eigenschaft habe, dass nach Substitution eines beliebigen constanten Werthes für c sämmtliche Wurzeln y derselben Integrale der Gleichung (A) werden. Dieses vorausgesetzt, sei $G(c, y, z)$ ein irreductibler Factor von ϕ, d. h. eine ganze rationale Function von $c, y, z, A, B, \ldots$, welcher nicht in gleichgeartete Factoren niedrigeren Grades in Bezug auf c zerlegbar ist. Wir wollen im Folgenden die Gleichung

$$G(c, y, z) = 0 \tag{B}$$

einer näheren Untersuchung unterziehen.

2.

Wir betrachten die Function c der beiden unabhängigen Variabeln y, z, welche durch die Gleichung (B) definirt wird. Diese hat die Eigenschaft für Werthenpaare y, z, welche einem und demselben Integrale der Gleichung (A) angehören, einen constanten Werth anzunehmen.

Die Function Δ der beiden unabhängigen Variabeln y, z, welche durch die Gleichung

$$\frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial y}\Delta = 0 \tag{C}$$

definirt wird, ist eine rationale Function von $c, y, z, A, B, \ldots$, während dieselbe als Function von $y, z, A, B, \ldots$ einer algebraischen Gleichung

$$h(\Delta, y, z) = 0 \tag{1}$$

Digitized by Google

genügt, welche sich als Resultat der Elimination von c zwischen den Gleichungen (B) und (C) ergiebt.

Setzen wir in Gleichung (1) $\frac{dy}{dz}$ statt Δ, und bezeichnen mit η irgend ein Integral der Gleichung

$$h\left(\frac{dy}{dz}, y, z\right) = 0, \tag{2}$$

so liefern $y = \eta$, $\Delta = \frac{d\eta}{dz}$ gemeinsame Lösungen c der beiden Gleichungen (B) und (C). Es sei eine derselben $c = \gamma$, so ist also gleichzeitig

$$G(\gamma, \eta, z) = 0. \tag{3}$$

und

$$\frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial \eta}\frac{d\eta}{dz} = 0. \tag{4}$$

Durch Differentiation der Gleichung (3) nach z folgt aber

$$\frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial \eta}\frac{d\eta}{dz} + \frac{\partial G}{\partial \gamma}\cdot\frac{d\gamma}{dz} = 0. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) ergiebt sich demnach

$$\frac{\partial G}{\partial \gamma}\cdot\frac{d\gamma}{dz} = 0. \tag{6}$$

Man kann die Anfangswerthe y_0, z_0 des Integrals η so wählen, dass die Discriminante der durch die Gleichung (B) definirten Function c von y, z nicht durch $y = y_0, z = z_0$ befriedigt wird. Dann ist aber $\frac{\partial G}{\partial \gamma}$ nicht Null, folglich

$$\frac{d\gamma}{dz} = 0 \tag{7}$$

d. h. γ eine Constante, was soviel besagt als:

Jedes Integral der Gleichung (2) stellt ein Integral der Gleichung (A) dar.

Man kann aber y_0, z_0 willkürlich wählen, also muss für willkürliche Werthenpaare y, z die Wurzel $\frac{dy}{dz}$ der Gleichung (2) der Gleichung (A) genügen. Nun aber ist unserer Voraussetzung nach für von einander unabhängige Werthe der Variabeln $y, z, f\left(\frac{dy}{dz}, y, z\right)$ nicht in gleichgeartete Factoren niedrigeren Grades in Bezug auf $\frac{dy}{dz}$ zerlegbar. Hieraus folgt:

Digitized by Google

Die Function $h(\Delta, y, z)$ ist bis auf einen von Δ unabhängigen Factor identisch eine Potenz der Function $f(\Delta, y, z)$.

3.

Es seien c_1, c_2 zwei verschiedene Zweige der durch die Gleichung (B) definirten Function c der unabhängigen Variabeln y, z, für welche die durch die Gleichung (C) definirte Function Δ von $c, y, z, A, B, \ldots$ ein und denselben Werth annimmt.

Aus den Gleichungen

$$G(c_1, y, z) \equiv G(c_1) = 0 \tag{1}$$

$$G(c_2, y, z) \equiv G(c_2) = 0 \tag{2}$$

folgt

$$\frac{\partial G(c_1)}{\partial c_1} dc_1 + \frac{\partial G(c_1)}{\partial y} dy + \frac{\partial G(c_1)}{\partial z} dz = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial G(c_2)}{\partial c_2} dc_2 + \frac{\partial G(c_2)}{\partial y} dy + \frac{\partial G(c_2)}{\partial z} dz = 0. \tag{4}$$

Da der Voraussetzung nach $\frac{\partial G(c_1)}{\partial z} : \frac{\partial G(c_1)}{\partial y} = \frac{\partial G(c_2)}{\partial z} : \frac{\partial G(c_2)}{\partial y}$, so folgt aus (3) und (4)

$$\frac{\partial G(c_1)}{\partial c_1} \frac{\partial G(c_2)}{\partial y} dc_1 - \frac{\partial G(c_2)}{\partial c_2} \cdot \frac{\partial G(c_1)}{\partial y} dc_2 = 0. \tag{5}$$

Ist demnach c_1 constant, so ist auch c_2 constant, und umgekehrt, oder mit anderen Worten:

I. Zwischen je zwei Zweigen c_1, c_2, für welche Δ den nämlichen Werth erhält, findet eine von y, z unabhängige Relation statt.

Eliminirt man y zwischen den Gleichungen (1) und (2), so enthält die Resultante einen von z unabhängigen Factor $H(c_1, c_2)$ von der Beschaffenheit, dass die in Bezug auf c_1, c_2 symmetrische algebraische Gleichung

$$H(c_1, c_2) = 0 \tag{D}$$

durch alle Zweigenpaare c_1, c_2 der Function c befriedigt wird, für welche Δ jedesmal einen und denselben Werth annimmt.

Ist $c_1 = \gamma$ ein willkürlicher Werth, $c_2 = \gamma'$ eine beliebige Wurzel der Gleichung

$$H(\gamma, c_2) = 0,$$

so haben die Gleichungen

$$G(\gamma, y, z) = 0 \quad \text{und} \quad G(\gamma', y, z) = 0$$

Digitized by Google

gemeinschaftliche Lösungen y für einen beliebigen Werth von z, ebenso gemeinschaftliche Lösungen z für einen beliebigen Werth von y.

II. Ist demnach c_1 irgend ein Zweig der Function c, so ist jede Wurzel c_2 der Gleichung (D) ebenfalls ein Zweig der Function c, und zwar ein solcher, welcher Δ denselben Werth verschafft wie c_1.

Ist $c_1 = \zeta$ irgend ein Zweig der Function c, und $\zeta^1, \zeta^{(2)}, \ldots \zeta^{(l)}$ die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung

$$H(\zeta, c_2) = 0 \tag{6}$$

mit der Unbekannten c_2, so sind hiernach diese Wurzeln die einzigen Zweige der Function c, welche Δ denselben Werth verleihen wie ζ. Hieraus folgt, dass die l Wurzeln der Gleichung

$$H(\zeta^{(i)}, c_2) = 0 \tag{7}$$

mit der Unbekannten c_2 durch die Reihe $\zeta, \zeta^1, \zeta^{(2)}, \ldots \zeta^{(i-1)}, \zeta^{(i+1)}, \ldots \zeta^{(l)}$ dargestellt werden; da die Wurzeln der Gleichung (7) alle diejenigen Zweige der Function c liefern, welche Δ denselben Werth ertheilen wie $\zeta^{(i)}$, also auch wie ζ.

Es ist demnach

$$\Gamma = (\alpha - \zeta)\ (\alpha - \zeta^1)\ \alpha - \zeta^{(2)}) \ldots (\alpha - \zeta^{(l)}), \tag{8}$$

wo α eine beliebige aber bestimmte Grösse bedeutet, eine rationale Function von ζ mit constanten Coefficienten, welche ungeändert bleibt für alle Zweige ζ der Function c, für welche Δ denselben Werth erhält, dagegen aber für zwei Zweige, für welche Δ verschiedene Werthe annimmt, auch verschiedene Werthe hat. Nach einem bekannten Satze der Algebra sind daher Γ und Δ rationale Functionen von einander mit Coefficienten, welche rational von $y, z, A, B, \ldots$ abhangen. Insbesondere sei

$$\Gamma = \mathfrak{R}(\Delta, y, z, A, B, \ldots) \tag{E}$$

wo $\mathfrak{R}$ eine rationale Function der Argumente darstellt.

Nach Nr. 2 ist Δ eine algebraische Function der Variabeln y, z, welche der irreductiblen Gleichung

$$f(\Delta, y, z, A, B, \ldots) = 0 \tag{F}$$

genügt.

Ist y gleich einer Function η von z von der Beschaffenheit, dass $y = \eta$ in (F) und (E) substituirt Γ einen von z unabhängigen Werth verleiht, so ist für $y = \eta$ auch ein Zweig ζ der Function c von z unabhängig, also ist $y = \eta$ ein Integral der Gleichung (A). Ist umgekehrt $y = \eta$ ein Integral der Gleichung (A), so geht für $y = \eta$ ein Zweig ζ der Function c in einen von z unabhängigen Werth über,

Digitized by Google

also wird für $y = \eta$ auch ein zugehöriger Werth von Γ constant. Wir erhalten also den Satz:

III. Wenn das allgemeine Integral der Gleichung (A) eine algebraische Function von $z, A, B, \ldots$ ist, so lässt sich dasselbe stets in die Form der Gleichung (E) bringen, worin Γ eine willkürliche Constante, $\mathfrak{R}$ eine bestimmte rationale Function von $y, z, A, B, \ldots$ und einer Grösse Δ bedeutet, welche durch die Gleichung (F) definirt wird.

4.

Die Gleichungen (E) und (F) liefern ein einfaches Mittel, zu gleicher Zeit zu prüfen, ob das allgemeine Integral der Gleichung (A) algebraisch ist, und dasselbe darzustellen, wenn es vorhanden ist.

Da nämlich die Gleichung (A) in Bezug auf $\frac{dy}{dz}$ vom m^{ten} Grade ist, so ist auch der Grad von Δ in Gleichung (F) der m^{te}. Es ist also nach Gleichung (E)

$$(1) \qquad \Gamma = \psi_0 + \psi_1 \cdot \Delta + \psi_2 \cdot \Delta^2 + \ldots + \psi_{m-1} \cdot \Delta^{m-1},$$

wo $\psi_0, \psi_1, \ldots \psi_{m-1}$ rationale Functionen von $y, z, A, B, \ldots$ bedeuten. Nimmt man in dieser Gleichung für Γ einen constanten Werth, so ergiebt sich aus derselben Gleichung nach Satz III voriger Nummer y als Integral der Gleichung (A). Es ist dann

$$(2) \qquad \frac{dy}{dz} = \Delta.$$

Aus Gl. (F) ergiebt sich ferner

$$(3) \qquad \frac{d\Delta}{dz} = \chi_0 + \chi_1 \cdot \Delta + \chi_2 \cdot \Delta^2 + \ldots + \chi_{m-1} \cdot \Delta^{m-1},$$

wo $\chi_0, \chi_1, \ldots$ rationale Functionen von $y, z, A, B, \ldots$ bedeuten.

Differenzirt man daher die Gleichung (1) unter der Voraussetzung, dass Γ constant, so ergiebt sich nach Substitution von (2) und (3) eine Gleichung der Form

$$(4) \qquad P_0 + P_1 \cdot \Delta + P_2 \cdot \Delta^2 + \ldots + P_{m-1} \cdot \Delta^{m-1} = 0$$

worin $P_0, P_1, \ldots$ rationale Functionen von $y, z, A, B, \ldots$ sind.

Wegen der Irreductibilität der Gleichung (F) ist dann identisch für jedes Werthsystem $y, z, A, B, \ldots$

$$(G) \qquad P_0 = 0, P_1 = 0, \ldots P_{m-1} = 0.$$

Digitized by Google

Indem man also nach Aufstellung dieser Gleichungen in jeder derselben die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von y gleich Null setzt, erhält man eine Anzahl von Differentialgleichungen für die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von y in den zu bestimmenden Functionen $\psi_0, \psi_1, \ldots \psi_{m-1}$, und für die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von y in den in der Gleichung

$$(5) \qquad f\left(\frac{dy}{dz}, y, z\right) = q_0\left(\frac{dy}{dz}\right)^m + q_1\left(\frac{dy}{dz}\right)^{m-1} + \ldots + q_m = 0$$

auftretenden Grössen $q_0, q_1 \ldots q_m$. Diese Differentialgleichungen müssen durch rationale Functionen von $z, A, B, \ldots$ befriedigt werden können, wenn das allgemeine Integral der Gleichung (A) algebraisch sein soll.

Digitized by Google

Digitized by Google

51. Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen.

Von L. KRONECKER.

(Vorgetragen am 11. December; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. LI]; — ausgegeben am 18. December.)

Die Methode, welche ich bei Behandlung der Frage der Periodensysteme in meiner vorigen Mittheilung[1] entwickelt habe, lässt sich auch auf das interessante Problem der näherungsweisen ganzzahligen Auflösung linearer Gleichungen anwenden und führt dabei zu der wahren Quelle, aus welcher die Lösung jener Frage unmittelbar zu entnehmen ist. Ich werde dies hier zuvörderst in den schon von JACOBI vor einem halben Jahrhundert behandelten einfachsten Fällen[2] und erst dann ganz allgemein darlegen. Denn es erscheint nicht nur um der Deutlichkeit willen angemessen, die eingehende Behandlung jener speciellen Fälle voranzuschicken, sondern auch deshalb, weil bei der nachherigen allgemeinen Entwickelung von dem Inductionsschluss Gebrauch gemacht und dabei die Erledigung jener speciellen Fälle vorausgesetzt wird.

§. 1.

Es seien a, a', ξ gegebene reelle Grössen, und w, w' seien ganze Zahlen, welche so bestimmt werden sollen, dass $aw + a'w'$ dem Werthe ξ möglichst nahe kommt. Ist das Verhältniss $a : a'$ rational, also durch das Verhältniss zweier ganzen Zahlen $n : n'$ ausdrückbar, so stellt $aw + a'w'$ nur ganze Vielfache von $\frac{a}{n}$ oder, was dasselbe ist, von $\frac{a'}{n'}$ dar, diese

[1] Sitzungsbericht vom 20. November, XLVI. S. 1071 ff.

[2] De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur. Journal für Mathem. Bd. XIII S. 55. Die Abhandlung ist vom 14. Februar 1834 datirt. JACOBI schliesst im §. 4 seine Entwickelungen über die mögliche Anzahl der Perioden von Functionen einer complexen Variabeln mit den Worten: »Unde omnibus casibus evictum est, *si functio proposita tribus periodis gaudeat, aut eas e duabus componi, aut eam habere indicem omni data quantitate minorem.* Quod cum absurdum sit, *functio tripliciter periodica non datur.*« JACOBI bleibt hierbei stehen, und unterlässt es, die behauptete Absurdität durch die aus der Voraussetzung dreifacher Periodicität zu ziehenden erschöpfenden Folgerungen näher zu begründen.

Digitized by Google

aber auch sämmtlich; denn da n und n' ohne gemeinsamen Theiler vorauszusetzen sind, so lassen sich für jede ganze Zahl w_0 Zahlen w, w' so bestimmen, dass $nw + n'w' = w_0$ und also:

$$(\mathfrak{A}) \qquad aw + a'w' = \frac{a}{n} \cdot w_0$$

wird. Man kann also in diesem Falle einer gegebenen Grösse ξ mit linearen ganzzahligen Functionen von a, a' nicht näher kommen, als dies eben mit ganzen Vielfachen von $\frac{a}{n}$ möglich ist; der Abstand kann demnach die Hälfte dieser Grösse erreichen.

Ist nun aber das Verhältniss $a : a'$ irrational, und wird es durch das Verhältniss ganzer Zahlen $n : n'$ in folgender Weise angenähert dargestellt:

$$\frac{a'}{a} = \frac{n'}{n} + \frac{\delta}{n^2} \qquad (-1 < \delta < 1),$$

so kann $w = -kn'$, $w' = kn$ gesetzt und für k die der Grösse $\frac{n\xi}{a\delta}$ zunächst benachbarte ganze Zahl genommen werden, um den Werth von $aw + a'w'$ dem Werthe von ξ beliebig nahe zu bringen. Denn es ist dann:

$$k = \frac{n}{a\delta}(\xi - \phi),$$

wo ϕ den Werth:

$$\frac{a\delta}{n} \mathrm{R}\left(\frac{n\xi}{a\delta}\right)$$

bedeutet,[1] und es wird:

$$(\mathfrak{A}') \qquad aw + a'w' = \xi - \phi.$$

Die Annäherung an ξ ist demnach mindestens $\frac{a\delta}{2n}$ und kann also mit wachsendem n beliebig verstärkt werden. Dabei wächst die Grösse der Zahlen w, w' mit n, aber — bei der angegebenen Bestimmung derselben — überdies auch mit dem Werthe von $\frac{1}{\delta}$. Doch kann man auch in einfacher Weise Zahlen w_0, w_0' bestimmen, für welche:

$$|aw_0 + a'w_0' - \xi| < \left|\frac{a}{2n}\right| \text{ und zugleich } |w_0'| \leq \tfrac{1}{2}|n|$$

[1] Mit R(a) ist hier wie in meinen früheren Mittheilungen der Rest bezeichnet, welcher verbleibt, wenn man von der reellen Grösse a die ihr zunächst benachbarte ganze Zahl subtrahirt.

Digitized by Google

ist. Bringt man nämlich die der Grösse $\frac{n\xi}{a}$ nächst benachbarte ganze Zahl auf die Form $nw_0 + n'w_0'$, und zwar so, dass $|w_0'| \leq \frac{1}{2}|n|$ wird, so resultirt die Gleichung:

$$aw_0 + a'w_0' - \xi = \frac{a}{n}\left(\frac{\delta}{n}w_0' - \mathrm{R}\left(\frac{n\xi}{a}\right)\right),$$

welche zeigt, dass in der That $|aw_0 + a'w_0' - \xi| < \left|\frac{a}{2n}\right|$ ist. — Setzt man ferner:

$$w = w_0 - kn', \quad w' = w_0' + kn$$

und nimmt hierin für k die der Grösse $\frac{1}{\delta}\mathrm{R}\left(\frac{n\xi}{a}\right) - \frac{w_0'}{n}$ nächst benachbarte ganze Zahl, so wird:

$$aw + a'w' - \xi = \frac{a\delta\delta'}{2n} = \frac{a\delta'\delta''}{2w'},$$

wo

$$\tfrac{1}{2}\delta' = k - \frac{1}{\delta}\mathrm{R}\left(\frac{n\xi}{a}\right) + \frac{w_0'}{n}, \quad \delta'' = \tfrac{1}{2}\delta\delta' + \mathrm{R}\left(\frac{n\xi}{a}\right)$$

ist, so dass auch δ', δ'', ebenso wie δ, zwischen -1 und $+1$ liegen.

Ich bemerke noch, dass alle Zahlensysteme w, w', wofür der Werth von $aw + a'w'$ sich um weniger als $\frac{a}{2n}$ von ξ unterscheidet, durch Verbindung irgend eines derselben mit einem solchen, wofür $|aw + a'w'| < \left|\frac{a}{n}\right|$ ist, erlangt werden können, und dass gewisse näherungsweise Lösungen der Gleichung $aw + a'w' = \xi$ schon von Hrn. TCHEBYCHEF und nachher von Hrn. HERMITE gegeben worden sind [1]

Ist $F(x)$ eine eindeutige, gleichmässig stetige Function der reellen Variabeln x, für welche die Gleichung:

$$(\mathfrak{A}) \qquad F(x) = F(x + a) = F(x + a')$$

und also auch die Gleichung:

$$F(x) = F(x + aw + a'w')$$

besteht, in welcher w, w' irgend welche ganze Zahlen bedeuten, so besagt diese letztere Gleichung im Falle $a : a' = n : n'$ gemäss der Relation $(\mathfrak{A})$ nichts Anderes als die Gleichung:

$$F(x) = F\left(x + \frac{a}{n}w_0\right) \qquad (w_0 = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots),$$

[1] Journal für Mathematik Bd. 88 S. 10.

Digitized by Google

während sie für den Fall, dass das Verhältniss $a : a'$ irrational ist, gemäss ($\mathfrak{A}'$) die Gleichung:

$$F(x) = F(x' - \phi)$$

ergiebt, wenn $x' = x + \xi$ gesetzt wird. Da die Grösse ϕ beliebig verkleinert werden kann, und die Function $F(x)$ als stetig vorausgesetzt ist, so folgt, dass für jeden beliebigen Werth x':

$$F(x) = F(x'),$$

d. h. also, dass $F(x)$ eine von x unabhängige Constante sein muss.

Aus der Gleichung ($\mathfrak{A}$) ist also zu erschliessen, dass die Function $F(x)$ die Periode $\frac{a}{n}$ hat, wenn das Verhältniss $a : a'$ sich durch das Verhältniss ganzer Zahlen $n : n'$ darstellen lässt, dass sie aber, wenn dies nicht der Fall ist, sich auf eine Constante reduciren muss.

§. 2.

Nunmehr seien $a, a', a'', b, b', b'', \xi, \eta$ gegebene reelle Grössen, und es seien drei ganze Zahlen w, w', w'' so zu bestimmen, dass die beiden linearen Ausdrücke:

$$aw + a'w' + a''w'', \quad bw + b'w' + b''w''$$

beziehungsweise den Werthen ξ und η beliebig nahe kommen, d. h. also, dass die Ungleichheiten:

$$|aw + a'w' + a''w'' - \xi| < \tau, \quad |bw + b'w' + b''w'' - \eta| < \tau$$

für eine gegebene, beliebig kleine Grösse τ erfüllt sind, oder, was dasselbe ist, die Gleichungen:

($\mathfrak{B}$) $\quad aw + a'w' + a''w'' = \xi - \phi, \quad bw + b'w' + b''w'' = \eta - \psi,$

nebst den Ungleichheitsbedingungen $|\phi| < \tau$, $|\psi| < \tau$.

Für die Frage der Auflösung des Systems der Gleichungen ($\mathfrak{B}$) sind offenbar zwei Coefficienten-Systeme:

$$\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_0, a_0', a_0'' \\ b_0, b_0', b_0'' \end{pmatrix}$$

einander aequivalent, wenn jedes aus dem andern durch lineare Transformation der Zeilen mit beliebigen Coefficienten und durch lineare Transformation der Colonnen mit ganzzahligen Coefficienten hervorgeht.

Digitized by Google

I. Ist nun erstens $ab' - a'b = ab'' - a''b = a'b'' - a''b' = 0$ oder also $a : a' : a'' = b : b' : b''$, so findet die Aequivalenz:

$$\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a, a', a'' \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} b, b', b'' \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$$

statt, und das System der beiden Gleichungen (𝔅) ist für beliebige Werthe von ξ und η nicht lösbar. Der »Rang« des Coefficientensystems[1] ist in diesem Falle kleiner als *Zwei*.

II. Wenn aber zweitens der Rang des Coefficientensystems der Gleichungen (𝔅) nicht kleiner als *Zwei* ist, so wähle ich zuvörderst drei ganze Zahlen m, m', m'', für welche die absoluten Werthe der beiden Ausdrücke:

$$am + a'm' + a''m'' , \quad bm + b'm' + b''m''$$

kleiner als τ werden. Dies ist stets möglich. Denn wenn man jedes der beiden Intervalle:

$$\big(|a| + |a'| + |a''|\big)t^2 , \quad \big(|b| + |b'| + |b''|\big)t^2 ,$$

welches die je $(t^2 + 1)^3$ Werthe von

$$aw + a'w' + a''w'' \text{ und } bw + b'w' + b''w'' \quad (w, w', w'' = 0, 1, 2, \ldots t^2)$$

umfasst, in t^3 gleiche Theile theilt, so giebt es mindestens zwei Systeme von Zahlen:

$$(w_1, w_1', w_1'') , \quad (w_2, w_2', w_2'') ,$$

für welche $aw_1 + a'w_1' + a''w_1''$ und $aw_2 + a'w_2' + a''w_2''$ in einem und demselben der t^3 Theilintervalle der Grössen $aw + a'w' + a''w''$ und ebenso $bw_1 + b'w_1' + b''w_1''$ und $bw_2 + b'w_2' + b''w_2''$ in einem und demselben der t^3 Theilintervalle der Grössen $bw + b'w' + b''w''$ liegen. Setzt man nun:

$$w_1 - w_2 = m , \quad w_1' - w_2' = m' , \quad w_1'' - w_2'' = m'' ,$$

so ist:

$$|am + a'm' + a''m''| < \frac{|a| + |a'| + |a''|}{t} , \quad |bm + b'm' + b''m''| < \frac{|b| + |b'| + |b''|}{t} ,$$

und man kann also in der That durch angemessene Wahl der Zahl t bewirken, dass die beiden absoluten Werthe:

$$|am + a'm' + a''m''| , \quad |bm + b'm' + b''m''|$$

kleiner als die gegebene Grösse τ werden, dass also, wenn man:

$$am + a'm' + a''m'' = a''' , \quad bm + b'm' + b''m'' = b'''$$

setzt,

$$\tau > |a'''| \geq |b'''|$$

---

[1] Vergl. die Definition in §. 5.

Digitized by Google

wird. Hierbei können aber beide Grössen a''' und b''' gleich Null werden. In diesem Falle ist:

$$-a''m'' = am + a'm', \quad -b''m'' = bm + b'm',$$

und das aus drei Colonnen von ganzen Zahlen bestehende System:

$$\begin{pmatrix} m'', & 0, & m \\ 0, & m'', & m' \end{pmatrix}$$

lässt sich nach dem im Art. VIII meiner vorigen Mittheilung angegebenen Verfahren auf ein System von nur zwei Colonnen:

$$\begin{pmatrix} r, & r' \\ s, & s' \end{pmatrix},$$

und zwar mittels ganzzahliger linearer Transformation der Colonnen allein, reduciren. Man kann nämlich zuvörderst die Coefficienten m, m' in der dritten Colonne jenes Systems durch ihre absolut kleinsten Reste *modulo* m'' ersetzen. Resultirt dann das System:

$$\begin{pmatrix} m'', & 0, & m_0 \\ 0, & m'', & m_0' \end{pmatrix},$$

so ist hieraus, wenn $|m_0| \leqq |m_0'|$ ist, ein neues System:

$$\begin{pmatrix} m'' + hm_0, & 0, & m_0 \\ hm_0', & m'', & m_0' \end{pmatrix}$$

zu bilden, in welchem $|m'' + hm_0| < |m_0|$ ist. Die kleinste der drei Determinanten des vorigen Systems ist $|m''m_0|$, die des neuen Systems ist $|m''(m'' + hm_0)|$ und also kleiner als die kleinste des vorigen. Man muss daher bei Fortsetzung des angegebenen Verfahrens zu einem System:

$$\begin{pmatrix} r, & r', & r'' \\ s, & s', & s'' \end{pmatrix}$$

gelangen, dessen kleinste Determinante $|rs' - r's|$ nicht mehr verkleinert werden kann. Alsdann müssen aber die Coefficienten α, β, für welche

$$\alpha r + \beta r' = r'', \quad \alpha s + \beta s' = s''$$

wird, ganze Zahlen sein; denn sonst würden bei Weglassung der grössten Ganzen von α und β Coefficienten r''', s''' an die Stelle von r'', s'' treten, für welche wenigstens eine der Determinanten $rs''' - r'''s$ oder $r's''' - r'''s'$ ihrem absoluten Werthe nach kleiner als $|rs' - r's|$ wäre.

Das reducirte System $\begin{pmatrix} r, & r' \\ s, & s' \end{pmatrix}$ ist dem System $\begin{pmatrix} m'', & 0, & m \\ 0, & m'', & m' \end{pmatrix}$ aequi-

Digitized by Google

valent, sogar in dem engeren Sinne, dass das eine System aus dem andern durch lineare ganzzahlige Transformation der Colonnen allein hervorgeht. Es ist daher einerseits:

$$r = hm'' - h''m \ , \quad r' = km'' - k''m \ ,$$
$$s = h'm'' - h''m' \ , \quad s' = k'm'' - k''m' \ ,$$

und andrerseits:

$$m'' = \alpha_0 r + \alpha_0' r' \ , \quad 0 = \beta_0 r + \beta_0' r' \ , \quad -m = \gamma_0 r + \gamma_0' r' \ ,$$
$$0 = \alpha_0 s + \alpha_0' s' \ , \quad m'' = \beta_0 s + \beta_0' s' \ , \quad -m' = \gamma_0 s + \gamma_0' s' \ ,$$

wo $h, h', h'', k, k', k'', \alpha_0, \alpha_0', \beta_0, \beta_0', \gamma_0, \gamma_0'$ ganze Zahlen bedeuten, und wenn man:

$$\frac{ra + sa'}{m''} = a_0 \ , \quad \frac{r'a + s'a'}{m''} = a_0' \ ,$$
$$\frac{rb + sb'}{m''} = b_0 \ , \quad \frac{r'b + s'b'}{m''} = b_0'$$

setzt, erhält man für die Systeme

$$\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix} \ , \quad \begin{pmatrix} a_0, a_0' \\ b_0, b_0' \end{pmatrix}$$

die Transformations-Gleichungen:

$$a_0 = ah + a'h' + a''h'' \ , \quad a_0' = ak + a'k' + a''k'' \ ,$$
$$b_0 = bh + b'h' + b''h'' \ , \quad b_0' = bk + b'k' + b''k'' \ ;$$
$$a = a_0\alpha_0 + a_0'\alpha_0' \ , \quad a' = a_0\beta_0 + a_0'\beta_0' \ , \quad a'' = a_0\gamma_0 + a_0'\gamma_0' \ ,$$
$$b = b_0\alpha_0 + b_0'\alpha_0' \ , \quad b' = b_0\beta_0 + b_0'\beta_0' \ , \quad b'' = b_0\gamma_0 + b_0'\gamma_0' \ .$$

Das System der zwei Gleichungen mit drei zu bestimmenden ganzen Zahlen w, w', w'':

$$aw + a'w' + a''w'' = \xi - \phi \ , \quad bw + b'w' + b''w'' = \eta - \psi \ ,$$

ist also dem Gleichungssystem von zwei Gleichungen mit nur zwei zu bestimmenden ganzen Zahlen w_0, w_0':

$$a_0w_0 + a_0'w_0' = \xi - \phi \ , \quad b_0w_0 + b_0'w_0' = \eta - \psi \ ,$$

aequivalent, und dieses gestattet offenbar für beliebige Werthe ξ, η keine beliebige Verkleinerung der Grössen ϕ und ψ, auch dann nicht, wenn die Determinante $a_0b_0' - a_0'b_0$ verschwindet.

In dem hiermit erledigten zweiten Falle, wo:

$$am + a'm' + a''m'' = 0 \ , \quad bm + b'm' + b''m'' = 0$$

ist, kann das Verhältniss der drei Determinanten:

$$a'b'' - a''b' \ , \quad a''b - ab'' \ , \quad ab' - a'b$$

Digitized by Google

durch das Verhältniss von drei ganzen Zahlen $m : m' : m''$ dargestellt werden. Es wird also, wenn $m = k(a'b'' - a''b')$ gesetzt wird,

$$b'k(aw + a'w' + a''w'') - a'k(bw + b'w' + b''w'') = m''w - mw'',$$
$$-bk(aw + a'w' + a''w'') + ak(bw + b'w' + b''w'') = m''w' - m'w'',$$

und das Coefficientensystem:

$$\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix}$$

ist demnach einem System ganzzahliger Coefficienten:

$$\begin{pmatrix} m'', 0, -m \\ 0, m'', -m' \end{pmatrix}$$

aequivalent. Da umgekehrt, wenn eine Aequivalenz:

$$\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_0, a_0', a_0'' \\ b_0, b_0', b_0'' \end{pmatrix}$$

besteht, in welcher $a_0, a_0', a_0'', b_0, b_0', b_0''$ ganze Zahlen sind, so dass die Gleichungen:

$$a_0m_0 + a_0'm_0' + a_0''m_0'' = 0\ ,\ b_0m_0 + b_0'm_0' + b_0''m_0'' = 0$$

in ganzen Zahlen m_0, m_0', m_0'' lösbar sind, wegen eben jener Aequivalenz auch die Gleichungen:

$$am + a'm' + a''m'' = 0\ ,\ bm + b'm' + b''m'' = 0$$

befriedigt werden können, so ist die Aequivalenz des Systems $\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix}$ mit einem solchen, dessen Elemente sämmtlich ganze Zahlen sind, als eine charakteristische für diejenigen Coefficientensysteme nachgewiesen, für welche die Möglichkeit des Nullwerdens von a''' und b''', welche die Voraussetzung des hier behandelten Falles bildet, vorhanden ist. Diese Coefficientensysteme sollen übrigens, gemäss einer späteren allgemeinen Darlegung als solche bezeichnet werden, deren *Rationalitäts-Rang* gleich Null ist.

III. Es sei nun drittens wenigstens einer der beiden Werthe a''', b''', von Null verschieden, also, da oben $|a'''| \geqq |b'''|$ angenommen worden ist: $\tau > |a'''| > 0$.

Alsdann sind drei ganze Zahlen n, n', n'' so zu bestimmen, dass der Werth von:

$$\left(b - \frac{b'''}{a'''}a\right)n + \left(b' - \frac{b'''}{a'''}a'\right)n' + \left(b'' - \frac{b'''}{a'''}a''\right)n'',$$

der mit $b^{(4)}$ bezeichnet werden soll, absolut kleiner als τ wird. Setzt man noch:

$$an + a'n' + a''n'' = a^{(4)},$$

Digitized by Google

so ist:

$$bn + b'n' + b''n'' = b^{(4)} + \frac{b'''}{a'''} a^{(4)}.$$

Wird nun $b^{(4)} = 0$, so ist:

$$b'''(an + a'n' + a''n'') = a'''(bn + b'n' + b''n''),$$

oder also, wenn man an Stelle von a''', b''' ihre Werthe:

$$am + a'm' + a''m'', \; bm + b'm' + b''m''$$

einsetzt:

$$(ab' - a'b)(mn' - m'n) + (a'b'' - a''b')(m'n'' - m''n') + (a''b - ab'')(m''n - mn'') = 0.$$

Es verschwindet also die Determinante:

$$\begin{vmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \\ m'n'' - m''n', & m''n - mn'', & mn' - m'n \end{vmatrix},$$

und das Coefficienten-System ist daher dem Systeme:

$$\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ m'n'' - m''n', & m''n - mn'', & mn' - m'n \end{pmatrix}$$

aequivalent, dessen zweite Zeile aus lauter ganzen Zahlen besteht. Hieraus erhellt, dass auch in diesem dritten Falle die Gleichungen:

$$aw + a'w' + a''w'' = \xi - \phi, \; bw + b'w' + b''w'' = \eta - \psi$$

für beliebig gegebene Werthe von ξ, η nicht in der Weise lösbar sind, dass ϕ und ψ beliebig klein werden.

Der »*Rationalitäts-Rang*« des Systems $\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix}$ ist in diesem dritten Falle gleich *Eins*.

IV. Es bleibt nun viertens der Fall zu untersuchen, wo $b^{(4)} \gtrless 0$ ist. In diesem Falle werde zuvörderst eine ganze Zahl ν so bestimmt, dass der absolute Werth von:

$$\eta - \frac{b'''}{a'''} \xi - \nu b^{(4)}$$

kleiner als $\frac{1}{2} |b^{(4)}|$ wird, und demnächst eine ganze Zahl μ so, dass der absolute Werth von:

$$\xi - \nu a^{(4)} - \mu a'''$$

kleiner als $\frac{1}{2} |a'''|$ wird. Dann kommt, wenn:

$$\xi - \nu a^{(4)} - \mu a''' = \phi, \; \eta - \frac{b'''}{a'''} \xi - \nu b^{(4)} = \psi - \frac{b'''}{a'''} \phi$$

Digitized by Google

gesetzt wird:

$$\mu(am + a'm' + a''m'') + \nu(an + a'n' + a''n'') = \xi - \phi,$$
$$\mu(bm + b'm' + b''m'') + \nu(bn + b'n' + b''n'') = \eta - \psi.$$

Hier sind die absoluten Werthe von ϕ und ψ beide kleiner als τ, da

$$|\phi| < \tfrac{1}{2}|a''|,\ |a'''| < \tau;\ \left|\frac{b'''}{a'''}\right| < 1,\ \left|\psi - \frac{b'''}{a'''}\phi\right| < \tfrac{1}{2}|b^{(4)}|,\ |b^{(4)}| < \tau$$

ist, und die Gleichungen:

$$aw + a'w' + a''w'' = \xi - \phi,\ bw + b'w' + b''w'' = \eta - \psi,$$

werden also in der That durch die ganzzahligen Werthe:

$$w = \mu m + \nu n,\ w' = \mu m' + \nu n',\ w'' = \mu m'' + \nu n''$$

in der durch das Problem geforderten Weise befriedigt.

In diesem vierten Falle ist der »*Rationalitäts-Rang*« des Systems $\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix}$ gleich *Zwei.*

Bei der angegebenen Bestimmungsweise werden, analog wie im Falle einer Gleichung im §. 1, die Zahlen w um so grösser, je kleiner a''' und $b^{(4)}$ sind. Die Frage der Auffindung der kleinsten dem Problem genügenden Zahlen w ist hier vorläufig bei Seite gelassen.

§. 3.

Ist $F(x, y)$ eine eindeutige, gleichmässig stetige Function der reellen Variablen x, y und bestehen die Gleichungen:

$$(\mathfrak{S})\quad F(x,y) = F(x+a, y+b) = F(x+a', y+b') = F(x+a'', y+b''),$$

so ist auch die Gleichung:

$$(\bar{\mathfrak{S}})\quad F(x,y) = F(x + aw + a'w' + a''w'',\ y + bw + b'w' + b''w'')$$

für alle ganzzahligen Werthe von w, w', w'' erfüllt. Hierbei kann offenbar angenommen werden, dass nicht alle sechs Grössen a, a', a'' b, b', b'' gleich Null sind.

I. Wenn nun der (absolute) Rang des Systems $\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix}$ kleiner als *Zwei* und also

$$a : a' : a'' = b : b' : b''$$

ist, so kann angenommen werden, dass nicht alle drei Grössen a, a', a'' gleich Null sind. Wird dann

Digitized by Google

$$\lambda a = b\ ,\ \lambda a' = b'\ ,\ \lambda a'' = b''\ ,\ y_1 = y - \lambda x$$

und

$$F(x, y_1 + \lambda x) = F_1(x, y_1)$$

gesetzt, so geht die Gleichung $(\overline{\mathfrak{C}})$ in folgende über:

$$F_1(x, y_1) = F_1(x + aw + a'w' + a''w'', y_1),$$

welche zeigt, dass die Function F_1 nur in Beziehung auf die Variable x periodisch ist. Gemäss §. 1 ist aber dann $F_1(x, y_1)$, als Function von x allein betrachtet, einfach periodisch oder von x unabhängig, je nachdem das Verhältniss $a : a' : a''$ rational ist oder nicht, d. h. also je nachdem der »*Rationalitäts-Rang*« des Systems $\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix}$ gleich Null oder gleich Eins ist. Es ergiebt sich daher folgendes Resultat:

Ist der (absolute) Rang des Systems $\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix}$ gleich *Eins*, so lässt sich die Function $F(x, y)$ durch lineare Transformation der Variabeln in eine Function einer Variabeln verwandeln, für welche aus der Gleichung $(\mathfrak{C})$ keine Periodicität folgt, wenn der Rationalitäts-Rang des Systems ebenfalls gleich *Eins* ist. Wenn aber dieser Rationalitäts-Rang gleich *Null* ist, so kann $F(x, y)$ durch lineare Transformation der Variabeln in eine Function von zwei Variabeln verwandelt werden, welcher auf Grund der Gleichung $(\mathfrak{C})$ nur in Beziehung auf eine der beiden Variabeln eine Periode zukommt.

II. Wenn der (absolute) Rang des Systems $\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix}$ gleich *Zwei* und der Rationalitäts-Rang gleich *Null* ist, so folgt aus den Entwickelungen im §. 2, II, dass die Gleichung $(\overline{\mathfrak{C}})$ nichts anderes ausdrückt, als die Gleichung:

$$F(x, y) = F(x + a_0 w_0 + a_0' w_0',\ y + b_0 w_0 + b_0' w_0'),$$

welche zeigt, dass der Function $F(x, y)$ die beiden Periodensysteme (a_0, b_0), (a_0', b_0') zukommen.

III. Wenn der (absolute) Rang des Systems $\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix}$ gleich *Zwei* und der Rationalitäts-Rang gleich *Eins* ist, so ist dieses System gemäss den Entwickelungen im §. 2, III dem Systeme:

$$\begin{pmatrix} a & , & a' & , & a'' \\ m'n'' - m''n', & & m''n - mn'', & & mn' - m'n \end{pmatrix}$$

aequivalent; die Function $F(x, y)$ geht also durch lineare Transfor-

Digitized by Google

mation der Variabeln y in eine Function $F_1(x, y_1)$ über, welche die drei Periodensysteme:

$$(a, m'n'' - m''n') \ , \ (a', m''n - mn'') \ , \ (a'', mn' - m'n)$$

hat. Bestimmt man nun eine ganze Zahl λ so, dass der absolute Werth von $\xi - \lambda a'''$ kleiner als τ wird, und setzt man $\xi - \lambda a''' = \phi$, so kommt, da:

$am + a'm' + a''m'' = a''', (m'n'' - m''n')m + (m''n - mn'')m' + (mn' - m'n)m'' = 0$

ist:

$$F_1(x, y_1) = F_1(x + \xi - \phi, y_1),$$

oder, wenn $x + \xi$ mit x' bezeichnet und die Stetigkeit der Function $F_1(x, y_1)$ berücksichtigt wird:

$$F_1(x, y_1) = F_1(x', y_1),$$

für beliebige Werthe von x und x'. Die Function F_1 ist daher von dem ersteren ihrer beiden Argumente unabhängig, während sie in Bezug auf das andere einfach periodisch ist.

IV. Wenn der Rationalitäts-Rang des Systems $\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix}$ gleich *Zwei* ist, so zeigen die Entwickelungen im §. 2, IV, dass aus der Gleichung $(\bar{\mathfrak{C}})$ die Gleichung:

$$F(x, y) = F(x + \xi - \phi, y + \eta - \psi)$$

für beliebige Werthe von ξ, η folgt. Da ϕ und ψ beliebig klein gemacht werden können, so muss wegen der Stetigkeit der Function $F(x, y)$ auch die Gleichung:

$$F(x, y) = F(x + \xi, y + \eta) = F(x', y')$$

für ganz beliebige Werthe der Variabeln x, y, x', y' bestehen; die Function $F(x, y)$ muss also von beiden Argumenten unabhängig sein.

V. Die erlangten Resultate lassen sich, wenn man den (absoluten) Rang des Systems $\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix}$ mit r und den Rationalitäts-Rang mit $\mathfrak{r}$ bezeichnet, für alle vier unterschiedenen Fälle in folgender Weise zusammenfassen:

> Die Function $F(x, y)$ kann durch lineare Transformation der Variabeln in eine andere verwandelt werden, für welche die Periodicitäts-Gleichung $(\bar{\mathfrak{C}})$ in Bezug auf $2 - r$ Variabeln gar keine Perioden, in Bezug auf $r - \mathfrak{r}$ Variabeln genau $r - \mathfrak{r}$ Periodensysteme ergiebt, und welche von den übrigen $\mathfrak{r}$ Variabeln unabhängig ist.

Digitized by Google

§. 4.

Ist $F(x+yi)$ eine eindeutige stetige Function der complexen Variabeln $x+yi$, und werden für dieselbe Periodicitäts-Gleichungen:

$$F(x+yi) = F(x+yi+a+bi) = F(x+yi+a'+b'i) = F(x+yi+a''+b''i)$$

vorausgesetzt, so ist in den oben (§. 3, I) behandelten Fällen:

$$F(x+yi) = F\big(x+yi+(aw+a'w'+a''w'')(1+\lambda i)\big)$$

für beliebige ganze Zahlen w, w', w''. Ist der Rationalitäts-Rang gleich *Null* und also das Verhältniss $a:a':a''$ rational, so ergiebt sich aus den vorausgesetzten Gleichungen nur eine einfache Periodicität der Function $F(x+yi)$. Ist aber der Rationalitäts-Rang gleich *Eins*, so lassen sich ganze Zahlen w, w', w'' bestimmen, für welche $aw+a'w'+a''w''$ einer gegebenen reellen Grösse ξ beliebig nahe kommt. Es ist daher, in Folge der Voraussetzung der Stetigkeit von F, für jede reelle Grösse ξ:

$$F(x+yi) = F\big(x+yi+\xi(1+\lambda i)\big),$$

und also, wenn diese Gleichung nach ξ differentiirt und dann $\xi = 0$ gesetzt wird:

$$F'(x+yi) = 0.$$

Die Function $F(x+yi)$ muss sich daher auf eine Constante reduciren.

Für den im §. 3, II behandelten Fall lassen sich die drei Perioden $a+bi, a'+b'i, a''+b''i$ auf zwei reduciren.

Für den im §. 3, III behandelten Fall giebt es reelle Grössen α, β, so dass:

$$a\beta+b\alpha = m'n''-m''n', \quad a'\beta+b'\alpha = m''n-mn'', \quad a''\beta+b''\alpha = mn'-m'n,$$

und also:

$$(a+bi)(\alpha+\beta i) = \gamma+ci, (a'+b'i)(\alpha+\beta i) = \gamma'+c'i, (a''+b''i)(\alpha+\beta i) = \gamma''+c''i$$

wird, wenn man der Kürze halber die drei Determinanten:

$$m'n''-m''n', \quad m''n-mn'', \quad mn'-m'n$$

mit c, c', c'' bezeichnet. Setzt man nun $x_1+y_1i = (\alpha+\beta i)(x+yi)$ und:

$$F(x+yi) = F_1(x_1+y_1i),$$

so ist:

$$F_1(x_1+y_1i) = F_1\big(x_1+y_1i+(\gamma+ci)w+(\gamma'+c'i)w'+(\gamma''+c''i)w''\big),$$

und wenn man hierin:

$$w = \lambda m, \quad w' = \lambda m', \quad w'' = \lambda m''$$

nimmt, wo m, m', m'' die im §. 2, III definirten Zahlen bedeuten, so verschwindet der imaginäre Theil: $cw+c'w'+c''w''$, während

Digitized by Google

$\gamma m + \gamma' m' + \gamma'' m''$ beliebig klein wird, und es kann demnach die Zahl λ so bestimmt werden, dass der reelle Theil $\gamma w + \gamma' w' + \gamma'' w''$ einem gegebenen Werthe ξ beliebig nahe kommt. Hieraus folgt, dass für beliebige Werthe ξ die Gleichung:

$$F_1(x_1 + y_1 i) = F_1(x_1 + y_1 i + \xi)$$

besteht, dass also die Ableitung von $F_1(x_1 + y_1 i)$ verschwinden und die Function $F_1(x_1 + y_1 i)$ selbst sich auf eine Constante reduciren muss.

Für den im §. 3, IV behandelten Fall ergiebt sich direct, ohne die Ableitung der Function F zu Hülfe zu nehmen, dass $F(x + yi)$ für alle Werthe der complexen Variabeln constant sein muss.

§. 5.

Es sei (a_{ik}) für $i = 1, 2, \ldots p$ und $k = 1, 2, \ldots q$ ein System reeller Grössen, und r sei die grösste Zahl von der Beschaffenheit, dass nicht sämmtliche aus den Elementen a_{ik} zu bildenden Determinanten $r$ter Ordnung verschwinden. Alsdann ist r die »Stufenzahl« oder der »Rang« des aus den q linearen Functionen von p Variabeln $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots \mathfrak{R}_p$ gebildeten Divisorensystems:

$$(\mathfrak{D}) \qquad \left(\sum_i a_{i1}\mathfrak{R}_i, \sum_i a_{i2}\mathfrak{R}_i, \ldots \sum_i a_{iq}\mathfrak{R}_i\right), \qquad (i = 1, 2, \ldots p)$$

und soll auch, wie im Art. X meiner vorigen Mittheilung, als der Rang des Grössensystems (a_{ik}) selbst bezeichnet werden. Nach den allgemeinen Entwickelungen im §. 21 meiner Festschrift zu Hrn. Kummers Doctorjubiläum ist das Divisorensystem $(\mathfrak{D})$ dann und nur dann in einem anderen aus linearen Functionen von $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots \mathfrak{R}_p$ bestehenden Divisorensysteme:

$$(\mathfrak{D}') \qquad \left(\sum_i b_{i1}\mathfrak{R}_i, \sum_i b_{i2}\mathfrak{R}_i, \ldots \sum_i b_{iq}\mathfrak{R}_i\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots p)$$

»enthalten«, wenn sich jedes Element des Divisorensystems $(\mathfrak{D}')$ als ganzzahlige lineare homogene Function der Elemente des Divisorensystems $(\mathfrak{D})$ darstellen lässt, d. h. also, wenn:

$$(\mathfrak{E}) \qquad b_{ik'} = \sum_k a_{ik} g_{kk'} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots p \\ k = 1, 2, \ldots q \\ k' = 1, 2, \ldots q' \end{pmatrix}$$

ist, und die qq' Coefficienten $g_{kk'}$ ganze Zahlen sind. Es kann nun auch dieser Begriff des Enthalten-Seins von den aus linearen Functionen bestehenden Divisorensystemen auf die Systeme der Coefficienten der linearen Functionen selbst übertragen und also

> ein System (a_{ik}) als unter dem Systeme $(b_{ik'})$ enthalten bezeichnet werden, wenn Substitutions-Gleichungen $(\mathfrak{E})$ mit ganzzahligen Coefficienten $g_{kk'}$ bestehen, oder also wenn das System $(b_{ik'})$ aus der Composition des Systems (a_{ik}) mit einem ganzzahligen Systeme $(g_{kk'})$ resultirt.

Digitized by Google

Wenn zwei Systeme einander gegenseitig enthalten, so sind sie als »aequivalent« zu bezeichnen.

Die hier aufgestellten Begriffe haben für das Problem der näherungsweisen ganzzahligen Auflösung linearer Gleichungen eine unmittelbare Bedeutung. Denn erstens

> ist überhaupt ein System linearer, nicht homogener Gleichungen dann und nur dann, wenn der Rang des Coefficientensystems mit der Anzahl der Gleichungen genau übereinstimmt, in dem allgemeinen Sinne lösbar, dass die gegebenen linearen homogenen Functionen der zu bestimmenden Grössen beliebig gegebenen Grössen gleich werden sollen;

es können also nur die Werthe von r linear unabhängigen Functionen:

$$(\mathfrak{F}) \qquad \sum_k a_{1k} w_k, \ \sum_k a_{2k} w_k, \ \ldots\ldots \qquad (k = 1, 2, \ldots q)$$

durch passende Bestimmung von $w_1, w_2, \ldots w_q$ gegebenen Variabeln $\xi_1, \xi_2, \ldots$ gleich gemacht werden. Es können daher auch nicht mehr als r Gleichungen:

$$(\mathfrak{G}) \qquad \sum_k a_{1k} w_k = \xi_1 - \phi_1, \ \sum_k a_{2k} w_k = \xi_2 - \phi_2, \ \ldots \qquad (k = 1, 2, \ldots q)$$

für beliebig gegebene Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ mit den Ungleichheitsbedingungen:

$$|\phi_1| < \tau, |\phi_2| < \tau, \ldots$$

in ganzen Zahlen $w_1, w_2, \ldots w_q$ gelöst werden.

Zweitens kann an Stelle des Gleichungssystems ($\mathfrak{G}$) auch das Gleichungssystem:

$$(\mathfrak{G}^\circ) \qquad \sum_{k'} a^\circ_{1k'} w^\circ_{k'} = \xi_1 - \phi_1, \ \sum_{k'} a^\circ_{2k'} w^\circ_{k'} = \xi_2 - \phi_2, \ \ldots \qquad (k' = 1, 2, \ldots q')$$

gesetzt werden, falls die Systeme (a_{ik}) und $(a^\circ_{ik'})$ in dem angegebenen Sinne einander aequivalent sind; denn wenn:

$$a^\circ_{ik'} = \sum_k a_{ik} g_{kk'}, \ a_{ik} = \sum_{k'} a^\circ_{ik'} g^\circ_{k'k} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots p \\ k = 1, 2, \ldots q \\ k' = 1, 2, \ldots q' \end{pmatrix}$$

ist, so werden durch die linearen ganzzahligen Transformationen der zu bestimmenden Grössen $w_k, w^\circ_{k'}$:

$$w_k = \sum_{k'} g_{kk'} w^\circ_{k'}, \ w^\circ_{k'} = \sum_k g^\circ_{k'k} w_k \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots q \\ k' = 1, 2, \ldots q' \end{pmatrix}$$

die beiden Gleichungssysteme ($\mathfrak{G}$), ($\mathfrak{G}^\circ$) in einander transformirt.

Digitized by Google

§. 6.[1]

Es seien nun die ersten r^2 Elemente a_{ik} so beschaffen, dass ihre Determinante:

$$|a_{gh}| \qquad (g, h = 1, 2, \ldots r)$$

von Null verschieden wird. Alsdann sind die ersten r linearen Gleichungen:

$$(\mathfrak{G}) \qquad \sum_k a_{gk} w_k = \xi_g - \phi_g \qquad \begin{pmatrix} g = 1, 2, \ldots r \\ k = 1, 2, \ldots q \end{pmatrix}$$

von einander unabhängig und — wenn von der Bedingung, dass $w_1, w_2, \ldots w_g$ ganze Zahlen sein sollen, abstrahirt wird — für beliebig gegebene Werthe von $\xi_g - \phi_g$ lösbar.

Bedeutet, wie im Art. 1 meiner vorigen Mittheilung, (a'_{gh}) das zu (a_{gh}) reciproke System, so kann an Stelle des Gleichungssystems $(\mathfrak{G})$ das System:

$$(\mathfrak{G}') \qquad \sum_{gk} a'_{hg} a_{gk} w_k = \sum_g a'_{hg} (\xi_g - \phi_g) \qquad \begin{pmatrix} g, h = 1, 2, \ldots r \\ k = 1, 2, \ldots q \end{pmatrix}$$

genommen werden, und dieses verwandelt sich, wenn:

$$(\mathfrak{H}) \qquad b_{hk} = \sum_k a'_{hg} a_{gk}, \quad \eta_h = \sum_g a'_{hg} \xi_g, \quad \psi_h = \sum_g a'_{hg} \phi_g \qquad \begin{pmatrix} g, h = 1, 2, \ldots r \\ k = 1, 2, \ldots q \end{pmatrix}$$

gesetzt wird, in folgendes:

$$(\mathfrak{K}) \qquad \sum_h b_{hk} w_k = \eta_h - \psi_h \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots r \\ k = 1, 2, \ldots q \end{pmatrix},$$

in welchem übrigens $b_{hk} = \delta_{hk}$ ist, wenn beide Indices nicht grösser als r sind.

Die in den Gleichungen $(\mathfrak{H})$ gegebenen Bestimmungen der Coefficienten b_{hk} lassen sich auch so darstellen:

$$(\mathfrak{H}') \qquad b_{hk} = \frac{|a_{fg'}|}{|a_{fg}|} \qquad \begin{pmatrix} f, g = 1, 2, \ldots r \\ g' = 1, 2, \ldots h-1, k, h+1, \ldots r \end{pmatrix};$$

die Coefficienten b_{hk} sind demnach Quotienten von Determinanten $r$ter Ordnung, welche sich aus r durch die Indices h, k bestimmten Colonnen der ersten r Zeilen des Systems (a_{ik}) bilden lassen.

---

[1] S. Nachtragsheft St. LIV. S. 1271.

Digitized by Google

Führt man in dem Divisorensystem ($\mathfrak{D}$) des §. 5 an Stelle der p Variabeln $\mathfrak{R}$ neue r Variabeln $\mathfrak{R}^\circ$ ein, welche mit den ersteren durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{R}_h^\circ = \sum_i a_{ih}\,\mathfrak{R}_i \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots r \\ i = 1, 2, \ldots q \end{pmatrix}$$

verbunden sind, so resultirt das Divisorensystem $r$ter Stufe:

$$(\mathfrak{D}) \qquad \left(\mathfrak{R}_1^\circ, \mathfrak{R}_2^\circ, \ldots \mathfrak{R}_r^\circ, \sum_h b_{h,r+1}\,\mathfrak{R}_h^\circ, \ldots \sum_h b_{hq}\,\mathfrak{R}_h^\circ\right) \quad (h = 1, 2, \ldots r),$$

welches aus linearen Functionen von nur r Variabeln besteht.

Die beiden Divisorensysteme ($\mathfrak{D}$) und ($\mathfrak{D}^\circ$) stehen, ebenso wie überhaupt je zwei Divisorensysteme, welche durch lineare Transformation der Variabeln aus einander hervorgehen, in einer Aequivalenz-Beziehung, und es sollen auch deren Coefficienten-Systeme, z. B. die Coefficienten-Systeme:

$$(a_{ik}) \text{ und } (b_{hk}) \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots r \\ i = 1, 2, \ldots p \\ k = 1, 2, \ldots q \end{pmatrix},$$

als einander aequivalent bezeichnet werden.

Während die im vorigen Paragraphen entwickelte Aequivalenz-Beziehung zweier Systeme:

$$(a_{ik}) \;,\; (a^\circ_{ik'}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots p \\ k = 1, 2, \ldots q \\ k' = 1, 2, \ldots q' \end{pmatrix}$$

dadurch charakterisirt wurde, dass das eine System aus dem andern durch lineare ganzzahlige Transformation der Colonnen hervorgeht, wird die hier statuirte Aequivalenz:

$$(a_{ik}) \sim (\bar{a}_{i'k}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots p \\ i' = 1, 2, \ldots p' \\ k = 1, 2, \ldots q \end{pmatrix}$$

dadurch definirt, dass das eine System durch lineare Transformation der Zeilen, mit irgend welchen Transformations-Coefficienten, in das andere System übergeführt werden kann.

Es sind dies also zwei verschiedene Aequivalenz-Begriffe, von denen sich der eine auf die Colonnen, der andere auf die Zeilen bezieht; sie können aber auch beide zu einem neuen »weiteren« Aequivalenz-Begriff vereinigt werden, indem zwei Systeme:

$$(a^\circ_{ik'}) \;,\; (\bar{a}_{i'k}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots p\,;\; i' = 1, 2, \ldots p' \\ k = 1, 2, \ldots q\,;\; k' = 1, 2, \ldots q' \end{pmatrix}$$

als im »weiteren Sinne einander aequivalent« bezeichnet werden können, wenn jedes derselben einem dritten Systeme:

$$(a_{ik}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots p \\ k = 1, 2, \ldots q \end{pmatrix}$$

Digitized by Google

in dem einen oder anderen engeren Sinne aequivalent ist, d. h. also sowohl dann, wenn die Aequivalenzen:

$$(a_{ik}) \infty (a^0_{ik'}) \ , \ (a_{ik}) \infty (\bar{a}_{i'k})$$

beide in demselben engeren Sinne bestehen, als auch dann, wenn die eine in dem einen, die andere in dem anderen engeren Sinne stattfindet.

§. 7.

Giebt es lineare ganzzahlige Functionen der r Grössen:

$$b_{1k}, b_{2k}, \ldots\ldots b_{rk} \qquad (k = r+1, r+2, \ldots . q),$$

deren Werthe für alle Indices k ganzzahlig sind, d. h. also, giebt es (für $k = r+1, r+2, \ldots . q$) eine Anzahl Gleichungen:

$$\sum_{h=1}^{h=r} \mathfrak{w}_{gh} b_{hk} = \mathfrak{b}_{gk} \qquad (g = g_1, g_2, \ldots .),$$

in welchen $\mathfrak{w}_{gh}$, $\mathfrak{b}_{gk}$ ganze Zahlen bedeuten, so gelten diese Gleichungen, wenn für $k \leqq r$:

$$\mathfrak{b}_{gk} = \mathfrak{w}_{gk}$$

gesetzt wird, für alle Indices k. Es möge nun angenommen werden, dass die Anzahl solcher, von einander linear unabhängiger Gleichungen genau $r - \tau$ ist, und dass demnach $r - \tau$ lineare Relationen:

$$(\mathfrak{L}) \qquad \sum_{h=1}^{h=r} \mathfrak{b}_{ih} b_{hk} = \mathfrak{b}_{ik} \qquad \begin{pmatrix} i = \tau+1, \tau+2, \ldots r \\ k = 1, 2, \ldots . q \end{pmatrix}$$

bestehen, aus denen sich alle anderen solchen Relationen linear zusammensetzen lassen. Dann kann die Reihenfolge der Zeilen $b_{1k}, b_{2k}, \ldots .$ so vorausgesetzt werden, dass die Zeilen:

$$b_{1k}, b_{2k}, \ldots . b_{\tau k}, \mathfrak{b}_{\tau+1,k}, \mathfrak{b}_{\tau+2,k}, \ldots . \mathfrak{b}_{rk} \qquad (k = 1, 2, \ldots q)$$

von einander linear unabhängig sind, und dass daher das aus diesen r Zeilen bestehende System dem Systeme (b_{hk}) in dem zweiten engeren Sinne (der Zeilen-Transformation) aequivalent ist. Da das System (b_{hk}) in demselben engeren Sinne dem System (a_{ik}) aequivalent ist, so wird durch die obige Annahme eine Eigenschaft des Systems (a_{ik}) fixirt, welche folgendermaassen zu formuliren ist:

> »Das System (a_{ik}), vom Range r, kann durch lineare Transformation der Zeilen (mit irgend welchen Coefficienten) in ein solches verwandelt werden, welches nur r Zeilen hat, die

Digitized by Google

nicht lauter Null-Elemente enthalten, und nur τ Zeilen, in denen nicht sämmtliche Elemente ganze Zahlen sind. Dabei sind die Zahlen r und τ die kleinsten, für welche dies möglich ist.«

Die Zahl τ hat daher in Beziehung auf den Rationalitäts-Bereich der gewöhnlichen rationalen Zahlen eine ganz analoge Bedeutung wie die (absolute) Stufenzahl r; sie giebt einen »relativen Rang« des Systems (a_{ik}) an, nämlich einen solchen, welcher dem Systeme in Beziehung auf den Rationalitäts-Bereich Eins zukommt[1]; die Zahl τ soll deshalb kurzweg als

»der Rationalitäts-Rang des Systems (a_{ik})«

bezeichnet werden.

Jedes System von pq Elementen:

$$(a_{ik}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots p \\ k = 1, 2, \ldots q \end{pmatrix},$$

dessen (absoluter) Rang gleich r, und dessen Rationalitäts-Rang gleich τ ist, hat hiernach die charakteristische Eigenschaft, dass es in dem zweiten engeren Sinne (der Zeilen-Transformation) einem Systeme aequivalent ist, welches genau τ nicht ganzzahlige und überhaupt nur r Zeilen enthält.

Ein solches dem Systeme (a_{ik}) aequivalentes System ist das obige System:

$$b_{1k}, b_{2k}, \ldots b_{\tau k}, \mathfrak{b}_{\tau+1,k}, \mathfrak{b}_{\tau+2,k}, \ldots \mathfrak{b}_{rk} \qquad (k = 1, 2, \ldots q),$$

dessen Elemente gemäss den Gleichungen ($\mathfrak{H}'$) und ($\mathfrak{L}$) nur Determinanten-Quotienten:

$$\frac{|a_{fg'}|}{|a_{fg}|} \qquad \begin{pmatrix} f, g = 1, 2, \ldots r \\ g' = 1, 2, \ldots h-1, k, h+1, \ldots r \end{pmatrix}$$

und lineare ganzzahlige Functionen derselben sind. Die charakteristische Eigenschaft eines Systems (a_{ik}) vom (absoluten) Range r und vom Rationalitäts-Range τ kann hiernach auch dadurch ausgedrückt werden, dass zwischen den Determinanten $r$ter Ordnung genau $r - \tau$ lineare ganzzahlige Relationen:

$$(\mathfrak{L}') \qquad \sum_{h=1}^{h=r} \mathfrak{b}_{ih} |a_{fg'}| = \mathfrak{b}_{ik} |a_{fg}| \qquad \begin{pmatrix} f, g = 1, 2, \ldots r \\ g' = 1, 2, \ldots h-1, k, h+1, \ldots r \\ i = \tau+1, \tau+2, \ldots r \end{pmatrix}$$

bestehen. Jede dieser Relationen kann, wenn $\mathfrak{b}_{im} = a_{om}$ gesetzt wird, einfach durch die Gleichung:

$$|a_{lm}| = 0 \qquad \begin{pmatrix} l = 0, 1, 2, \ldots r \\ m = k, 1, 2, \ldots r \end{pmatrix}$$

dargestellt werden, und diese Gleichung besagt nichts Anderes, als

[1] Vergl. §. 3 meiner oben citirten Festschrift zu Hrn. KUMMER's Doctorjubiläum.

Digitized by Google

dass das System (a_{ik}) in ein (im Sinne der Zeilentransformation) aequivalentes übergeht, wenn eine der Zeilen:

$$\mathfrak{b}_{i_1}, \mathfrak{b}_{i_2}, \ldots \mathfrak{b}_{i_q} \qquad (i = \varrho+1, \varrho+2, \ldots r)$$

hinzugefügt wird. Es können daher auch alle $r-\varrho$ Zeilen $\mathfrak{b}_{ik}$ hinzugefügt werden. Da diese von einander linear unabhängig sind, so müssen ϱ Zeilen a_{ik} — wenn auch nicht jede — mit den $r-\varrho$ Zeilen $\mathfrak{b}_{ik}$ ein linear unabhängiges System von r Zeilen bilden. Es ergiebt sich also,

dass für jedes System von pq Elementen:

$$(a_{ik}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots p \\ k = 1, 2, \ldots q \end{pmatrix},$$

dessen (absoluter Rang) gleich r und dessen Rationalitäts-Rang gleich ϱ ist, ein aequivalentes existirt, welches aus dem ersten dadurch entsteht, dass $p-r$ Zeilen weggelassen und $r-\varrho$ Zeilen durch ebenso viel andere mit lauter ganzzahligen Elementen ersetzt werden.

Die vorstehende Entwickelung zeigt, dass (falls $r > \varrho+1$ ist) nicht bloss zwischen den Determinanten $r$ter Ordnung[1], sondern auch zwischen den Determinanten $(\varrho+1)$ter Ordnung des Systems (a_{ik}) lineare ganzzahlige Relationen bestehen. Fügt man nämlich dem Systeme (a_{ik}) die $r-\varrho$ Zeilen $\mathfrak{b}_{ik}$ hinzu, so entsteht ein aequivalentes System von $p+r-\varrho$ Zeilen, für welches alle Determinanten der Ordnung $r+1$ verschwinden; und jede der Gleichungen, welche man erhält, wenn man eine derjenigen Determinanten $(r+1)$ter Ordnung gleich Null setzt, die aus $(r-\varrho)(r+1)$ ganzzahligen Elementen $\mathfrak{b}_{ik}$ und aus $(\varrho+1)(r+1)$ Elementen a_{ik} gebildet sind, liefert offenbar eine lineare ganzzahlige Relation zwischen Subdeterminanten $(\varrho+1)$ter Ordnung von Elementen a_{ik}.

Es ist noch zu erwähnen, dass (unter Beibehaltung der obigen Bezeichnungen) der Natur der Sache nach stets $\varrho \leqq r \leqq q$ ist, und dass ϱ, für den Fall $r = q$, den Werth *Null* hat, weil alsdann das aus den ersten r^2 Elementen bestehende System (a_{ik}), also auch das ganze System, im Sinne der Zeilen-Transformation dem »Einheitsysteme«

$$(\delta_{ik}) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots r),$$

folglich in der That einem aus lauter ganzzahligen Elementen bestehenden Systeme aequivalent ist. Der Rationalitäts-Rang eines Systems (a_{ik}) ist also höchstens gleich dem (absoluten) Range, und er ist stets gleich *Null*, wenn die Anzahl der Colonnen nicht grösser ist, als die Zahl, welche den (absoluten) Rang des Systems bezeichnet.

[1] Vgl. die obigen Gleichungen (Ω′).

Digitized by Google

§. 8.

Ein System:

$$(a_{ik}) \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\dots p \\ k=1,2,\dots q \end{pmatrix}$$

vom (absoluten) Range r und vom Rationalitäts-Range *Null* ist einem Systeme:

$$(b_{hk}) \qquad \begin{pmatrix} h=1,2,\dots r \\ k=1,2,\dots q \end{pmatrix}$$

von lauter ganzzahligen Elementen aequivalent, und zwar im Sinne der Zeilen-Transformation. Da in diesem Falle $\mathfrak{r}=0$ ist, nimmt der Index i in den Gleichungen ($\mathfrak{L}'$) des vorigen Paragraphen die Werthe $1, 2, \dots r$ an, und diese Gleichungen:

$$\sum_h b_{ih} |a_{fg'}| = b_{is} |a_{fg}| \qquad \begin{pmatrix} f,g,h,i=1,2,\dots r \\ g'=1,2,\dots h-1,s,h+1,\dots r \end{pmatrix}$$

genügen dann, um das Verhältniss der $r+1$ Determinanten, welche aus den r Zeilen von je $r+1$ Elementen:

$$a_{f1}, a_{f2}, \dots . a_{fr}, a_{fs} \qquad (f=1,2,\dots r)$$

zu bilden sind, durch die Coefficienten $\mathfrak{b}$, also in ganzen Zahlen, darzustellen. Dies gilt für jeden Werth: $s=r+1, r+2, \dots q$; also:

für den Fall $\mathfrak{r}=0$ ist das Verhältniss je zweier Determinanten:

$$|a_{fg'}| : |a_{fg}| \qquad \begin{pmatrix} f,g,h=1,2,\dots r \\ g'=1,2,\dots h-1,s,h+1,\dots r \\ s=r+1,r+2,\dots q \end{pmatrix}$$

rational, und dies ist zugleich für diesen Fall charakteristisch;

denn jenes Verhältniss ist gemäss §. 6 ($\mathfrak{H}'$) gleich b_{hs}, und das dem Systeme (a_{ik}) aequivalente System (b_{hk}), dessen Elemente für $k \leqq r$ das Einheitsystem bilden, besteht daher für den Fall $\mathfrak{r}=0$ aus lauter rationalen Elementen.

Da die Auflösung des Systems der r Gleichungen:

$$(\mathfrak{M}) \qquad \sum_k a_{ik} w_k = 0 \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\dots r \\ k=1,2,\dots r,s \end{pmatrix}$$

durch:

$$w_h : w_s = |a_{fg'}| : |a_{fg}| \qquad \begin{pmatrix} f,g,h=1,2,\dots r \\ g'=1,2,\dots h-1,s,h+1,\dots r \end{pmatrix}$$

gegeben ist, so erweist sich auch

die Lösbarkeit der Gleichungen ($\mathfrak{M}$) in ganzen Zahlen w, für alle Werthe $s=r+1, r+2, \dots q$,

als eine charakteristische Eigenschaft derjenigen Systeme (a_{ik}), deren Rationalitäts-Rang gleich *Null* ist.

Digitized by Google

§. 9.

Ist (a_{ik}) irgend ein System von pq Elementen, dessen (absoluter) Rang gleich r, und dessen Rationalitäts-Rang gleich τ (von *Null* verschieden) ist, so kann man sich die Zeilen so geordnet denken, dass die ersten r Reihen von Elementen:

$$a_{i1}, a_{i2}, \ldots a_{iq} \qquad (i = 1, 2, \ldots r)$$

überhaupt von einander linear unabhängig und zugleich die ersten τ Reihen von Elementen:

$$a_{i1}, a_{i2}, \ldots a_{iq} \qquad (i = 1, 2, \ldots \tau)$$

in Beziehung auf den Rationalitäts-Bereich *Eins* von einander linear unabhängig sind. Dann giebt offenbar die Rangzahl r des ganzen Systems (a_{ik}) zugleich den (absoluten) Rang des aus den ersten r Zeilen bestehenden Systems an, und die Zahl τ, welche den Rationalitäts-Rang des ganzen Systems (a_{ik}) bezeichnet, hat eben dieselbe Bedeutung auch für das aus den ersten τ Zeilen gebildete System.

Unter den angegebenen Voraussetzungen kann dasjenige System von Gleichungen:

$$(\mathfrak{N}) \qquad \sum_k a_{ik} w_k = \xi_i - \phi_i \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots \tau \\ k = 1, 2, \ldots q \end{pmatrix},$$

welches nur die ersten τ von den r Gleichungen $(\mathfrak{S})$ des §. 5 enthält, für beliebig gegebene Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ mit den Ungleichheitsbedingungen:

$$|\phi_i| < \tau \qquad (i = 1, 2, \ldots \tau)$$

in ganzen Zahlen $w_1, w_2, \ldots w_q$ gelöst werden.

I. Um eine solche Lösung zu erhalten, wähle man (wie im §. 2, II) zuvörderst Zahlen m_{ks}, für welche die absoluten Werthe der r Ausdrücke:

$$\sum_k a_{ik} m_{ks} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots r \\ k = 1, 2, \ldots r, s \end{pmatrix}$$

kleiner als τ werden. Dies ist stets möglich. Denn wenn man jedes der r Intervalle:

$$t^r \sum_k |a_{ik}| \quad \left(\begin{matrix} i = 1, 2, \ldots r; k = 1, 2 \ldots r, s; \\ |a_{ik}| \text{ bedeutet den absoluten Werth von } a_{ik} \end{matrix} \right),$$

welches die je $(t^r + 1)^{r+1}$ Werthe von:

$$\sum_k a_{1k} w_k, \ \sum_k a_{2k} w_k, \ \ldots \sum_k a_{rk} w_k \qquad \begin{pmatrix} w_k = 0, 1, 2, \ldots t \\ k = 1, 2, \ldots r, s \end{pmatrix}$$

umfasst, in t^{r+1} gleiche Theile theilt, so giebt es mindestens zwei Systeme von Zahlen:

$$(w_1', w_2', \ldots w_r', w_s'), \ (w_1'', w_2'', \ldots w_r'', w_s''),$$

Digitized by Google

die so beschaffen sind, dass die beiden Werthe:

$$\sum_k a_{ik} w'_k \quad , \quad \sum_k a_{ik} w''_k \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots r \\ k = 1, 2, \ldots r, s \end{pmatrix},$$

für keinen der Indices i, in zwei verschiedenen der t^{r+1} Theilintervalle liegen. Setzt man nun:

$$w'_k - w''_k = m_{ks} \qquad (k = 1, 2, \ldots r, s),$$

so ist:

$$\left| \sum_k a_{ik} m_{ks} \right| < t^{-1} \sum_k |a_{ik}| \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots r \\ k = 1, 2, \ldots r, s \end{pmatrix},$$

und man kann also in der That durch angemessene Wahl der Zahl t bewirken, dass die absoluten Werthe:

$$\left| \sum_k a_{ik} m_{ks} \right| \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots r \\ k = 1, 2, \ldots r, s \end{pmatrix}$$

kleiner als die gegebene Grösse τ werden.

Hierbei können freilich für einzelne Werthe von i und für einzelne Werthe von s die Ausdrücke $\sum_k a_{ik} m_{ks}$ gleich Null werden. Aber für alle Werthe von i und s kann dies nicht der Fall sein, da nach dem, was am Schlusse des vorigen Paragraphen ausgeführt worden, die Existenz von Zahlen m_{ks}, wofür alle Gleichungen:

$$\sum_k a_{ik} m_{ks} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots r; \; k = 1, 2, \ldots r, s; \\ s = r+1, r+2, \ldots q \end{pmatrix}$$

erfüllt sind, eine charakteristische Eigenschaft der Systeme (a_{ik}) vom Rationalitäts-Range *Null* ist. Es muss daher mindestens einen Index s geben, für den nicht alle r Werthe:

$$\sum_k a_{ik} m_{ks} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots r \\ k = 1, 2, \ldots r, s \end{pmatrix}$$

gleich Null werden. Setzt man nun:

$$\sum_k a_{ik} m_{ks} = a_{i, q+1} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots r \\ k = 1, 2, \ldots r, s \end{pmatrix},$$

so sind die r Grössen $a_{i, q+1}$ ihrem absoluten Werthe nach kleiner als τ, und nicht sämmtlich gleich *Null*.

II. Diejenigen Zeilen $a_{1k}, a_{2k}, \ldots a_{rk}$, wofür der Werth von $a_{i, q+1}$ beliebig klein und doch von Null verschieden ist, können offenbar nicht lauter rationale Elemente enthalten. Jede solche Zeile, die nicht lauter rationale Elemente enthält, kann aber — unbeschadet der im Anfange dieses Paragraphen gemachten Voraussetzung — als erste Zeile genommen werden. Man kann also namentlich diejenige Zeile als die erste wählen, wofür der absolute Werth von $a_{i, q+1}$ am grössten ist. Alsdann wird:

$$\tau > |a_{1, q+1}| \geqq |a_{i, q+1}| \qquad (i = 1, 2, \ldots r),$$

Digitized by Google

und nun kann aus jeder näherungsweisen ganzzahligen Lösung der Gleichungen:

$$(\mathfrak{N}^0) \qquad \sum_k \left(a_{ik} - \frac{a_{i,q+1}}{a_{1,q+1}} a_{1k}\right) w_k = \xi_i - \frac{a_{i,q+1}}{a_{1,q+1}} \xi_1 \qquad \begin{pmatrix} i=2,3,\ldots r \\ k=1,2,\ldots q \end{pmatrix}$$

eine ganzzahlige Lösung der Gleichungen:

$$(\mathfrak{N}_1) \qquad \sum_k a_{ik} w_k = \xi_i - \phi_i \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots r \\ k=1,2,\ldots q \end{pmatrix}$$

hergeleitet werden. Da nämlich:

$$\sum_k \left(a_{ik} - \frac{a_{i,q+1}}{a_{1,q+1}} a_{1k}\right) m_{ks} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i=2,3,\ldots r \\ k=1,2,\ldots q \end{pmatrix}$$

ist, so genügen, wenn durch:

$$w_1 = n_1 , \; w_2 = n_2 , \; \ldots\ldots \; w_q = n_q$$

irgend eine Lösung der Gleichungen $(\mathfrak{N}^0)$ gegeben wird, denselben Gleichungen $(\mathfrak{N}^0)$ auch die Werthe:

$$w_1 = n_1 + \mu m_{1s} , \; w_2 = n_2 + \mu m_{2s} , \; \ldots\ldots \; w_q = n_q + \mu m_{qs} ,$$

und die hierbei noch beliebige ganze Zahl μ kann nun so bestimmt werden, dass für dieselben Werthe von $w_1, w_2, \ldots . w_q$:

$$\left|\xi_1 - \sum_k a_{1k} w_k\right| < \tfrac{1}{2}\tau \qquad (k=1,2,\ldots q)$$

oder, was dasselbe ist:

$$\sum_k a_{1k} w_k = \xi_1 - \phi_1 , \quad |\phi_1| < \tfrac{1}{2}\tau \qquad (k=1,2,\ldots q)$$

wird. Denn hierzu braucht man, da:

$$\xi_1 - \sum_k a_{1k}(\mu m_{ks} + n_k) = \xi_1 - \mu a_{1,q+1} - \sum_k a_{1k} n_k \qquad (k=1,2,\ldots q)$$

und $|a_{1,q+1}| < \tau$ ist, nur die dem Werthe von:

$$\frac{\xi_1 - \sum_k a_{1k} n_k}{a_{1,q+1}} \qquad (k=1,2,\ldots q)$$

nächste ganze Zahl für μ zu nehmen. Wird nun die angenäherte Lösung derselben Gleichungen $(\mathfrak{N}^0)$ mittels der Zahlen n_k oder $n_k + \mu m_{ks}$ so vorausgesetzt, dass sich die Werthe auf den beiden Seiten der Gleichung um weniger als $\frac{1}{2}\tau$ von einander unterscheiden, so ist:

$$\sum_k \left(a_{ik} - \frac{a_{i,q+1}}{a_{1,q+1}} a_{1k}\right)(n_k + \mu m_{ks}) = \xi_i - \frac{a_{i,q+1}}{a_{1,q+1}} \xi_1 - \theta_i , \quad |\theta_i| < \tfrac{1}{2}\tau$$
$$(i=2,3,\ldots r; \; k=1,2,\ldots q),$$

Digitized by Google

und wenn man hiermit die Gleichung:

$$\sum_k a_{1k}(n_k + \mu m_{ks}) = \xi_1 - \phi_1 \qquad (k = 1, 2, \ldots q)$$

verbindet, welche aus der obigen Gleichung: $\sum_k a_{1k} w_k = \xi_1 - \phi_1$, durch Einsetzen der Werthe $w_k = n_k + \mu m_{ks}$ entsteht, so resultirt die Gleichung:

$$\sum_k a_{ik}(n_k + \mu m_{ks}) = \xi_i - \theta_i - \frac{a_{i,q+1}}{a_{1,q+1}}\phi_1 \qquad \begin{pmatrix} i = 2, 3, \ldots r \\ k = 1, 2, \ldots q \end{pmatrix},$$

welche auch noch für $i = 1$ gilt, falls man $\theta_1 = 0$ nimmt. Setzt man endlich noch:

$$\theta_i + \frac{a_{i,q+1}}{a_{1,q+1}}\phi_1 = \phi_i \qquad (i = 2, 3, \ldots r),$$

so wird $|\phi_i| < \tau$, da

$$|a_{i,q+1}| < |a_{1,q+1}| \ , \ |\theta_i| < \tfrac{1}{2}\tau \ , \ |\phi_1| < \tfrac{1}{2}\tau \qquad (i = 2, 3, \ldots r)$$

vorausgesetzt worden, und die Gleichungen:

$$(\mathfrak{N}_1) \qquad \sum_k a_{ik} w_k = \xi_i - \phi_i \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots r \\ k = 1, 2, \ldots q \end{pmatrix},$$

mit den Ungleichheitsbedingungen:

$$|\phi_i| < \tau \qquad (i = 1, 2, \ldots r),$$

werden also in der That durch die Werthe:

$$w_k = n_k + \mu m_{ks} \qquad (k = 1, 2, \ldots q)$$

befriedigt, wenn die Zahlen $n_1, n_2, \ldots n_q$ den Gleichungen:

$$(\mathfrak{N}_2) \qquad \sum_k \left(a_{ik} - \frac{a_{i,q+1}}{a_{1,q+1}} a_{1k}\right) n_k = \xi_i - \frac{a_{i,q+1}}{a_{1,q+1}}\xi_1 - \theta_i \quad \begin{pmatrix} i = 2, 3, \ldots r \\ k = 1, 2, \ldots q \end{pmatrix},$$

mit den Ungleichheitsbedingungen:

$$|\theta_i| < \tfrac{1}{2}\tau \qquad (i = 2, 3, \ldots r)$$

genügen, und wenn die ganze Zahl μ durch die Bedingung:

$$|\mu a_{1,q+1} - \xi_1 + \sum_k a_{1k} n_k| < \tfrac{1}{2}|a_{1,q+1}| \qquad (k = 1, 2, \ldots q)$$

bestimmt ist.

III. In der hier unter I und II gegebenen Entwickelung kann überall der Index i auf die Werthe, die nicht grösser als $\mathfrak{r}$ sind, beschränkt werden. Dann sind die r Gleichungen $(\mathfrak{N}_1)$ mit den im Anfange dieses Paragraphen aufgestellten $\mathfrak{r}$ Gleichungen:

$$(\mathfrak{N}) \qquad \sum_k a_{ik} w_k = \xi_i - \phi_i \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots \mathfrak{r} \\ k = 1, 2, \ldots q \end{pmatrix}$$

Digitized by Google

identisch, deren Lösbarkeit in ganzen Zahlen w, mit den Ungleichheitsbedingungen:

$$|\phi_i| < \tau \qquad (i = 1, 2, \ldots \tau)$$

nachgewiesen werden sollte.

Bei der Beschränkung auf die Werthe $i \leqq \tau$ bilden aber die Gleichungen $(\mathfrak{N}_2)$ ein System von $(\tau - 1)$ Gleichungen vom Rationalitäts-Range $(\tau - 1)$. Denn wenn der Rationalitäts-Rang kleiner sein sollte, müsste mindestens eine Gleichung:

$$\sum_i c_i \left(a_{ik} - \frac{a_{i,q+1}}{a_{1,q+1}} a_{1k} \right) = \mathfrak{a} \qquad \begin{pmatrix} i = 2, 3, \ldots \tau \\ k = 1, 2, \ldots q \end{pmatrix},$$

in welcher $\mathfrak{a}$ eine ganze Zahl bedeutet, existiren. Dies ist aber nicht möglich, weil eine solche Gleichung, wenn:

$$\sum_i c_i a_{i,q+1} = - c_1 a_{1,q+1} \qquad (i = 2, 3, \ldots \tau)$$

gesetzt wird, in die Gleichung:

$$\sum_i c_i a_{ik} = \mathfrak{a} \qquad (i = 1, 2, \ldots \tau)$$

übergeht, deren Bestehen mit der Voraussetzung, dass die Zahl τ den Rationalitäts-Rang des Systems (a_{ik}) angiebt, unverträglich ist.

Da nun die Lösbarkeit eines Systems von $(\tau - 1)$ Gleichungen vom Rationalitäts-Range $(\tau - 1)$ vorausgesetzt werden kann,[1] so ist der zu führende Nachweis der Lösbarkeit der Gleichungen $(\mathfrak{N})$ in der obigen Entwickelung vollständig enthalten. Doch soll eben diese Entwickelung noch benutzt werden, um den weiteren Nachweis zu führen, dass auch das System der r Gleichungen $(\mathfrak{N}_1)$ lösbar ist, wenn zwischen den gegebenen Grössen ξ gewisse Relationen bestehen.

§. 10.

Da das System (a_{ik}) den Rationalitäts-Rang τ hat, müssen $r - \tau$ linear unabhängige Relationen:

$$(\mathfrak{P}) \qquad \sum_i c_{hi} a_{ik} = \mathfrak{a}_{hk} \qquad \begin{pmatrix} h = \tau + 1, \ldots r \\ i = 1, 2, \ldots r \\ k = 1, 2, \ldots q \end{pmatrix}$$

[1] Die Lösbarkeit einer Gleichung vom Rationalitäts-Range *Eins*, sowie eines Systems von zwei Gleichungen vom Rationalitäts-Range *Zwei* ist in den §§. 1 und 2 ausführlich dargelegt worden.

Digitized by Google

mit ganzzahligen Werthen a_{hk} bestehen. Es war aber:

$$\sum_k a_{ik} m_{ks} = a_{i,q+1} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots r \\ k = 1, 2 \dots q \end{pmatrix},$$

also

$$\sum_i c_{hi} a_{i,q+1} = \sum_k a_{hk} m_{ks} \qquad \begin{pmatrix} h = \tau + 1, \dots r \\ i = 1, 2, \dots r \\ k = 1, 2, \dots q \end{pmatrix}.$$

Da nun die Werthe $|a_{i,q+1}|$ sämmtlich kleiner als eine beliebig klein gewählte Grösse τ sind, die Summe rechts aber einen ganzzahligen Werth hat, so muss sie gleich Null sein. Zwischen den Grössen $a_{i,q+1}$ bestehen hiernach die $r - \tau$ Gleichungen:

$$(\mathfrak{O}) \qquad \sum_i c_{hi} a_{i,q+1} = 0 \qquad \begin{pmatrix} h = \tau + 1, \dots r \\ i = 1, 2, \dots r \end{pmatrix}.$$

Dies vorausgeschickt, soll nun gezeigt werden, dass die r Gleichungen $(\mathfrak{N}_1)$ des vorigen Paragraphen:

$$(\mathfrak{N}_1) \qquad \sum_k a_{ik} w_k = \xi_i - \phi_i \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots r \\ k = 1, 2, \dots q \end{pmatrix}$$

in ganzen Zahlen w lösbar sind, sobald zwischen den gegebenen Grössen ξ die Relationen:

$$(\mathfrak{R}) \qquad \sum_i c_{hi} \xi_i = 0 \qquad \begin{pmatrix} h = \tau + 1, \dots r \\ i = 1, 2, \dots r \end{pmatrix}$$

bestehen.

Dabei kann angenommen werden, dass die Determinante:

$$|c_{hi}| \qquad (h, i = \tau + 1, \tau + 2, \dots r)$$

von Null verschieden ist: anderenfalls würde nämlich aus den Gleichungen $(\mathfrak{P})$ eine Relation:

$$\sum_{i=1}^{i=\tau} \gamma_i a_{ik} = \sum_{h=\tau+1}^{h=r} \alpha_h a_{hk} \qquad (k = 1, 2, \dots q)$$

hervorgehen, es würde also eine lineare Function der τ ersten Zeilen:

$$a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{iq} \qquad (i = 1, 2, \dots \tau)$$

als lineare Function der $r - \tau$ ganzzahligen Reihen:

$$a_{h1}, a_{h2}, \dots a_{hq} \qquad (h = \tau + 1, \dots r)$$

darstellbar sein, d. h. es würden — entgegen der im Anfang des §. 9 gemachten Voraussetzung — die ersten τ Reihen von Elementen »in Beziehung auf den Rationalitäts-Bereich *Eins*« von einander linear abhängig sein.

Digitized by Google

Unter der hiermit gerechtfertigten Voraussetzung, dass die Determinante:

$$|c_{hi}| \qquad (h, i = \tau+1, \tau+2, \ldots r)$$

von Null verschieden ist, folgen aus den Relationen (Ω) und ($\mathfrak{R}$) auch Relationen folgender Art:

$$(\bar{\mathfrak{P}}) \qquad a_{h,q+1} = \sum_i \bar{c}_{hi} a_{i,q+1}$$

$$(\bar{\mathfrak{R}}) \qquad \xi_h = \sum_i \bar{c}_{hi} \xi_i \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots \tau \\ h = \tau+1, \ldots r \end{pmatrix}.$$

Für den Fall $\tau = 1$ ist demnach:

$$a_{h,q+1} = \bar{c}_{h1} a_{1,q+1}, \quad \xi_h = \bar{c}_{h1} \xi_1, \quad \text{also} \quad \xi_h = \frac{a_{h,q+1}}{a_{1,q+1}} \xi_1 \qquad (h = 2, 3, \ldots r),$$

und wenn man für diesen Fall gemäss §. 9 die Zahl μ als die dem Quotienten $\frac{\xi_1}{a_{1,q+1}}$ nächste ganze Zahl bestimmt, und

$$\phi_h = \frac{a_{h,q+1}}{a_{1,q+1}} \phi_1$$

setzt, so erhält man die Lösung der Gleichungen ($\mathfrak{R}_1$) durch:

$$w_k = \mu m_{ks} \qquad (k = 1, 2, \ldots q),$$

da alsdann:

$$\sum_k a_{ik} w_k = \mu \sum_k a_{ik} m_{ks} = \mu a_{i,q+1} = \frac{a_{i,q+1}}{a_{1,q+1}} (\xi_1 - \phi_1) = \xi_i - \phi_i$$

wird.

Nimmt man nun für Gleichungen ($\mathfrak{R}_1$) vom Rationalitäts-Range $(\tau - 1)$ an, dass sie unter Bedingungen ($\mathfrak{R}$) in ganzen Zahlen w lösbar seien, so kann man die Existenz von Zahlen w voraussetzen, durch welche die Gleichungen:

$$(\mathfrak{R}^0) \qquad \sum_k \left(a_{ik} - \frac{a_{i,q+1}}{a_{1,q+1}} a_{1k} \right) w_k = \xi_i - \frac{a_{i,q+1}}{a_{1,q+1}} \xi_1 \qquad \begin{pmatrix} i = 2, 3, \ldots r \\ k = 1, 2, \ldots q \end{pmatrix}$$

erfüllt werden, falls die Grössen ξ den Bedingungsgleichungen:

$$(\mathfrak{R}^0) \qquad \sum_i c_{hi} \left(\xi_i - \frac{a_{i,q+1}}{a_{1,q+1}} \xi_1 \right) = 0 \qquad \begin{pmatrix} h = \tau+1, \ldots r \\ i = 2, 3, \ldots r \end{pmatrix}$$

genügen. Denn die Coefficienten c_{hi} sind die Coefficienten der $(r - \tau)$ linearen Relationen:

$$\sum_i c_{hi} \left(a_{ik} - \frac{a_{i,q+1}}{a_{1,q+1}} a_{1k} \right) = a_{hk} \qquad \begin{pmatrix} h = \tau+1, \ldots r \\ i = 2, 3, \ldots r \\ k = 1, 2, \ldots q \end{pmatrix},$$

Digitized by Google

welche zwischen den $(r-1)$ Zeilen der Coefficienten des Gleichungssystems $(\mathfrak{N}^0)$ — vermöge der Gleichungen $(\mathfrak{P})$ und $(\mathfrak{Q})$ — bestehen, und der Rationalitäts-Rang des Systems der $(r-1)$ Gleichungen $(\mathfrak{N}^0)$ ist daher in der That: $r-1-(r-\mathfrak{r})$ d. h. gleich $(\mathfrak{r}-1)$.

Aus jeder Lösung der Gleichungen $(\mathfrak{N}^0)$ ist aber nach den Entwickelungen im §. 9 für dieselben Grössen ξ, also auch mit denselben Bedingungen $(\mathfrak{N}^0)$ eine Lösung des Systems:

$$(\mathfrak{N}_1) \qquad \sum_k a_{ik} w_k = \xi_i - \phi_i \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\dots r \\ k=1,2,\dots q \end{pmatrix}$$

herzuleiten. Da nun einerseits die Bedingungen $(\mathfrak{N}^0)$ — vermöge der Gleichungen $(\mathfrak{Q})$ — mit den Bedingungen:

$$(\mathfrak{N}) \qquad \sum_i c_{hi} \xi_i = 0 \qquad (i=1,2,\dots r)$$

zusammenfallen, und da andrerseits für den Fall $\mathfrak{r}=1$ die Lösbarkeit der Gleichungen $(\mathfrak{N}_1)$ unter den Bedingungen $(\mathfrak{N})$ oben dargethan worden ist, so folgt deren Lösbarkeit für jeden beliebigen Werth des Rationalitäts-Ranges $\mathfrak{r}$.

§. 11.

Das im vorhergehenden Paragraphen entwickelte Resultat,

dass stets ganze Zahlen $w_1, w_2, \dots w_q$ gefunden werden können, für welche die Werthe von:

$$\sum_k a_{1k} w_k, \ \sum_k a_{2k} w_k, \ \dots \ \sum_k a_{rk} w_k \qquad (k=1,2,\dots q)$$

irgend welchen gegebenen, nur den Gleichungen $(\mathfrak{N})$ genügenden, Grössen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_r$ beliebig nahe kommen,

lässt sich noch in anderer Weise mit Hülfe einer, auch an sich wichtigen, Colonnentransformation des Systems (a_{ik}) begründen.

Um eben diese Transformation auseinanderzusetzen sei zuvörderst bemerkt, dass der Rationalitäts-Rang der Definition nach für Systeme, die im Sinne der Zeilentransformation aequivalent sind, identisch ist; dass er aber offenbar auch ungeändert bleibt, wenn ein System in ein, im Sinne der Colonnentransformation, aequivalentes übergeht.

Nunmehr soll gezeigt werden,

dass jedes System, dessen (absoluter) Rang grösser ist als der Rationalitäts-Rang, durch Colonnentransformation in ein aequivalentes verwandelt werden kann, welches die Eigenschaft hat, dass bei Weglassung einer bestimmten Colonne der (absolute) Rang um eine Einheit erniedrigt wird, während der Rationalitäts-Rang derselbe bleibt.

Digitized by Google

Wenn nämlich das System:

$$(a_{ik}) \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots p \\ k=1,2,\ldots q \end{pmatrix}$$

vom (absoluten) Range r und vom Rationalitäts-Range $\mathfrak{r}$ ist, und die Reihenfolge der Colonnen und Zeilen so bestimmt wird, dass die Determinante der ersten r^2 Elemente a_{ik} von Null verschieden ist, so giebt es unter der Voraussetzung $\mathfrak{r} < r$ (nach §. 7) ganze Zahlen:

$$a_{01}, a_{02}, \ldots a_{0q},$$

für welche die Determinante $(r+1)$ter Ordnung:

$$|a_{lm}| \qquad \begin{pmatrix} l=0,1,2,\ldots r \\ m=k,1,2,\ldots r \end{pmatrix}$$

verschwindet. Das durch Hinzufügung der Zeile ganzzahliger Elemente a_{0k} gebildete System:

$$(a_{hk}) \qquad \begin{pmatrix} h=0,1,\ldots p \\ k=1,2,\ldots q \end{pmatrix}$$

ist dem ursprünglichen Systeme:

$$(a_{ik}) \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots p \\ k=1,2,\ldots q \end{pmatrix}$$

im Sinne der Zeilentransformation aequivalent; es ist also ebenfalls vom (absoluten) Range r, und es müssen demgemäss alle daraus zu bildenden Determinanten $(r+1)$ter Ordnung — nicht bloss die oben angeführten besonderen — gleich Null sein.

Es sei nun a^0_{00} der grösste gemeinsame Theiler der q Zahlen a_{0k} und:

$$a_{0k} = d_k a^0_{00} \qquad (k=1,2,\ldots q).$$

Ferner seien die q ganzen Zahlen g_k so gewählt, dass:

$$\sum_k a_{0k} g_k = a^0_{00} \qquad (k=1,2,\ldots q)$$

wird. Setzt man dann:

$$a^0_{i0} = \sum_k a_{ik} g_k \;,\; a^0_{ik} = a_{ik} - d_k \sum_k a_{ik} g_k \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots p \\ k=1,2,\ldots q \end{pmatrix},$$

so ist:

$$a_{ik} = a^0_{ik} + a^0_{i0} d_k \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots p \\ k=1,2,\ldots q \end{pmatrix}.$$

Die beiden Systeme:

$$(a^0_{il}) \;,\; (a_{ik}) \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots p \\ k=1,2,\ldots q \\ l=0,1,2,\ldots q \end{pmatrix}$$

gehen also durch ganzzahlige lineare Transformation der Colonnen in

Digitized by Google

einander über, d. h. sie sind im Sinne der Colonnentransformation einander aequivalent.

Diese Aequivalenz besteht auch, wenn man die Werthe des Index i auf die ersten r Zahlen beschränkt. Andererseits gelten die Transformations-Gleichungen auch für $i = 0$, wenn:

$$a^{0}_{0k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots q)$$

genommen wird. Es sind also auch die Systeme:

$$(a^{0}_{jl}) \ , \ (a_{jk}) \qquad \begin{pmatrix} j = 0, 1, \ldots p \text{ oder } j = 0, 1, \ldots r \\ k = 1, 2, \ldots q \ ; \quad l = 0, 1, \ldots q \end{pmatrix}$$

im Sinne der Colonnentransformation einander aequivalent. Endlich ist das System:

$$(a^{0}_{jl}) \qquad \begin{pmatrix} j = 0, 1, \ldots p \text{ oder } j = 0, 1, \ldots r \\ k = 1, 2, \ldots q; \quad l = 0, 1, \ldots q \end{pmatrix}$$

dem ursprünglichen Systeme:

$$(a_{ik}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots p \\ k = 1, 2, \ldots q \end{pmatrix}$$

in jenem »weiteren« am Schlusse des §. 6 erläuterten Sinne aequivalent; und das System (a^{0}_{jl}) hat daher ebenso wie das System (a_{ik}) den (absoluten) Rang r und den Rationalitäts-Rang $\mathfrak{r}$.

Bedeuten $i_1, i_2, \ldots i_r$ beliebige von den Zahlen $1, 2, \ldots p$, und $k_1, k_2, \ldots k_r$ beliebige von den Zahlen $1, 2, \ldots q$, so besteht offenbar die Determinanten-Relation:

$$|a^{0}_{i_0 k_0}| = a^{0}_{00} |a^{0}_{ik}| \qquad \begin{pmatrix} i_0 = 0, i_1, i_2, \ldots i_r; \ i = i_1, i_2, \ldots i_r \\ k_0 = 0, k_1, k_2, \ldots k_r; \ k = k_1, k_2, \ldots k_r \end{pmatrix}.$$

Da das System (a^{0}_{jl}) vom (absoluten) Range r ist, so muss die Determinante links, als eine aus diesem Systeme gebildete Determinante $(r+1)$ter Ordnung gleich Null sein; es verschwindet hiernach jede Determinante $r$ter Ordnung, die aus dem Systeme:

$$(a^{0}_{ik}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots p \\ k = 1, 2, \ldots q \end{pmatrix}$$

gebildet werden kann, und der (absolute) Rang dieses Systems ist also kleiner als r. Dieser Rang kann aber nicht kleiner als $(r-1)$ sein, weil sonst das System, welches durch Hinzufügung der Colonne:

$$a^{0}_{10}, a^{0}_{20}, \ldots a^{0}_{p0}$$

entsteht, von niedrigerem als dem $r$ten Range wäre. Der Rang jenes Systems (a^{0}_{ik}) muss also genau gleich $(r-1)$ sein.

Da der Rationalitäts-Rang des Systems:

$$(a^{0}_{jl}) \qquad \begin{pmatrix} j = 0, 1, \ldots r \\ l = 0, 1, \ldots q \end{pmatrix}$$

Digitized by Google

gleich τ ist, so giebt es genau $r - \tau$ von einander linear unabhängige Relationen:

$$(\mathfrak{P}^0) \qquad \sum_j c^0_{\tau+1,j} a^0_{jl} = \mathfrak{a}^0_{\tau+1,l}, \ldots \sum_j c^0_{rj} a^0_{jl} = \mathfrak{a}^0_{rl} \qquad \begin{pmatrix} j = 0, 1, \ldots r \\ l = 0, 1, \ldots q \end{pmatrix},$$

in denen $\mathfrak{a}^0_{\tau+1,l}, \ldots \mathfrak{a}^0_{rl}$ ganze Zahlen sind. Da ferner a^0_{00} eine ganze Zahl und

$$a^0_{0k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots q)$$

ist, so kann in der ersten jener $r - \tau$ Relationen $(\mathfrak{P}^0)$:

$$c^0_{\tau+1,0} = 1, \; c^0_{\tau+1,1} = c^0_{\tau+1,2} = \ldots = c^0_{\tau+1,r} = 0, \; \mathfrak{a}^0_{\tau+1,0} = a^0_{00}$$

genommen werden. Die übrigen $r - \tau - 1$ Relationen können, bei Weglassung des Werthes $l = 0$, folgendermassen dargestellt werden:

$$\sum_i c^0_{\tau+2,i} a^0_{ik} = \mathfrak{a}^0_{\tau+2,k}, \ldots \sum_i c^0_{ri} a^0_{ik} = \mathfrak{a}^0_{rk} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots r \\ k = 1, 2, \ldots q \end{pmatrix}.$$

Aber es kann auch keine weitere solche Relation:

$$\sum_i c^0_{r+1,i} a^0_{ik} = \mathfrak{a}^0_{r+1,k} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots r \\ k = 1, 2, \ldots q \end{pmatrix}$$

bestehen; denn sonst würde eine $(r - \tau + 1)$te Relation:

$$\sum_j c^0_{r+1,j} a^0_{jl} = \mathfrak{a}^0_{r+1,l} \qquad \begin{pmatrix} j = 0, 1, \ldots r \\ l = 0, 1, \ldots q \end{pmatrix}$$

für das System (a^0_{jl}) folgen, wenn für $l = 0$ der ganzzahlige Werth von $\mathfrak{a}^0_{r+1,0}$ beliebig angenommen und dann der Werth von $c^0_{r+1,0}$ gemäss der Gleichung:

$$c^0_{r+1,0} a^0_{00} + \sum_i c^0_{r+1,i} a^0_{i0} = \mathfrak{a}^0_{r+1,0} \qquad (i = 1, 2, \ldots r)$$

bestimmt wird. Es bestehen hiernach für die Zeilen des Systems:

$$(a^0_{ik}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots r \\ k = 1, 2, \ldots q \end{pmatrix}$$

nur genau $r - \tau - 1$ Relationen der angegebenen Art, und eben dieses System (a^0_{ik}), dessen (absoluter) Rang gleich $r - 1$ ist, hat daher den Rationalitäts-Rang: $r - 1 - (r - \tau - 1)$, d. h. den Rationalitäts-Rang τ.

Es hat also das dem gegebenen Systeme vom (absoluten) Range r und vom Rationalitäts-Range τ:

$$(a_{ik}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots p \\ k = 1, 2, \ldots q \end{pmatrix}$$

(im Sinne der Colonnentransformation) aequivalente System:

$$(a^0_{il}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots p \\ l = 0, 1, \ldots q \end{pmatrix}$$

Digitized by Google

in der That die Eigenschaft, dass bei Weglassung der durch den Index $l = 0$ bezeichneten Colonne ein System:

$$(a_{ik}^{0}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots p \\ k = 1, 2, \ldots q \end{pmatrix}$$

resultirt, welches vom (absoluten) Range $r - 1$ und vom Rationalitäts-Range $\mathfrak{r}$ ist.

Der oben aufgestellte Satz ist hiermit vollständig bewiesen, und es kann nun aus demselben unmittelbar der allgemeinere Satz gefolgert werden,

($\mathfrak{S}$) dass jedes System vom (absoluten) Range r und vom Rationalitäts-Range $\mathfrak{r}$ durch Colonnentransformation in ein aequivalentes verwandelt werden kann, aus welchem bei Weglassung bestimmter $(r - \mathfrak{r})$ Colonnen ein System entsteht, dessen (absoluter) Rang, mit dem Rationalitäts-Range übereinstimmend, den Werth $\mathfrak{r}$ hat.

In dem Systeme, welches diesem Satze gemäss, bei Weglassung von $(r - \mathfrak{r})$ Colonnen, für den Fall $\mathfrak{r} = 0$ resultirt, müssen, da der (absolute) Rang gleich Null ist, sämmtliche Elemente gleich Null sein; es folgt also,

($\mathfrak{S}^{0}$) dass jedes System vom Rationalitäts-Range *Null* durch Colonnentransformation in ein aequivalentes verwandelt werden kann, welches nur so viel Colonnen enthält, als der Rationalitäts-Rang angiebt.

Dieser speciellere Satz, dessen eigentliche Quelle hier aufgezeigt worden, findet sich schon in meinen früheren Arbeiten;[1] er ist vollkommen identisch mit dem Satze, dass jedes aus linearen homogenen Functionen beliebig vieler Variabeln mit ganzzahligen Coefficienten gebildete Divisorensystem auf ein solches reducirt werden kann, in welchem die Anzahl der Elemente mit der Stufenzahl übereinstimmt. Denn wenn die Elemente a_{ik} sämmtlich ganze Zahlen sind, so ist der Rationalitäts-Rang des Systems (a_{ik}) gleich Null. Nun sind zwei Divisorensysteme:

$$(\mathfrak{D}) \qquad \left(\sum_i a_{i1}\mathfrak{R}_i,\ \sum_i a_{i2}\mathfrak{R}_i,\ \ldots\ \sum_i a_{iq}\mathfrak{R}_i\right)$$

$$(\mathfrak{D}^{0}) \qquad \left(\sum_i a_{i1}^{0}\mathfrak{R}_i,\ \sum_i a_{i2}^{0}\mathfrak{R}_i,\ \ldots\ \sum_i a_{iq'}^{0}\mathfrak{R}_i\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots p)$$

einander aequivalent (vergl. §. 5), wenn die Elemente des einen Systems

[1] Vergl. No. VII und VIII meiner vorigen Mittheilung: »Die Periodensysteme von Functionen reeller Variabeln«.

Digitized by Google

homogene lineare ganzzahlige Functionen der Elemente des anderen sind, d. h. wenn Gleichungen:

$$\sum_k g_{kk'} \sum_i a_{ik} \mathfrak{R}_i = \sum_i a^0_{ik'} \mathfrak{R}_i \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots p \\ k = 1, 2, \ldots q \\ k' = 1, 2, \ldots q' \end{pmatrix}$$
$$\sum_{k'} g^0_{k'k} \sum_i a^0_{ik'} \mathfrak{R}_i = \sum_i a_{ik} \mathfrak{R}_i$$

bestehen, in denen $g_{kk'}$ und $g^0_{k'k}$ ganze Zahlen bedeuten. Alsdann sind aber gemäss §. 5 die beiden Coefficienten-Systeme:

$$(a_{ik}) \ , \ (a^0_{ik'}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots p \\ k = 1, 2, \ldots q \\ k' = 1, 2, \ldots q' \end{pmatrix}$$

im Sinne der Colonnentransformation einander aequivalent, weil sie durch die ganzzahligen Transformationsgleichungen:

$$a^0_{ik'} = \sum_k a_{ik} g_{kk'} \ , \ a_{ik} = \sum_{k'} a^0_{ik'} g^0_{k'k} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots p \\ k = 1, 2, \ldots q \\ k' = 1, 2, \ldots q' \end{pmatrix}$$

mit einander verbunden sind. Da nun nach jenem (specielleren) Satze ($\mathfrak{S}^0$) stets Systeme $(a^0_{ik'})$ existiren, für welche die hier mit q' bezeichnete Anzahl der Colonnen mit der Rangzahl r übereinstimmt, so folgt, dass in der That für jedes Divisorensystem ($\mathfrak{D}$) aequivalente Divisorensysteme ($\mathfrak{D}^0$) existiren, die nur aus so viel Elementen bestehen, als die Stufenzahl des Systems angiebt.

Es verdient noch hervorgehoben zu werden, dass der oben bewiesene allgemeinere Satz ($\mathfrak{S}$) auch aus dem specielleren ($\mathfrak{S}^0$) gefolgert werden kann.

Wenn nämlich das System (a_{ik}) den (absoluten) Rang r und den Rationalitäts-Rang $\mathfrak{r}$ hat, so bestehen — gemäss der Bedeutung der Zahlen r und $\mathfrak{r}$ — genau $p - \mathfrak{r}$ linear unabhängige Relationen:

$$(\mathfrak{P}') \qquad \sum_i c'_{hi} a_{ik} = \mathfrak{a}_{hk} \qquad \begin{pmatrix} h = \mathfrak{r}+1, \ldots p \\ i = 1, 2, \ldots p \\ k = 1, 2, \ldots q \end{pmatrix},$$

in welchen

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{r}+1,k} \ , \ \mathfrak{a}_{\mathfrak{r}+2,k} \ , \ \ldots\ldots \ \mathfrak{a}_{rk} \qquad (k = 1, 2, \ldots q)$$

positive ganze Zahlen, und

$$\mathfrak{a}_{r+1,k} \ , \ \mathfrak{a}_{r+2,k} \ , \ \ldots\ldots \ \mathfrak{a}_{pk} \qquad (k = 1, 2, \ldots q)$$

sämmtlich gleich Null sind. Diese $p - \mathfrak{r}$ linearen Relationen ($\mathfrak{P}'$) sind aber auch dafür charakteristisch, dass das System (a_{ik}) den (absoluten) Rang r und den Rationalitäts-Rang $\mathfrak{r}$ hat.

Das System der $(r - \mathfrak{r})q$ positiven ganzen Zahlen:

$$(\mathfrak{a}_{hk}) \qquad \begin{pmatrix} h = \mathfrak{r}+1, \ldots r \\ k = 1, 2, \ldots q \end{pmatrix},$$

Digitized by Google

hat, weil es aus lauter ganzzahligen Elementen besteht, den Rationalitäts-Rang Null. Aber der (absolute) Rang ist gleich der Anzahl der Zeilen, also gleich $r - \tau$; denn zwischen den $r - \tau$ Zeilen des Systems kann keine lineare Relation:

$$\sum_h \gamma_h a_{hk} = 0 \qquad \begin{pmatrix} h = \tau+1, \dots r \\ k = 1, 2, \dots q \end{pmatrix}$$

bestehen; sonst würde nämlich, wenn

$$\sum_h \gamma_h c'_{hi} = c''_i \qquad \begin{pmatrix} h = \tau+1, \dots r \\ i = 1, 2, \dots p \end{pmatrix}$$

gesetzt wird, aus den Gleichungen $(\mathfrak{P}')$ die lineare Relation:

$$\sum_i c''_i a_{ik} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots p \\ k = 1, 2, \dots q \end{pmatrix}$$

folgen, und diese würde als eine $(p - r + 1)$te zu jenen $(p - r)$ Relationen hinzukommen, die in $(\mathfrak{P})$ für $h = r+1, r+2, \dots p$ enthalten sind; der (absolute) Rang des Systems (a_{ik}) würde also kleiner als r sein.

Jenem specielleren Satze $(\mathfrak{S}^0)$ gemäss giebt es nun ein nur $r - \tau$ Colonnen enthaltendes, im Sinne der Colonnentransformation dem Systeme (a_{hk}) aequivalentes System:

$$(a^0_{hf}) \qquad \begin{pmatrix} f = 1, 2, \dots r-\tau \\ h = \tau+1, \dots r \end{pmatrix}.$$

Es giebt daher Transformations-Relationen:

$$a^0_{hf} = \sum_k a_{hk} g_{kf}, \quad a_{hk} = \sum_f a^0_{hf} g^0_{fk} \qquad \begin{pmatrix} f = 1, 2, \dots r-\tau \\ h = \tau+1, \dots r \\ k = 1, 2, \dots q \end{pmatrix},$$

mit ganzzahligen Coefficienten g_{kf}, g^0_{fk}, und wenn diese Coefficienten g_{kf}, g^0_{fk} zur Transformation des Systems (a_{ik}) in ein im Sinne der Colonnen-Transformation aequivalentes System (a^0_{ik}) benutzt werden, indem

$$\begin{aligned} a^0_{if} &= \sum_k a_{ik} g_{kf} \\ a^0_{ig} &= a_{ig} - \sum_f a^0_{if} g^0_{fg} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} f = 1, 2, \dots r-\tau \\ g = r-\tau+1, \dots q \\ i = 1, 2, \dots p \\ k = 1, 2, \dots q \end{pmatrix}$$

gesetzt wird, so erhält man mit Hülfe der Relationen $(\mathfrak{P}')$ die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sum_i c'_{hi} a^0_{if} &= a^0_{hf} \\ \sum_i c'_{hi} a^0_{ig} &= \sum_i c'_{hi} a_{ig} - \sum_{i,f} c'_{hi} a^0_{if} g^0_{fg} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} f = 1, 2, \dots r-\tau \\ g = r-\tau+1, \dots q \\ h = \tau+1, \dots r \\ i = 1, 2, \dots p \\ k = 1, 2, \dots q \end{pmatrix},$$

die auch noch für $h > r$ gelten, wenn für diese Werthe von h die Grössen a^0_{hf} gleich Null gesetzt werden. Nun ist ferner:

Digitized by Google

$$\sum_i c'_{hi} a_{ig} = a_{hg},$$

$$\sum_{i,f} c'_{hi} a^0_{if} \mathfrak{g}^0_{fk} = \sum_{i,k,f} c'_{hi} a_{ik} \mathfrak{g}_{kf} \mathfrak{g}^0_{fg} = \sum_{k,f} a_{hk} \mathfrak{g}_{kf} \mathfrak{g}^0_{fg} = \sum_f a^0_{hf} \mathfrak{g}^0_{fg} = a_{hg};$$

$(f=1,2,\ldots r-\mathfrak{r};\ g=r-\mathfrak{r}+1,\ldots q;\ h=\mathfrak{r}+1,\mathfrak{r}+2,\ldots p;\ i=1,2,\ldots p;\ k=1,2,\ldots q)$

es wird daher:

$$\sum_i c'_{hi} a^0_{ig} = 0 \qquad \begin{pmatrix} g=r-\mathfrak{r}+1,\ldots q \\ h=\mathfrak{r}+1,\ldots\ldots r \\ i=1,2,\ldots\ldots p \end{pmatrix},$$

und die für das System (a^0_{ik}) geltenden linearen Relationen lassen sich also in folgender Weise darstellen:

$$(\mathfrak{P}'_0) \qquad \sum_i c'_{hi} a^0_{ik} = a^0_{hk} \qquad \begin{pmatrix} h=\mathfrak{r}+1,\ldots p \\ i=1,2,\ldots p \\ k=1,2,\ldots q \end{pmatrix},$$

wenn:

$$\begin{aligned} a^0_{hf} &= \sum_k a_{hk} \mathfrak{g}_{kf} \\ a^0_{hg} &= 0 \\ a^0_{ik} &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} f=1,2,\ldots r-\mathfrak{r} \\ g=r-\mathfrak{r}+1,\ldots q \\ h=\mathfrak{r}+1,\ldots\ldots r \\ i=r+1,\ldots\ldots p \\ k=1,2,\ldots\ldots q \end{pmatrix}$$

genommen wird. Das System (a^0_{ik}) hat demnach die in dem allgemeineren Satze $(\mathfrak{S})$ angegebene Eigenschaft, dass bei Weglassung der ersten, den Werthen $k = 1, 2, \ldots r - \mathfrak{r}$ entsprechenden, Colonnen ein System:

$$(a^0_{ig}) \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots\ldots p \\ g=r-\mathfrak{r}+1,\ldots q \end{pmatrix}$$

resultirt, für welches keine anderen linearen Relationen als die folgenden $p - \mathfrak{r}$ bestehen:

$$\sum_{i=1}^{i=p} c'_{hi} a^0_{ig} = 0 \qquad \begin{pmatrix} h=\mathfrak{r}+1,\mathfrak{r}+2,\ldots p \\ g=r-\mathfrak{r}+1,\ldots\ldots q \end{pmatrix},$$

und welches daher vom (absoluten) Range $\mathfrak{r}$ und dabei zugleich vom Rationalitäts-Range $\mathfrak{r}$ ist.

§. 12.

Nimmt man, wie im §. 5, an Stelle des Gleichungssystems:

$$(\mathfrak{G}) \qquad \sum_k a_{ik} w_k = \xi_i - \phi_i \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots p \\ k=1,2,\ldots q \end{pmatrix}$$

ein Gleichungssystem:

$$(\mathfrak{G}^0) \qquad \sum_k a^0_{ik} w^0_k = \xi_i - \phi_i \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots p \\ k=1,2,\ldots q \end{pmatrix},$$

in welchem das Coefficienten-System (a^0_{ik}) die im vorigen Paragraphen angegebene Beschaffenheit hat, so wird vermöge der mit $(\mathfrak{P}'_0)$ bezeichneten linearen Relationen:

Digitized by Google

$$\sum_{i,k} c'_{hi} a^0_{ik} w^0_k = \sum_k a^0_{hk} w^0_k = \sum_i c'_{hi} (\xi_i - \phi_i) \qquad \begin{pmatrix} h = \mathfrak{r}+1, \ldots p \\ i = 1, 2, \ldots . p \\ k = 1, 2, \ldots . q \end{pmatrix}.$$

Da a^0_{hk}

für jeden Werth von h, wenn $k > r - \mathfrak{r}$ ist, und
für jeden Werth von k, wenn $h > r$ ist,

den Werth *Null* hat, so reduciren sich die Gleichungen auf folgende:

$$\begin{aligned} \sum_i c'_{hi} (\xi_i - \phi_i) &= \sum_f a^0_{hf} w^0_f \\ \sum_i c'_{ji} (\xi_i - \phi_i) &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} f = 1, 2, \ldots r - \mathfrak{r} \\ h = \mathfrak{r}+1, \ldots . r \\ i = 1, 2, \ldots . p \\ j = r+1, \ldots . p \end{pmatrix};$$

es müssen daher, da ja die Grössen ϕ beliebig klein werden sollen, die gegebenen Grössen ξ nothwendig den Bedingungen:

$$(\mathfrak{T}) \qquad \sum_i c'_{hi} \xi_i = \sum_f a^0_{hf} w^0_f \qquad \begin{pmatrix} f = 1, 2, \ldots r - \mathfrak{r} \\ h = \mathfrak{r}+1, \ldots . r \\ i = 1, 2, \ldots . p \\ j = r+1, \ldots . p \end{pmatrix}$$

$$(\mathfrak{T}^0) \qquad \sum_i c'_{ji} \xi_i = 0$$

genügen, wenn das Gleichungssystem ($\mathfrak{S}$) in ganzen Zahlen w lösbar sein soll.

I. Nimmt man nun zuvörderst:

$$w^0_f = 0 \qquad (f = 1, 2, \ldots r - \mathfrak{r}),$$

so gehen die p Gleichungen ($\mathfrak{S}^0$) in folgende über:

$$\sum_g a^0_{ig} w^0_g = \xi_i - \phi_i \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots . p \\ g = r - \mathfrak{r} + 1, \ldots q \end{pmatrix},$$

mit den $(p - \mathfrak{r})$ Bedingungen:

$$\sum_i c'_{hi} \xi_i = 0 \qquad \begin{pmatrix} h = \mathfrak{r}+1, \mathfrak{r}+2, \ldots p \\ i = 1, 2, \ldots . p \end{pmatrix}.$$

Man braucht aber nur den $\mathfrak{r}$ Gleichungen:

$$\sum_g a^0_{1g} w^0_g = \xi_1 - \phi_1, \ \sum_g a^0_{2g} w^0_g = \xi_2 - \phi_2, \ldots \sum_g a^0_{\mathfrak{r}g} w^0_g = \xi_\mathfrak{r} - \phi_\mathfrak{r} \qquad (g = r - \mathfrak{r} + 1, \ldots q)$$

durch passende Werthe der $q - r + \mathfrak{r}$ Zahlen w^0_g Genüge zu thun. Denn, setzt man dann:

$$\xi_i - \sum_g a^0_{ig} w^0_g = \phi_i \qquad \begin{pmatrix} i = \mathfrak{r}+1, \ldots . p \\ g = r - \mathfrak{r} + 1, \ldots q \end{pmatrix},$$

so wird:

$$\sum_i c'_{hi} \phi_i = \sum_i c'_{hi} \xi_i - \sum_{i,g} c'_{hi} a^0_{ig} w^0_g \qquad \begin{pmatrix} h = \mathfrak{r}+1, \ldots . p \\ i = 1, 2, \ldots . p \\ g = r - \mathfrak{r} + 1, \ldots q \end{pmatrix};$$

da nun erstens die Grössen ξ durch die Bedingungen:

$$\sum_i c'_{hi} \xi_i = 0 \qquad \begin{pmatrix} h = \mathfrak{r}+1, \ldots p \\ i = 1, 2, \ldots . p \end{pmatrix}$$

mit einander verbunden sind, und da zweitens zwischen den Coefficienten a^0_{ik} gemäss ($\mathfrak{P}'_0$) §. 11 die Relationen:

$$\sum_i c'_{hi} a^0_{ig} = a^0_{hg} = 0 \qquad \begin{pmatrix} h = \mathfrak{r}+1, \mathfrak{r}+2, \ldots p \\ i = 1, 2, \ldots . p \\ g = r - \mathfrak{r} + 1, \ldots q \end{pmatrix}$$

Digitized by Google

bestehen, so resultiren die $(p - \mathfrak{r})$ Gleichungen:

$$\sum_i c'_{hi}\phi_i = 0 \qquad \begin{pmatrix} h=\mathfrak{r}+1,\ldots p \\ i=1,2,\ldots p \end{pmatrix},$$

aus denen hervorgeht, dass

$$\phi_{\mathfrak{r}+1},\ \phi_{\mathfrak{r}+2},\ \ldots\ \phi_p$$

beliebig klein und also auch die $p - \mathfrak{r}$ Gleichungen:

$$\sum_g a^0_{ig} w^0_g = \xi_i \qquad \begin{pmatrix} i=\mathfrak{r}+1,\ldots p \\ g=r-\mathfrak{r}+1,\ldots q \end{pmatrix}$$

näherungsweise erfüllt werden, wenn $\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_{\mathfrak{r}}$ beliebig klein, d. h. wenn die $\mathfrak{r}$ Gleichungen:

$$\sum_g a^0_{ig} w^0_g = \xi_i \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots\mathfrak{r} \\ g=r-\mathfrak{r}+1,\ldots q \end{pmatrix}$$

näherungsweise erfüllt sind.

Die näherungsweise Auflösung von $\mathfrak{r}$ Gleichungen, vom Rationalitäts-Range $\mathfrak{r}$, ist aber schon im §. 9 gegeben worden, und gemäss den im §. 11 enthaltenen Entwickelungen ist für das System:

$$(a^0_{ig}) \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots\mathfrak{r} \\ g=r-\mathfrak{r}+1,\ldots q \end{pmatrix}$$

in der That sowohl der (absolute) Rang als auch der Rationalitäts-Rang gleich $\mathfrak{r}$.

II. Werden nun ferner für $w^0_1, w^0_2, \ldots w^0_{r-\mathfrak{r}}$ beliebige ganze Zahlen genommen, so braucht man nur nach der im §. 9 angegebenen Weise dem Systeme von $\mathfrak{r}$ Gleichungen:

$$\sum_g a^0_{ig} w^0_g = -\sum_f a^0_{if} w^0_f + \xi_i - \phi_i \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots\mathfrak{r} \\ f=1,2,\ldots r-\mathfrak{r} \\ g=r-\mathfrak{r}+1,\ldots q \end{pmatrix},$$

dessen Rationalitäts-Rang gleich $\mathfrak{r}$ ist, durch geeignete Werthe der $q - r + \mathfrak{r}$ Zahlen w^0_g Genüge zu thun. Denn, setzt man dann:

$$\xi_i - \sum_k a^0_{ik} w^0_k = \phi_i \qquad \begin{pmatrix} i=\mathfrak{r}+1,\ldots p \\ k=1,2,\ldots q \end{pmatrix},$$

so wird:

$$\sum_i c'_{hi}\phi_i = \sum_i c'_{hi}\xi_i - \sum_{i,k} c'_{hi} a^0_{ik} w^0_k \qquad \begin{pmatrix} h=\mathfrak{r}+1,\ldots p \\ i=1,2,\ldots p \\ k=1,2,\ldots q \end{pmatrix};$$

es ist also wegen der Gleichungen $(\mathfrak{P}'_0)$ im §. 11 für $h \leqq r$:

$$\sum_i c'_{hi}\phi_i = \sum_i c'_{hi}\xi_i - \sum_f a^0_{if} w^0_f \qquad \begin{pmatrix} f=1,2,\ldots r-\mathfrak{r} \\ h=\mathfrak{r}+1,\ldots r \\ i=1,2,\ldots p \end{pmatrix}$$

und für $j > r$:

$$\sum_i c'_{ji}\phi_i = \sum_i c'_{ji}\xi_i \qquad \begin{pmatrix} j=r+1,\ldots p \\ i=1,2,\ldots p \end{pmatrix}.$$

Digitized by Google

Vermöge der oben mit ($\mathfrak{T}$) und ($\mathfrak{T}^0$) bezeichneten Bedingungen, welche zwischen den gegebenen Grössen ξ bestehen müssen, erfüllen daher $\phi_{\tau+1}, \phi_{\tau+2}, \ldots\ldots \phi_p$ die $p - \tau$ Bedingungen:

$$\sum_i c'_{hi}\phi_i = 0 \qquad \begin{pmatrix} h=\tau+1,\ldots p \\ i=1,2,\ldots. p \end{pmatrix},$$

aus denen, wie oben, zu erschliessen ist, dass näherungsweise nicht bloss die τ Gleichungen:

$$\sum_k a^0_{1k}w^0_k = \xi_1\,,\ \sum_k a^0_{2k}w^0_k = \xi_2, \ldots\ldots \sum_k a^0_{\tau k}w^0_k = \xi_\tau \qquad (k=1,2,\ldots q),$$

sondern alle p Gleichungen:

$$\sum_k a^0_{ik}w^0_k = \xi_i \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots p \\ k=1,2,\ldots q \end{pmatrix}$$

erfüllt werden.

Hiermit sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen der näherungsweisen Lösbarkeit eines Gleichungssystems:

($\mathfrak{G}$) $$\sum_k a_{ik}w_k = \xi_i \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots p \\ k=1,2,\ldots q \end{pmatrix}$$

oder eines damit aequivalenten Gleichungssystems:

($\mathfrak{G}^0$) $$\sum_k a^0_{ik}w^0_k = \xi_i \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots p \\ k=1,2,\ldots q \end{pmatrix}$$

vollständig dargelegt, und es ist auch gezeigt worden, wie man im Falle der Lösbarkeit ganze Zahlen w_k finden kann, für welche die sämmtlichen p Differenzen:

$$\sum_k a_{ik}w_k - \xi_i \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots p \\ k=1,2,\ldots q \end{pmatrix}$$

beliebig klein werden. Es ist nun klar, dass alle Systeme von Zahlen w_k aus irgend einem abgeleitet werden können, indem man dieses eine mit allen denjenigen Systemen von ganzen Zahlen $\mathfrak{w}_k$ verbindet, welche die linearen homogenen Gleichungen:

$$\sum_k a_{ik}\mathfrak{w}_k = 0 \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots p \\ k=1,2,\ldots q \end{pmatrix}$$

näherungsweise erfüllen. Die näherungsweise Auflösung linearer homogener Gleichungen habe ich aber schon in meinen beiden in den Comptes Rendus der Pariser Akademie veröffentlichten Aufsätzen vom Januar 1883 und November 1884 allgemein entwickelt.

§. 13.

Die im vorigen Paragraphen mit ($\mathfrak{T}$) und ($\mathfrak{T}^0$) bezeichneten Relationen, denen die gegebenen Grössen ξ genügen müssen, damit die Gleichungen ($\mathfrak{G}^0$) in ganzen Zahlen w näherungsweise lösbar seien,

Digitized by Google

können auf eine andere Form gebracht werden, in welcher ihre eigentliche Bedeutung klarer hervortritt.

Bezeichnet man nämlich mit

$$(a'_{fh}) \qquad \begin{pmatrix} f=1,2,\ldots r-\mathfrak{r} \\ h=\mathfrak{r}+1,\ldots\ldots r \end{pmatrix}$$

das zu

$$(a^0_{fh}) \qquad \begin{pmatrix} f=1,2,\ldots r-\mathfrak{r} \\ h=\mathfrak{r}+1,\ldots\ldots r \end{pmatrix}$$

conjugirte System, so besteht die Gleichung:

$$\sum_h a'_{fh} a^0_{hk} = \delta_{fk} \qquad \begin{pmatrix} f,k=1,2,\ldots r-\mathfrak{r} \\ h=\mathfrak{r}+1,\ldots\ldots r \end{pmatrix}$$

und diese gilt auch für $k>r-\mathfrak{r}$, weil alsdann $a^0_{hk}=0$ wird. Gemäss den Gleichungen $(\mathfrak{P}'_0)$ und $(\mathfrak{T})$ wird hiernach:

$$\begin{aligned} &\sum_{h,i} a'_{fh} c'_{hi} a^0_{ik} = \delta_{fk} \\ &\sum_{h,i} a'_{fh} c'_{hi} \xi_i = \sum_{h,f'} a'_{fh} a^0_{hf'} w^0_{f'} = w^0_f \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} f,f'=1,2,\ldots r-\mathfrak{r} \\ h=\mathfrak{r}+1,\ldots r \\ i=1,2,\ldots p \\ k=1,2,\ldots q \end{pmatrix},$$

und diese Gleichungen gehen, wenn

$$\sum_h a'_{fh} c'_{hi} = a'_{\mathfrak{r}+f,i} \qquad \begin{pmatrix} f=1,2,\ldots r-\mathfrak{r} \\ h=\mathfrak{r}+1,\ldots r \\ i=1,2,\ldots p \end{pmatrix}$$

gesetzt wird, in folgende über:

$$\begin{aligned} &\sum_i a'_{hi} a^0_{ik} = \delta_{h-\mathfrak{r},k} \\ &\sum_i a'_{hi} \xi_i = w^0_{h-\mathfrak{r}} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} h=\mathfrak{r}+1,\ldots r \\ i=1,2,\ldots p \\ k=1,2,\ldots q \end{pmatrix}.$$

An die Stelle der Gleichungen $(\mathfrak{P}'_0)$, $(\mathfrak{T})$, $(\mathfrak{T}^0)$ treten hiernach, wenn

$$\mathfrak{g}_h \text{ statt } w^0_{h-\mathfrak{r}} \qquad \begin{pmatrix} h=\mathfrak{r}+1,\ldots r \\ j=r+1,\ldots p \\ i=1,2,\ldots\ldots p \end{pmatrix}$$

und der Geichförmigkeit wegen a'_{ji} statt c'_{ji} gesetzt wird, die Relationen:

$$(\mathfrak{U}) \quad \begin{aligned} &\sum_i a'_{hi} a^0_{ik} = \delta_{h-\mathfrak{r},k} \\ &\sum_i a'_{ji} a^0_{ik} = 0 \end{aligned}$$

$$(\mathfrak{V}) \quad \begin{aligned} &\sum_i a'_{hi} \xi_i = \mathfrak{g}_h \\ &\sum_i a'_{ji} \xi_i = 0 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} h=\mathfrak{r}+1,\ldots r \\ j=r+1,\ldots p \\ i=1,2,\ldots\ldots p \\ k=1,2,\ldots\ldots q \end{pmatrix},$$

in denen $\mathfrak{g}_{\mathfrak{r}+1}, \mathfrak{g}_{\mathfrak{r}+2}, \ldots \mathfrak{g}_r$ beliebige ganze Zahlen bedeuten, und das hiermit erlangte Resultat kann folgendermaassen formulirt werden:

»*Die näherungsweise Auflösung eines Systems von p Gleichungen (vergl. §. 5 und §. 12):*

$$(\mathfrak{G}) \qquad \sum_k a_{ik} w_k = \xi_i \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots p \\ k=1,2,\ldots q \end{pmatrix}$$

in ganzen Zahlen $w_1, w_2, \ldots w_q$ kann mittels ganzzahliger Transformationen (vergl. §. 5):

$$a_{ik} = \sum_{k'} a^0_{ik'} g_{k'k}, \quad w_k = \sum_{k'} g_{kk'} w^0_{k'} \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots p \\ k,k'=1,2,\ldots q \end{pmatrix}$$

Digitized by Google

auf die näherungsweise Auflösung eines aequivalenten Gleichungssystems:

$$(\mathfrak{G}^0) \qquad \sum_k a_{ik}^0 w_k^0 = \xi_i \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\dots p \\ k=1,2,\dots q \end{pmatrix}$$

zurückgeführt werden, dessen Coefficienten so beschaffen sind, dass $p(p-\mathfrak{r})$ *Grössen:*

$$a'_{hi} \qquad \begin{pmatrix} h=\mathfrak{r}+1,\dots p \\ i=1,2,\dots p \end{pmatrix}$$

existiren, für welche:

$$(\mathfrak{U}_1) \qquad \sum_{i=1}^{i=p} a'_{\mathfrak{r}+1,i} a_{i1} = 1 \,, \quad \sum_{i=1}^{i=p} a'_{\mathfrak{r}+2,i} a_{i2} = 1 \,, \dots\dots \sum_{i=1}^{i=p} a'_{ri} a_{i,r-\mathfrak{r}} = 1$$

und aber:

$$(\mathfrak{U}_0) \qquad \sum_{i=1}^{i=p} a'_{hi} a_{ik}^0 = 0 \qquad (h=\mathfrak{r}+1,\dots p)$$

wird, wenn h *und* $\mathfrak{r}+k$ *verschiedene Werthe haben. Da alsdann:*

$$\sum_{i,k} a'_{hi} a_{ik}^0 w_k^0 = \sum_i a'_{hi} \xi_i \qquad \begin{pmatrix} h=\mathfrak{r}+1,\dots r \\ i=1,2,\dots p \end{pmatrix}$$

ist, so muss $\sum_i a'_{hi} \xi_i$ *gleich* $w_{h-\mathfrak{r}}^0$ *oder gleich Null werden, je nachdem* $h \leqq r$ *oder* $h > r$ *ist. Die gegebenen Grössen* ξ *müssen also, wenn die Gleichungen* $(\mathfrak{G})$ *mit beliebiger Annäherung lösbar sein sollen, nothwendig die Bedingungen erfüllen, dass die* $r-\mathfrak{r}$ *linearen Functionen:*

$$\sum_{i=1}^{i=p} a'_{\mathfrak{r}+1,i} \xi_i \,, \quad \sum_{i=1}^{i=p} a'_{\mathfrak{r}+2,i} \xi_i \,, \dots\dots \sum_{i=1}^{i=p} a'_{ri} \xi_i$$

irgend welche ganzzahlige Werthe, und dass die $p-r$ *linearen Functionen:*

$$\sum_{i=1}^{i=p} a'_{r+1,i} \xi_i \,, \quad \sum_{i=1}^{i=p} a'_{r+2,i} \xi_i \,, \dots\dots \sum_{i=1}^{i=p} a'_{pi} \xi_i$$

den Werth Null haben. Andererseits lassen sich, wenn die gegebenen Grössen ξ *diese Bedingungen erfüllen, die Gleichungen* $(\mathfrak{G})$ *oder* $(\mathfrak{G}^0)$ *stets nach der in den vorhergehenden Paragraphen (§§. 9 bis 12) entwickelten Methode mit beliebiger Annäherung auflösen.*

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen der Lösbarkeit der Gleichungen $(\mathfrak{G})$ *sind hiermit nochmals, aber in einer anderen Form als am Schlusse von §. 12, aufgestellt worden, und zwar namentlich deshalb, um die daraus resultirende Beschränkung der Wahl der Grössen* ξ *ersichtlich zu machen. Es können nämlich, wie sich hier deutlich gezeigt hat, z. B.* $\mathfrak{r}$ *von den Grössen* ξ *ganz beliebig angenommen werden; die Wahl von ferneren* $r-\mathfrak{r}$ *Grössen* ξ *wird dann bloss durch Rationalitäts-Beziehungen beschränkt, aber die noch verbleibenden* $p-r$ *Grössen* ξ *sind auch dem Werthe nach durch die ersten* r *Grössen* ξ *vollständig bestimmt.«*

In diesem Resultate tritt die wesentliche Bedeutung der in den §§. 5 und 7 entwickelten Begriffe des »absoluten« und des »Rationalitäts-

Digitized by Google

Ranges« klar hervor. Denn durch die Bedingungen $(\mathfrak{U}_1)$ und $(\mathfrak{U}_0)$ wird das aufzulösende Gleichungssystem als

»vom (absoluten) Range r und vom Rationalitäts-Range $\mathfrak{r}$«

charakterisirt, und eben dieselben Zahlen r und $\mathfrak{r}$ haben eine maassgebende Bedeutung für den Grad der Verfügbarkeit über die p Grössen ξ, denen die p linearen Functionen:

$$\sum_k a_{ik} w_k \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots p \\ k=1,2,\ldots q \end{pmatrix}$$

durch passende ganzzahlige Werthe von $w_1, w_2, \ldots w_q$ beliebig nahe gebracht werden sollen.

Auch zeigt sich dabei die Analogie, welche zwischen den beiden Rangzahlen (r und $\mathfrak{r}$) eines Gleichungssystems, in Bezug auf ihre Bedeutung für dessen Auflösbarkeit, besteht. Denn während bei dem Problem, die linearen Gleichungen:

$$\sum_k a_{ik} z_k = \xi_i \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots p \\ k=1,2,\ldots q \end{pmatrix}$$

durch irgend welche Werthe der Unbekannten $z_1, z_2, \ldots z_q$ aufzulösen, die Anzahl der ganz beliebig zu bestimmenden Grössen ξ_i gleich dem (absoluten) Range r ist, reducirt sich diese Anzahl bei dem Problem, die Gleichungen:

$$\sum_k a_{ik} w_k = \xi_i \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots p \\ k=1,2,\ldots q \end{pmatrix}$$

näherungsweise in ganzen Zahlen $w_1, w_2, \ldots w_q$ aufzulösen, auf die Zahl $\mathfrak{r}$, welche den Rationalitäts-Rang des Gleichungssystems bezeichnet.

Es darf nicht unerwähnt bleiben, dass in diesem wie im vorhergehenden Paragraphen die Anzahl der Colonnen des transformirten Systems (a^0_{ik}) stets mit demselben Buchstaben q bezeichnet worden ist wie die Anzahl der Colonnen des ursprünglichen Systems (a_{ik}), obgleich aus der Begründung des Satzes $(\mathfrak{S})$ im §. 11 nicht hervorgeht, dass die dortige Colonnentransformation auch so bewirkt werden kann, dass dabei die Anzahl der Colonnen nicht vergrössert wird. Nun ist es zwar für die entwickelten Resultate ohne wesentliche Bedeutung, ob die Anzahl der Colonnen des Systems (a^0_{ik}) gleich derjenigen der Colonnen des Systems (a_{ik}) oder grösser als diese ist. Doch ist auch leicht zu zeigen, dass in der That aus jedem Systeme (a_{ik}) durch Colonnentransformation ein aequivalentes System (a^0_{ik}) gebildet werden kann, welches die in jenem Satze $(\mathfrak{S})$ angegebene Eigenschaft und dabei nicht mehr Colonnen hat als das ursprüngliche System. Man braucht nämlich zu diesem Zwecke nur q^2 ganzzahlige Coefficienten $g_{kk'}$ der am Schlusse von §. 5 angegebenen Colonnentransformation so zu bestimmen, dass deren Determinante gleich *Eins* und zugleich:

$$\sum_k g_k g_{kk'} = \delta_{ik'} \qquad (k, k' = 1, 2, \ldots q)$$

Digitized by Google

wird, wo $g_1, g_2, \ldots g_q$ die im §. 11 angegebene Bedeutung haben; und dies ist stets möglich. Denn wenn man irgend ein System von q^2 ganzen Zahlen bestimmt, in welchem die q Zahlen $g_1, g_2, \ldots g_q$ die erste Zeile bilden, und dessen Determinante gleich *Eins* ist, so kann man für die Zahlen $g_{kk'}$ die q^2 Adjungirten eines solchen Systems nehmen.

§. 14.

In den vorhergehenden Paragraphen ist von der Umwandlung der gegebenen Gleichungen durch Zeilentransformation desshalb nicht Gebrauch gemacht worden, weil sie bei manchen Anwendungen, z. B. bei der Frage der Periodensysteme von Functionen complexer Variabeln, nicht in ihrer vollen Allgemeinheit zulässig ist. Aber eben diese Umwandlung gewährt einige formale Vereinfachungen bei der Deduction, und dies soll hier noch kurz dargelegt werden.

Gemäss den Ausführungen im §. 6 kann aus dem Systeme:

$$(a_{ik}^0) \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots p \\ k=1,2,\ldots q \end{pmatrix}$$

mittels der Zeilentransformation ein aequivalentes System:

$$(b_{ik}^0) \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots p \\ k=1,2,\ldots q \end{pmatrix}$$

abgeleitet werden, welches mit dem ersteren durch die Relationen:

$$\begin{aligned} \sum_i a'_{hi} a^0_{ik} &= b^0_{hk} \qquad \begin{pmatrix} g=1,2,\ldots \mathfrak{r} \\ h=\mathfrak{r}+1,\ldots r \\ i=1,2,\ldots p \\ k=1,2,\ldots q \end{pmatrix} \\ a^0_{gk} - \sum_i a^0_{g,h-\mathfrak{r}} b^0_{hk} &= b^0_{gk} \end{aligned}$$

verbunden ist. Alsdann ist nach §. 13 (U):

$$b^0_{hk} = \delta_{h-\mathfrak{r},k} \qquad \begin{pmatrix} h=\mathfrak{r}+1,\ldots r \\ k=1,2,\ldots q \end{pmatrix}$$

und folglich $b_{gk} = 0$, für $h - \mathfrak{r} = k$, d. h. also für die Werthe $k = 1, 2, \ldots r - \mathfrak{r}$. Da hiernach

$$b^0_{gk} = 0 \qquad \begin{pmatrix} g=1,2,\ldots \mathfrak{r} \\ k=1,2,\ldots r-\mathfrak{r} \end{pmatrix}$$

ist, so resultirt, wenn man

$$\begin{aligned} \sum_i a'_{hi} \xi_i &= \eta_h \qquad \begin{pmatrix} g=1,2,\ldots \mathfrak{r} \\ h=\mathfrak{r}+1,\ldots r \\ i=1,2,\ldots p \end{pmatrix} \\ \xi_g - \sum_h a^0_{g,h-\mathfrak{r}} \eta_h &= \eta_g \end{aligned}$$

setzt, das Gleichungssystem:

$$(\mathfrak{R}^0) \qquad \sum_k b^0_{ik} w^0_k = \eta_i \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots r \\ k=1,2,\ldots q \end{pmatrix},$$

und dieses Gleichungssystem, welches dem Systeme:

$$(\mathfrak{S}^0) \qquad \sum_k a^0_{ik} w^0_k = \xi_i$$

Digitized by Google

im Sinne der Zeilentransformation aequivalent ist, zerfällt vermöge der obigen Gleichung: $b^0_{hk} = \delta_{h-\tau,k}$ in die beiden Systeme:

$$(\mathfrak{R}^0_1) \qquad \sum_k b^0_{gk} w^0_k = \eta_g \qquad \begin{pmatrix} g = 1, 2, \ldots \ldots \tau \\ k = r-\tau+1, \ldots q \end{pmatrix}$$

$$(\mathfrak{R}^0_2) \qquad w^0_{h-\tau} = \eta_h \qquad (h = \tau+1, \ldots r)$$

mit den beiden getrennten Gruppen der Unbekannten:

$$w_{r-\tau+1}, w_{r-\tau+2}, \ldots w_q;$$
$$w_1, w_2, \ldots \ldots \ldots w_{r-\tau}.$$

Das zweite Gleichungssystem $(\mathfrak{R}^0_2)$ drückt nur die Bedingung aus, dass die gegebenen Grössen $\eta_{\tau+1}, \eta_{\tau+2}, \ldots \eta_r$ ganzzahlige Werthe haben müssen; das erste Gleichungssystem $(\mathfrak{R}^0_1)$ hat sowohl den absoluten als auch den Rationalitäts-Rang τ und kann, bei beliebig gegebenen Werthen der τ Grössen η_g, nach der einfachsten, schon im §. 9 vollständig entwickelten Methode in ganzen Zahlen:

$$w_{r-\tau+1}, w_{r-\tau+2}, \ldots w_q$$

mit beliebiger Annäherung aufgelöst werden.

Es ist schliesslich zu bemerken, dass offenbar das erstere System noch dahin vereinfacht werden kann, dass die ersten τ^2 Coefficienten b^0_{gk} ein Einheitsystem bilden.

Digitized by Google

52. Verallgemeinerung der Sätze über die Statik der monocyklischen Systeme.

Von H. von Helmholtz.

(Vorgetragen am 18. December; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. LII]; — ausgegeben am 29. December.)

In meiner Mittheilung vom 6. März d. J. habe ich für gewisse Bewegungen mechanischer Systeme, die ich als monocyklische Bewegungen definirt habe, nachgewiesen, dass sie einem Gesetze folgen, welches dem von Carnot und Clausius für die Wärmebewegung aufgestellten analog ist. Die Systeme und Bewegungen, welche ich monocyklisch genannt habe, lassen zwar eine sehr grosse Mannigfaltigkeit der Bedingungen zu, unter denen sie entstehen; in den von mir gegebenen Beispielen war aber im Allgemeinen vorausgesetzt, dass die besondere Art der Bewegungen hauptsächlich durch feste Verbindungen zwischen den bewegten Theilen unterhalten und die Ausführung anderer Bewegungen mehr oder weniger beschränkt würde. In dieser Beziehung unterscheiden sich die von mir angeführten Fälle solcher Bewegungen wesentlich von den als Grund der Wärmeerscheinungen vorausgesetzten Bewegungen der Atome.

Übrigens ist die Gültigkeit der Bewegungsgleichungen von Lagrange, die meinen Sätzen als Ausgangspunkt dienten, gänzlich unabhängig von der Natur der Kräfte, welche die bewegten Punkte in ihrer Bahn erhalten, ob dabei nun der Gegendruck fester Verbindungen oder Einflüsse aus der Ferne her wirken, wenn nur eben Kräfte von passender Intensität und Richtung da sind. Es müssen sich also diese Sätze verallgemeinern lassen für vollkommen frei bewegliche Systeme. Nur kommt es darauf an die besondere Classe von Bewegungen richtig abzugrenzen, für welche sie gelten sollen.

Nun ist ein wesentliches Kennzeichen der monocyklischen Bewegungen, dass, so lange jede einzelne derselben ungestört weiter geht, nicht nur die Summe der lebendigen Kraft und der potentiellen Energie constant ist, wie in jedem andern conservativen System, sondern auch jeder dieser beiden Summanden für sich. Bei den bisher über die Wärmebewegung aufgestellten Hypothesen ist allerdings immer nur eine annähernde Constanz für die Bewegungen einzelner

Digitized by Google

Atomgruppen angenommen worden, aber immer mit der gleichzeitigen Voraussetzung, dass die Bewegungsformen einer grossen Zahl ähnlicher Atomgruppen sich zeitlich so aneinander fügen, dass die lebendige Kraft des ganzen Systems dauernd denselben Werth behält. Bei den Gasmolekeln schwindet während jedes Zusammenstosses allerdings ein Theil von der lebendigen Kraft der beiden stossenden Molekeln, so viel der zwischen ihnen wachgerufenen potentiellen Energie entspricht. Wenn aber eine Million Molekeln vorhanden sind, so ist, was schwindet, im Mittel nur der millionteste Theil der gesammten lebendigen Kraft des Systems, so dass die Schwankung im Werth der letzteren um so unbedeutender wird, je mehr Theile vorhanden sind. Theils wird dadurch der Bruchtheil um so kleiner, um welchen sie während des einzelnen Stosses abnimmt, theils werden bei grösserer Zahl von Atomen auch die verschiedenen Stadien des Zusammenstosses in dem ganzen Systeme um so gleichmässiger vertheilt auftreten.

Um solche Bewegungen eines mechanischen Systems, bei denen die kinetische Energie (lebendige Kraft) des ganzen Systems fortdauernd constant bleibt, durch eine kurze Bezeichnung unterscheiden zu können, will ich sie isokinetische nennen.

Man nehme an ein System, in welchem nur conservative Kräfte wirken, alle Massenpunkte sich frei unter dem Einfluss dieser Kräfte bewegen, und nur eine einzige Masse durch äussere willkührlich wechselnde Kräfte in einer Lage festgehalten wird, welche während jeder einzelnen isokinetischen Bewegung des Systems unverändert bleibt, von einer zur anderen indessen wechseln kann, aber so, dass die Lage der Masse dabei nur von einer Coordinate p abhängt. Für die Wärmebewegung eines Gases oder einer Flüssigkeit würde also zum Beispiel ein Stempel, der einen Druck ausübt, eine solche ruhende Masse sein. Andererseits sei die Bewegung dadurch zu verändern, dass man bei unveränderter Lage der festen Masse die lebendige Kraft des bewegten Systems ändert.

Es wird vorausgesetzt, dass bei jeder Lage der festen Masse und jedem Werthe der lebendigen Kraft isokinetische Bewegungen möglich sind, welche bei continuirlicher Änderung der Coordinate, die die Lage der festen Masse bestimmt, und continuirlicher Änderung im Werthe der lebendigen Kraft aus continuirlich in einander übergehenden Anfangszuständen hervorgehen können. Übrigens wird nichts geändert in der Gültigkeit des nachher auszusprechenden Theorems, wenn für jeden einzelnen Werth der genannten Coordinate und der lebendigen Kraft verschiedene Arten isokinetischer Bewegung bestehen können, wobei dieselben auch nicht nur verschiedene Zeitabschnitte aus einer und derselben fortlaufenden Bewegung darzustellen brauchen.

Digitized by Google

Es wird ferner vorausgesetzt, dass langsamste Änderungen der Lage der festen Masse und der lebendigen Kraft möglich sind, während welcher die Bewegungsweise des ganzen Systems sich nur in verschwindender Weise von einer solchen entfernt, welche unter den gerade stattfindenden Umständen sich isokinetisch fortsetzen könnte.

Um nun die beiden Formen des Hamilton'schen Satzes auf die Variation der Bahnen anwenden zu können, muss man für jede Reihe von Veränderungen, die vor sich gehen soll, annehmen, dass während derselben der potentiellen Energie Φ passende Zusätze gemacht werden, die Functionen der Coordinate p der ruhenden Masse sind, und durch ihre Differentialquotienten nach p die zur Erhaltung des Gleichgewichts dieser Masse nöthigen Kräfte ergeben.

Wenn man von einer Reihe der Variationen zur andern übergeht, muss natürlich in derjenigen Bahn, welche beiden gemeinsam ist, der für die eine wie für die andere Reihe gemachte Zusatz für Φ denselben Differentialquotienten nach p, d. h. dieselbe Kraft ergeben, und seine Constante kann auch so bestimmt werden, dass die Werthe von Φ in beiden Reihen dieselben bleiben, damit beide Reihen hier continuirlich an einander schliessen.

Wenn ich die lebendige Kraft während einer bestimmten isokinetischen Bahn mit L bezeichne, die Zeit mit t, so ist das eine Hamilton'sche Integral:

$$W = \int_0^t (\Phi - L)\, dt.$$

Dieses Integral, berechnet für die wirklich ausgeführte Bahn zwischen den gegebenen Endpunkten, ändert im Allgemeinen seinen Werth, wenn der eine oder andere Endpunkt geändert wird, während die Zeit unverändert bleibt, aber man kann den Übergang in eine benachbarte Bahn so machen, dass weder die Lagenänderung des einen noch des andern Endpunkts den Werth von W verändert, und also auch beide Änderungen gleichzeitig ausgeführt, es nicht thun. Ich will diese Änderung der Endlagen der Bahn kurzweg als eine orthogonale bezeichnen, da sie angewendet auf die Bewegung eines einzelnen Massenpunktes in der That eine solche ist.

Nun lässt sich nachweisen, dass bei langsamster Ausführung einer solchen Änderung die auf die Verstärkung der inneren Bewegung zu verwendende Arbeit auf die Form gebracht werden kann;

$$dQ = 2L \cdot d \log (L \cdot t).$$

Der Factor t unter dem Logarithmus könnte in diesem Falle auch weggelassen werden, da für diese Art der Bahnänderung $dt = 0$.

Digitized by Google

Die andere Form des HAMILTON'schen Integrals erhalten wir, wenn wir

$$L \cdot dt^2 = ds^2$$

setzen, und ds^2 mittels dieser Gleichung als homogene Function zweiten Grades der Differentiale der gewählten Coordinaten ausdrücken. Dann ist

$$U = \int \sqrt{2(E - \Phi)} \cdot ds$$

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{2(E - \Phi)}}$$

$$dU = 2L \cdot dt .$$

Bei den Variationen dieses Integrals muss die Grösse E constant gehalten werden, wie bei dem früheren das t. Wir können wieder orthogonale Übergänge, aber nun in anderer Richtung ausgeführt, dadurch definiren, dass wir erst die eine, dann die andere Endlage so ändern, dass der Werth von U ungeändert bleibt; dann beide gleichzeitig wodurch wir in eine benachbarte Bahn mit gleichem Werthe von E übergehen.

Die Arbeit, welche auf Verstärkung der inneren Bewegung bei diesem Übergange gerichtet werden muss, ist

$$dQ = 0.$$

Dieser selbe Werth wird aber in diesem Falle auch gegeben durch die obige Formel

$$dQ = 2L \cdot d \cdot \log (L \cdot t),$$

da für die hier vorausgesetzten isokinetischen Bewegungen

$$W = 2L \cdot t$$

ist und bei der beschriebenen Art des Überganges der Werth von W unverändert bleiben soll. Man kann auch verschwindend kleine Änderungen in beiden Richtungen gleichzeitig machen, und dadurch beliebige Verhältnisse zwischen dE und dp herbeiführen.

Die früher von den HH. BOLTZMANN und CLAUSIUS für beschränktere Annahmen gefundenen Werthe des dQ stimmen dem wesentlichen Sinne nach mit dem hier gegebenen überein.

Dass bei monocyklischen Systemen das an Stelle des $L \cdot t$ tretende Moment der Bewegung damit übereinstimmenden Sinn hat, wenn man t für orthogonal abgeschnittene Wege berechnet, ergiebt sich leicht.

Die vollständige Ausführung dieses Beweises behalte ich mir vor, später zu geben.

Digitized by Google

In Bezug auf meine früheren Veröffentlichungen habe ich noch eine Lücke auszufüllen, betreffend die durch Fesselung polycyklischer Systeme zu gewinnenden monocyklischen, auf die ich bei der hier vorgelegten Fortsetzung der Untersuchungen aufmerksam wurde. Es kam mir dort nur darauf an, nachzuweisen, dass es eine grosse Mannigfaltigkeit von Systemen giebt, die einem Gesetze analog dem von Carnot folgen, und ich habe die Bedingungen herauszustellen gesucht, welche zu dem Zwecke erfüllt sein müssen. Leider habe ich unterlassen zu bemerken, dass nicht nothwendig alle Systeme, in denen alle anderen Geschwindigkeiten Functionen von einer unter ihnen und den Coordinaten sind, wie ich das für das gefesselte System verlangte, eine Entropiefunction haben. Wo aber die von mir für die Fesselung aufgestellten Bedingungen erfüllt sind, da ist eine solche vorhanden, und wenn ausser der Geschwindigkeit nur eine variable Coordinate vorkommt, ist immer eine Entropiefunction vorhanden. Deshalb widerspricht jenes Vorkommen nicht entropischer Systeme auch dem heut aufgestellten Theoreme nicht.

Auch muss ich den Schlussatz von §. 1 meiner ersten Mittheilung vom 6. März d. J. in ähnlichem Sinne beschränken. Für zwei Variable, nämlich η und ein p ist er richtig; für mehr Variable muss aber eine bestimmte physikalische Beziehung erfüllt sein, wenn er gelten soll.

Digitized by Google

Digitized by Google

53. Eine neue Methode zur Bestimmung der Gravitationsconstante.

Von Arthur König und Franz Richarz.

(Vorgelegt von Hrn. von Helmholtz am 18. December; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. LII]; — ausgegeben am 29. December.)

Die älteren Versuche zur Bestimmung der Gravitationsconstante benutzen das Pendel und die Drehwaage als Messinstrumente. Beide Apparate werden aber an Genauigkeit in Bezug auf diese Messungen bei weitem übertroffen von der Waage, welche zuerst von Hrn. von Jolly[1] auf Probleme der Gravitation angewandt ist. Er aequilibrirte eine und dieselbe Masse einmal durch Aufsetzen von Gewichtsstücken auf eine in gleicher Höhe befindliche Waagschale, ein anderesmal durch Aufsetzen von Gewichtsstücken auf eine 21^m tiefer befindliche mit jener oberen durch einen Draht verbundenen Waagschale. Die Differenz ergab die Abnahme der Schwere mit der Höhe. Er baute dann unterhalb der unteren Schale eine 5775^{kgr} schwere Bleikugel auf und bestimmte wiederum die entsprechende Differenz. Die Zunahme derselben ergab die Attraction der Bleikugel auf die Gewichte in der unteren Schale, da bis zur oberen Schale, wie der Versuch ergab, die Bleikugel keine messbare Wirkung ausübte. Die wesentlichsten Fehlerquellen sind die durch die Höhe des Beobachtungsraumes unvermeidlichen Temperaturdifferenzen, sowie die durch Luftströmungen an dem 21^m langen Drahte verursachte Reibung.

Gänzlich unabhängig von einander sind wir beide auf eine Methode gekommen, bei welcher die vierfache Attraction der benutzen Bleimasse zur Messung durch die Waage gelangt und überdies Temperaturdifferenzen und Luftströmungen fast völlig vermieden werden können.

In der Mitte der horizontalen Oberfläche eines parallelepipedischen Bleiklotzes ist eine Waage so aufgestellt, dass ihre Schalen möglichst nahe über der Oberfläche schweben. Unter jeder Schale ist der Bleiklotz vertical durchbohrt und vermöge zweier durch diese Löcher führenden Stangen sind an den oberen Schalen zwei andere Schalen so angehängt, dass sie sich dicht unterhalb des Klotzes befinden.

[1] Ph. von Jolly, Abh. d. kön. bayer. Akad. d. Wiss. II. Cl. Band XIII und XIV und Wied. Ann. Band XIV.

Digitized by Google

Eine Masse m auf der Schale rechts oben wird durch Gewichtsstücke m_u in der Schale links unten in's Gleichgewicht gebracht. Dieselbe Masse m wird dann auf die Schale rechts unten gesetzt und mit Gewichtsstücken m_o auf der Schale links oben aequilibrirt. Nehmen wir zur Vereinfachung der nachfolgenden schematischen Berechnung an, der absolute Werth der verticalen Componente der beschleunigenden Kräfte, welche der Klotz am Orte der oberen und unteren Schalen ausübt, sei derselbe; er werde mit k bezeichnet. Nennen wir g_o resp. g_u den Werth der Schwere am Orte der oberen resp. der unteren Schalen, so gelten für die beiden Wägungen die Gleichungen:

$$m(g_o + k) = m_u(g_u - k),$$
$$m(g_u - k) = m_o(g_o + k).$$

Daraus folgt:

$$\delta_m = m_u - m_o = m\frac{(g_o+k)^2 - (g_u-k)^2}{(g_o+k)(g_u-k)}.$$

Setzen wir nun $g_u = g_o + \gamma$, so wird, wenn man beachtet, dass k und γ gegen g_o sehr klein sind:

$$\delta_m = \frac{2m}{g_o}(2k - \gamma).$$

Die Grösse γ ist zu bestimmen durch Wägungen, welche an derselben Waage in gleicher Weise vor Aufbau des Bleiklotzes ausgeführt sind. Es ist für zwei solche Wägungen, wenn wir unter m dieselbe Masse wie oben verstehen, und m_u' resp. m_o' den obigen Werthen m_u resp. m_o entsprechen:

$$mg_o = m_u'g_u,$$
$$mg_u = m_o'g_o.$$

Daraus folgt:

$$\delta_m' = m_o' - m_u' = m\frac{g_u^2 - g_o^2}{g_u g_o}.$$

Setzen wir nun wieder

$$g_u = g_o + \gamma,$$

so wird:

$$\delta_m' = \frac{2\gamma}{g_o}m.$$

Also

$$\gamma = \frac{\delta_m' g_o}{2m}.$$

Führen wir diesen Werth in den Ausdruck für δ_m ein, so ergiebt sich:

Digitized by Google

$$\delta_m = \frac{2m}{g_0}\left(2k - \frac{\delta'_m g_0}{2m}\right)$$
$$= \frac{4mk}{g_0} - \delta'_m .$$

Demnach ist

$$k = \frac{g_0}{4m}(\delta_m + \delta'_m) .$$

Wir erhalten also k aus den zu messenden Grössen g_0, m, δ_m und δ'_m, wobei für die Beurtheilung der Genauigkeit darauf hingewiesen werde, dass δ_m und δ'_m beide positiv sind.

Ist nun V das Potential des Bleiklotzes, G die Gravitationsconstante, z die verticale Coordinate, so ist

$$k = G\frac{\partial V}{\partial z} .$$

Der Differentialquotient $\frac{\partial V}{\partial z}$ lässt sich aus den bekannten Dimensionen des Parallelepipeds und dem Orte der Schalen berechnen; unsere Beobachtungen ergeben also die Gravitationsconstante G und damit auch die mittlere Dichtigkeit der Erde.

Es sind von uns bereits die einleitenden Schritte zur experimentellen Ausführung dieser Methode geschehen. Wir gedenken eine Bleimasse zur Anwendung zu bringen, welche etwa die doppelte Attraction der von Hrn. von Jolly benutzten Kugel ausübt; die Bestimmung der Grösse k könnte also von uns unter sonst gleichen Umständen bereits mit der achtfachen Sicherheit ausgeführt werden. Überdies sind wir bei dem bedeutend kleineren Abstand der oberen von den unteren Waagschalen ($1\frac{1}{2}$ bis 2^m) in der Lage, die Vertauschung der Gewichtsstücke innerhalb eines geschlossenen Kastens durch eine automatische Vorrichtung auszuführen, wodurch Temperaturunterschiede und Luftströmungen fast völlig vermieden werden. Wir können also mit Gewissheit eine erheblich grössere Genauigkeit unserer Bestimmung erwarten.

Digitized by Google

Digitized by Google

54. Beiträge zur Kenntniss der Coniin-Gruppe.

Von A. W. Hofmann.

(Erster Theil. Vorgetragen am 10. Januar; — gedruckt im Bericht vom 18. December [St. LII]; — ausgegeben am 29. December.)

Spaltungsproducte des Conydrins.

Als ich vor etwa drei Jahren der Akademie eine Reihe von Versuchen über das Coniin mittheilte[1], aus denen hervorging, dass diese Base nicht, wie man bisher allgemein angenommen hatte, durch die Formel

$$C_8H_{15}N,$$

sondern durch den Ausdruck

$$C_8H_{17}N$$

dargestellt werde, welcher die Homologie des Coniins mit dem Piperidin enthüllte, bemerkte ich bereits, dass nunmehr, im Hinblick auf dieses Ergebniss, auch das Conydrin eine neue Untersuchung erheische.

Bekanntlich hat Wertheim[2] in der Schierlingpflanze neben dem Coniin eine krystallisirte, sauerstoffhaltige, flüchtige Base entdeckt, für welche er die Formel

$$C_8H_{17}NO$$

aufgestellt hat, ein Ausdruck, welcher diesen Körper als eine Art Hydrat des Coniins (mit 15 Atomen Wasserstoff im Mol. gedacht) erscheinen liess, daher denn auch der für denselben gewählte Name Conydrin.

In der That hat auch Wertheim im Sinne dieser Auffassung das Verhalten des Conydrins unter dem Einflusse wasserentziehender Mittel studirt. Er liess nämlich Phosphorsäureanhydrid bei 100° in einer Wasserstoffatmosphäre auf dasselbe einwirken und erhielt in dieser Reaction eine Base, welche er durch das Studium der physikalischen und physiologischen Eigenschaften sowohl, als durch die Analyse des salzsauren Salzes mit dem direct aus der Schierlingpflanze dargestellten Coniin identificirt zu haben glaubte.

[1] Hofmann, Monatsberichte 1881, 363.
[2] Wertheim, Lieb. Ann. C. 328.

Digitized by Google

Angesichts des für das letztere, wie ich überzeugt bin, unzweifelhaft festgestellten höheren Wasserstoffgehaltes[1] nahm nun, wie auch bereits in einer Note zu der citirten Abhandlung[2] angedeutet wurde, die hier zu lösende Frage folgende Form an:

Entweder die von WERTHEIM für das Conydrin angenommene Formel ist nicht die richtige, und dieser Körper enthält, ebenso wie das Coniin, 2 Atome Wasserstoff mehr, als man bisher angenommen hatte, so dass also die von WERTHEIM beobachtete Reaction nach der Gleichung

$$C_8H_{19}NO = C_8H_{17}N + H_2O$$

verlaufen wäre.

Oder aber die bisher angenommene Formel des Conydrins hätte ihre Richtigkeit, und die durch Phosphorsäureanhydrid gebildete Base wäre verschieden von dem direct aus dem Schierling erhaltenen Coniin und besässe wirklich die Zusammensetzung, welche man demselben so lange zugeschrieben hat; die Reaction wäre dann gerade, wie es WERTHEIM angenommen hat, verlaufen, nämlich nach der Gleichung

$$C_8H_{17}NO = C_8H_{15}N + H_2O.$$

Oder endlich die Conydrinformel wäre richtig und gleichwohl das in der Reaction gebildete Coniin das gewöhnliche mit 17 Atomen

---

[1] Ich bin im Laufe dieser neuen Untersuchungen noch mehrfach auf die Analyse des Coniins zurückgekommen. Stets wurden Zahlen erhalten, welche unzweideutig für den höheren Wasserstoffgehalt sprechen.

Coniin.

	Theorie				Versuch
C_8	96	76.80	C_8	96	75.59	76.16
H_{15}	15	12.00	H_{17}	17	13.38	13.74
N	14	11.20	N	14	11.03	—
	125	100.00		127	100.00	

Salzsaures Coniin.

		Theorie				Versuch			
C_8	96	59.44	C_8	96	58.72	58.37	59.18	58.94	—
H_{16}	16	9.90	H_{18}	18	11.01	10.80	11.12	11.03	—
N	14	8.68	N	14	8.57	—	—	—	—
Cl	35.5	21.98	Cl	35.5	21.70	—	—	—	21.68
	161.5			163.5	100.00				

Bromwasserstoffsaures Coniin.

	Theorie				Versuch
C_8	96	46.60	C_8	96	46.15	46.57
H_{16}	16	7.76	H_{18}	18	8.65	8.61
N	14	6.80	N	14	6.74	—
Br	80	38.82	Br	80	38.46	—
	206	100.00		208	100.00	

[2] HOFMANN, Monatsberichte 1881, 371.

Digitized by Google

Wasserstoff: dieses würde dann nur in verwickelter Reaction unter gleichzeitiger Bildung anderweitiger Producte haben entstehen können.

Ich würde nicht in der Lage gewesen sein, die Lösung dieser Frage auch nur zu versuchen, wenn ich nicht durch die Güte des Hrn. WILH. MERCK in Darmstadt im Laufe der letzten Jahre wiederholt mit reichlichen Mengen von Conydrin ausgestattet worden wäre, für die ich ihm meinen besten Dank ausspreche. Das in dem Laboratorium der MERCK'schen Fabrik als Nebenproduct bei der Darstellung des Coniins gewonnene Conydrin hatte alle Charaktere eines chemisch reinen Körpers und konnte alsbald für die Zwecke des Versuches Verwendung finden. Der sorgfältigen Beschreibung, welche WERTHEIM von den Eigenschaften des Conydrins gegeben hat, habe ich nur noch hinzuzufügen, dass diese Base ein gut krystallisirtes, aber zerfliessliches, salzsaures Salz bildet und dass sie, mit Benzoylchlorid behandelt, ein aus Alkohol krystallisirbares Benzoylderivat liefert, welches bei 132° schmilzt. Der Schmelzpunkt des MERCK'schen Conydrins wurde bei 120° beobachtet; der Siedepunkt liegt bei 226°. WERTHEIM[1] giebt den ersteren zu 120.6°, letzteren zu 224.45° unter einem Druck von 0.719^{m}.

WERTHEIM hat die Zusammensetzung des Conydrins durch die Analyse des Platindoppelsalzes festgestellt. Im Folgenden sind die Ergebnisse seiner Analyse mit den Werthen der beiden Formeln, welche hier in Betracht kommen, verglichen:

	$C_8H_{17}NO$	$C_8H_{19}NO$	Versuch (Mittel)
Kohlenstoff....	27.50	27.35	27.57
Wasserstoff ...	5.15	5.69	5.31
Stickstoff	4.01	3.99	4.55
Platin	28.22	28.06	28.05.

Es lässt sich nicht verkennen, dass das Ergebniss der Analyse, zumal der ermittelte Wasserstoffgehalt, besser mit der von WERTHEIM gewählten Formel als mit derjenigen übereinstimmt, welche man im Hinblick auf die neue Coniinformel geneigt sein könnte, für das Conydrin anzunehmen.

Ungleich entscheidendere Ergebnisse aber mussten bei der Analyse des Conydrins selber, welche bisher nicht ausgeführt worden war, gewonnen werden. Für diese Analyse war das aus der MERCK'schen Fabrik stammende Product zuvor noch aus Wasser umkrystallisirt worden. Die Zahlen, welche man erhielt, bestätigen in unzweideutiger Weise die WERTHEIM'sche Formel, wie die folgende Zusammenstellung zeigt:

[1] WERTHEIM, Wiener Akad. Ber. XLVII. 299.

Digitized by Google

	$C_8H_{17}NO$	$C_8H_{19}NO$	Versuch I.	Versuch II.	Versuch III.
Kohlenstoff	67.13	66.20	66.71	66.72	66.47
Wasserstoff	11.88	13.10	11.88	11.89	11.92.

Es sind zumal die Wasserstoffbestimmungen, welche hier als entscheidend gelten müssen. Die Formel

$$C_8H_{17}NO$$

erscheint demnach als endgültig festgestellter Ausdruck für die Zusammensetzung des Conydrins. Hiermit hat allerdings der Name *Conydrin* seine Bedeutung verloren; man könnte den Körper *Conoxin* oder *Oxyconiin* nennen; ich will aber den gebräuchlichen Namen bis auf Weiteres beibehalten. Wenn man die Coniingruppe vollständiger erforscht haben wird, als es bisher gelungen, wird man sich wohl ohnedies zu einer Umgestaltung ihrer Nomenclatur bequemen müssen.

Es blieb nunmehr noch übrig, den Wertheim'schen Versuch der Entwässerung des Conydrins zu wiederholen. Derselbe wurde zunächst genau nach dem von ihm angegebenen Verfahren mittelst Phosphorsäureanhydrid ausgeführt. Die Spaltung lässt sich indessen bequemer durch Behandlung mit concentrirter Salzsäure bewerkstelligen. Es entsteht auf diese Weise in der That ein flüchtiges Öl von stark basischen Eigenschaften, welches täuschend den Geruch des Coniins besitzt. Bei näherer Untersuchung zeigt es sich jedoch, dass dieses Öl weit davon entfernt ist, ein einheitlicher Körper zu sein.

Diese Untersuchung, deren Einzelheiten auf den folgenden Blättern verzeichnet sind, lehrt, dass es zum wenigsten zwei, vielleicht sogar drei, von einander verschiedene, coniinartige Basen enthält, welche durch die Formel

$$C_8H_{15}N$$

dargestellt werden, also die Zusammensetzung besitzen, welche früher dem Coniin zugeschrieben wurde. Die Umbildung des Conydrins erfolgt also ganz im Sinne der Wertheim'schen Auffassung nach der bereits oben gegebenen Gleichung

$$C_8H_{17}NO = C_8H_{15}N + H_2O,$$

nur mit dem Unterschiede, dass das basische Product kein Coniin ist, wie Wertheim, durch die damals ganz allgemein als festgestellt betrachtete Formel des Coniins sowie durch die täuschende Ähnlichkeit mit der flüssigen Schierlingbase verleitet, angenommen hatte, sondern im Wesentlichen aus zwei wasserstoffärmeren Basen besteht, welche mit einander isomer sind. Ich schlage für diese Basen die Bezeich-

Digitized by Google

nung Coniceïne vor, welche sich an den in Frankreich üblichen Namen der Schierlingbase (*Conicine*) anschliesst, und unterscheide die beiden Modificationen als α- und β-Coniceïn.

Einwirkung der Chlorwasserstoffsäure auf das Conydrin.

Die Spaltung des Conydrins mit Salzsäure nimmt etwa vier Stunden lang eine Temperatur von 220° in Anspruch. Geeignete Verhältnisse sind 4 Th. rauchende Salzsäure auf 1 Th. Conydrin. Ein Rohr kann mit beiläufig 20^g der Lösung beschickt werden. Durch Übersättigung der salzsauren Flüssigkeit mit einem Alkali wurden die Basen in Freiheit gesetzt und konnten als ölige Schicht abgehoben werden. Bei der Destillation dieser Flüssigkeit blieb aber stets eine kleine Menge salzsaurer Salze zurück, welche in dem Öl aufgelöst war. Man fand es daher zweckmässiger, die Basen zunächst mit Wasserdampf überzutreiben. Sie schwammen als farblos-durchsichtige Schicht von starkem Coniingeruch auf dem Wasser. Ein gegen Ende der Destillation mit Wasserdampf im Halse der Retorte sich ausbreitendes leichtes Krystallnetz zeigte, dass bei der Digestion mit Salzsäure meist ein wenig Conydrin unverändert bleibt. Etwas Conydrin wurde auch noch beobachtet, als die Basen im Scheidetrichter von dem Wasser getrennt und nach der Entwässerung mit Kalihydrat destillirt wurden. Die Flüssigkeit begann bei 150° zu sieden, bei Weitem der grössere Theil ging zwischen 155° und 175° über, der Siedepunkt stieg dann schnell auf 226°, die Siedetemperatur des Conydrins. Kleine Mengen siedeten schliesslich bei noch viel höherer Temperatur.

Beim Sättigen der Hauptfraction (155°—175°) mit Salzsäure liessen sich alsbald zwei krystallisirbare Salze, ein zerfliessliches und ein nicht zerfliessliches, unterscheiden; man erkannte aber auch gleichzeitig, dass sich auf die geringe Verschiedenheit der Löslichkeit beider hin eine Trennung nicht werde bewerkstelligen lassen.

α-Coniceïn. Diese Trennung gelang aber, als man das Basengemenge in Pikrate verwandelte. Es entstand ein weicher Krystallbrei, welcher sich bei der Behandlung mit Alkohol in ein schwer lösliches und in ein leicht lösliches Salz scheiden liess.[1] Das in kaltem Alkohol schwer lösliche, in Wasser nahezu unlösliche Salz lässt sich

[1] Bei dieser Gelegenheit ist auch das Verhalten des Coniins zur Pikrinsäure geprüft worden. Das pikrinsaure Coniin fällt beim Vermischen der Bestandtheile als Öl, welches nicht krystallisirt erhalten werden konnte. In Alkohol ist die Verbindung leicht löslich.

Digitized by Google

aus heissem Alkohol umkrystallisiren. Aus letzterem setzt es sich beim Erkalten in Form gelber Nadeln ab, welche bei 225° unter Zersetzung schmelzen. Nach mehrfachem Umkrystallisiren ändert sich dieser Schmelzpunkt nicht mehr.

Statt der Pikrinsäure kann man sich auch mit Vortheil des Quecksilberchlorids zur Trennung des Gemisches bedienen. Versetzt man die salzsauren Salze mit einem Überschusse von Quecksilberchlorid, so entsteht eine reichliche krystallinische Fällung. Beim Kochen mit Wasser löst sich ein grosser Theil derselben auf; ein sehr erheblicher Theil bleibt ungelöst. Das schwerlösliche Salz enthält dieselbe Base, welche in dem krystallisirten Pikrate vorhanden ist.

Die Entstehungsweise der in diesem Pikrate und dem schwer löslichen Quecksilbersalze vorhandenen Base deutete mit grosser Wahrscheinlichkeit auf die Formel

$$C_8H_{15}N,$$

welche auch in der Analyse des Pikrates alsbald eine Bestätigung fand. Der Formel

$$C_8H_{15}N \,.\, C_6H_3N_3O_7 = C_{14}H_{18}N_4O_7$$

entsprechen folgende Werthe:

		Theorie	Versuch	
C_{14}	168	47.45	47.03	—
H_{18}	18	5.09	5.06	—
N_4	56	15.82	—	15.75
O_7	112	31.64	—	—
	354	100.00		

Für die Analyse war das Salz bei 100° getrocknet worden.

Die in dem Pikrate enthaltene Base will ich in weiterer Ausführung des bereits oben gemachten Vorschlags mit dem Namen α-Coniceïn bezeichnen.

Das α-Coniceïn lässt sich aus dem Pikrat mittelst Natronhydrat in Freiheit setzen. Man kann die Base mit Wasserdampf übertreiben; vorzuziehen ist es jedoch, dieselbe mit Äther auszuziehen, da die dieser Gruppe angehörigen Basen beim Kochen mit alkalischer Pikrinsäure-Lösung leicht eine Veränderung erleiden können. War die Base als Quecksilberverbindung gefällt worden, so hat man es nach Entfernung des Quecksilbers durch Schwefelwasserstoff mit einem Chlorhydrate zu thun, welches ohne Weiteres mit Alkali zersetzt werden kann.

Die mittelst Kalihydrat und schliesslich mit Ätzbaryt entwässerte Base siedete bei 155—156°. Bei der Analyse wurden Zahlen erhalten, welche unzweifelhaft auf die Zusammensetzung der in dem Pikrat angenommenen Base hindeuteten, aber auch zeigten, dass sich auf

Digitized by Google

dem angegebenen Wege die Base nicht wasserfrei erhalten lässt. Es wurden Werthe gefunden, welche ungefähr eine Base mit 2 Procent Wasser andeuten.[1]

Erst nach fünfstündigem Sieden über Ätzbaryt und schliesslich über Natrium liessen sich die letzten Spuren Wasser, doch immer nur mit Schwierigkeit, entfernen. Der Siedepunkt stieg hierbei noch um ein Weniges, nämlich auf 158°. Bei der Analyse wurden nunmehr Zahlen erhalten, welche der Formel $C_8H_{15}N$ entsprechen.

	Theorie		Versuch	
C_8	96	76.80	76.92	—
H_{15}	15	12.00	12.03	—
N	14	11.20	—	11.65
	125	100.00.		

Das α-Coniceïn ist eine farblose, in Wasser schwer lösliche Flüssigkeit, welche sich an der Luft nicht verändert; Monate lang aufbewahrt, ist die Base vollkommen farblos geblieben. Im wasserfreien Zustande übt die Base auf Pflanzenfarben keine Wirkung: die wässerige Lösung reagirt stark alkalisch. Der Geruch ist von dem des Coniins nicht zu unterscheiden.

Auch in seinen physiologischen Eigenschaften gleicht das α-Coniceïn dem Coniin. Schon WERTHEIM[2] hatte gefunden, dass das durch Entwässerung des Conydrins entstehende Product, welches er für Coniin hielt, auf den thierischen Organismus ähnlich wirke, wie das Coniin. Hr. Prof. HUGO KRONECKER hat die Güte gehabt, mit dem reinen α-Coniceïn einige Versuche anzustellen, auf welche ich weiter unten zurückkommen werde. Nach seinen Beobachtungen wirkt das α-Coniceïn schon bei weit geringeren Dosen als das Coniin tödtlich.

In einer Mischung von Äther und fester Kohlensäure, welche die Temperatur — 35° zeigte, waren 10—15 α-Coniceïn krystallinisch erstarrt; beim Steigen der Temperatur hatten sich die letzten Krystalle bei — 16° wieder verflüssigt. Schmelzpunkt und Erstarrungspunkt des Coniins, welches bei derselben Gelegenheit geprüft wurde, scheinen bei — 25° zu liegen. Diese Zahlen sind aber nur Annäherungswerthe.

Das Volumgewicht der flüssigen Base ist 0.893 bei 15°. Im Anilindampf bestimmt ergab sich das Gasvolumgewicht zu 62 auf

---

	$C_8H_{15}N$ mit 2 Procent Wasser	Versuche				Mittel
[1] Kohlenstoff.....	75.0	74.49	74.99	75.02	75.56	75.26
Wasserstoff.....	12	11.97	11.98	12.01	12.04	11.98

[2] WERTHEIM, LIEB. Ann. C. 337.

Digitized by Google

Wasserstoff oder zu 4.29 auf Luft bezogen. Die Theorie verlangt $\frac{125}{2} = 62.5$ auf Wasserstoff oder 4.31 auf Luft bezogen.

Es schien erwünscht, die Zusammensetzung des α-Coniceïns durch die Analyse einiger Salze zu bestätigen.

Das *salzsaure Salz* krystallisirt in regelmässigen sechsseitigen Tafeln, welche aber mit Begierde Wasser aus der Luft anziehen und zerfliessen. Es ist daher zur Analyse nur wenig geeignet.

Auch das *Platinsalz* ist leicht löslich, scheidet sich aber aus concentrirter Flüssigkeit beim Erkalten in grossen, gelben rhombischen Säulen aus. Die Analyse des bei 100° getrockneten Salzes ergab 29.74 Procent Platin; die Formel

$$2\,(C_8H_{15}N.HCl)\,PtCl_4$$

verlangt 29.75 Procent.

Das *Goldsalz* bildet schwer lösliche gelbe Nadeln, welche sich bei 100° allmählich zersetzen und daher *in vacuo* getrocknet werden müssen. Der Formel

$$C_8H_{15}N.\,HCl.\,AuCl_3$$

entsprechen folgende Werthe:

	Theorie		Versuch		
C_8	96	20.65	20.53	—	—
H_{16}	16	3.44	3.49	—	—
N	14	3.01	—	—	—
Au	197	42.36		42.27	42.51
Cl_4	142	30.54	—		
	465	100.00			

Auch mit Zinnchlorid bildet das α-Coniceïn eine krystallinische Verbindung, welche aber sehr löslich ist.

Bei der Behandlung mit Brom und Alkali entsteht eine schwer lösliche krystallinische Verbindung, die nicht weiter untersucht worden ist.

Das α-Coniceïn ist eine tertiäre Base. Mit Jodmethyl zusammengebracht erwärmt sie sich, und beim Erkalten entstehen Krystalle, welche äusserst löslich in Wasser und in Alkohol sind. Aus absolutem Alkohol, dem man etwas wasserfreien Äther zugemischt hat, lassen sie sich umkrystallisiren. Man erkannte unschwer, dass das Jodid einer Ammoniumbase

$$C_8H_{15}N.\,CH_3I$$

vorlag. Diese Formel verlangt 47.56 Procent Jod; gefunden wurden nach der Carius'schen Methode 47.28 Procent. Durch Kochen mit Silberchlorid wurde aus dem Jodide das entsprechende Chlorid gewonnen,

Digitized by Google

und aus diesem das Platinsalz als hellgelbes, ziemlich schwer lösliches Pulver erhalten. Die Analyse gab 28.48 Procent Platin; der Formel

$$2(C_8H_{15}N.CH_3Cl)\,PtCl_4$$

entsprechen 28.55 Procent.

Mit Silberoxyd behandelt lieferte das Jodid das stark alkalische Hydroxyd, welches alle Charaktere einer freien Ammoniumbase zeigte. Bei der Destillation wurden mehrere flüchtige Basen erhalten. Die Reaction scheint ähnlich zu verlaufen, wie ich es bei den dimethylirten Abkömmlingen des Piperidins[1] und Coniins[2] beobachtet habe. Die Operation wurde aber nicht in hinreichendem Maassstabe ausgeführt, um den Process ins Einzelne verfolgen zu können. Nur so viel wurde festgestellt, dass sich unter den bei der Destillation gebildeten Basen auch wieder α-Coniceïn befindet, welches an der Bildung des charakteristischen Pikrates ohne Mühe erkannt wurde.

Das α-Coniceïn lässt sich aus dem Conydrin noch auf einem anderen Wege gewinnen. Weiter unten wird des Jodhydrats einer jodhaltigen Base,

$$C_8H_{16}IN.HI,$$

gedacht werden, welche sich bei der Einwirkung concentrirter Jodwasserstoffsäure auf Conydrin bildet. Erhitzt man dieses Jodhydrat mit Natronlauge zum Sieden, so geht mit den Wasserdämpfen α-Coniceïn über.

$$C_8H_{16}IN.HI + 2NaHO = C_8H_{15}N + 2H_2O + 2NaI.$$

Die so gebildete Base wurde mit der bei der Einwirkung der Salzsäure entstehenden durch Darstellung des schwerlöslichen Pikrats vom Schmelzpunkte 225° identificirt.

Umwandlung des Coniins in α-Coniceïn.

Das α-Coniceïn kann auch aus dem Coniin gewonnen werden. Mischt man 1 Mol. salzsaures Coniin und 1 Mol. Brom, so entsteht auf Zusatz von Alkali ein Bromderivat, welches 1 At. Brom in der Imidgruppe enthält,

$$C_8H_{16}NH + BrBr + NaOH = C_8H_{16}NBr + NaBr + H_2O.$$

Durch geeignete Behandlung mit Schwefelsäure verwandelt sich dieses Bromderivat in Bromwasserstoffsäure und α-Coniceïn.

$$C_8H_{16}NBr = HBr + C_8H_{15}N.$$

Ich komme auf diese Umbildung weiter unten ausführlicher zurück.

---

[1] HOFMANN, Monatsberichte 1881, 288.

[2] HOFMANN, a. a. O., 363.

Digitized by Google

Rückbildung des Coniins aus α-Coniceïn.

Angesichts der eben erwähnten Bildungsweise des α-Coniceïns lag der Gedanke nahe, letzteres wieder in Coniin zurückzuverwandeln. Das zum Versuch verwendete α-Coniceïn war aus Conydrin gewonnen. In Berührung mit Wasser und Natriumamalgam wurde keine Wasserstoffaddition beobachtet. Als aber α-Coniceïn mit einem grossen Überschusse von concentrirter Jodwasserstoffsäure (Vol. Gew. 1.96) und etwas gewöhnlichem Phosphor vier bis fünf Stunden lang im Einschlussrohr bei 200° digerirt wurde, liess sich die Umwandlung in Coniin mit Sicherheit constatiren, obwohl sich stets nur kleine Mengen bilden. Aus dem Jodide wurden die Basen mit Alkali in Freiheit gesetzt, in Äther aufgenommen und der ätherischen Lösung mit Salzsäure entzogen. Beim Eindampfen der Chloride wurden zerfliessliche Krystalle von salzsaurem α-Coniceïn erhalten, welche nicht zerfliessliche Nadeln von salzsaurem Coniin umgaben. Durch Zusatz einiger Tropfen absoluten Alkohols konnten sie isolirt werden. Indem man die Mutterlauge von Neuem mit Jodwasserstoffsäure und Phosphor behandelte und diesen Process noch zwei- bis dreimal wiederholte, gelang es schliesslich, eine hinreichende Menge ganz reinen, luftbeständigen salzsauren Coniins zu erhalten, welches der Analyse unterworfen werden konnte.

	α-Coniceïnchlorhydrat $C_8H_{15}N.HCl$	Coniinchlorhydrat $C_8H_{17}N.HCl$	Versuch
Kohlenstoff	59.44	58.71	58.77
Wasserstoff	9.90	11.00	11.04.

Reduction des Coniins zu Octan.

Bei einigen der Digestionen des α-Coniceïns mit Jodwasserstoffsäure und Phosphor, bei welchen die Temperatur eine besonders hohe gewesen war, hatte sich auf dem Digestionsproducte eine dünne Ölschicht angesammelt. Man durfte in diesen Fällen wohl annehmen, dass die Reduction über das Coniin hinausgegangen sei und die Bildung von Octan veranlasst habe. Um in dieser Beziehung klar zu sehen, wurde Coniin selbst mit concentrirter Jodwasserstoffsäure 8—10 Stunden lang auf eine Temperatur von nahezu 300° erhitzt. In der That schwamm nunmehr auf der dunkelgefärbten Jodwasserstoffsäure in der erkalteten Röhre eine hohe Schicht vollkommen farblosen Octans, während sich in der sauren Lösung eine reichliche Menge von Ammoniak, aber kein Coniin mehr nachweisen liess.

Die Reaction scheint fast quantitativ vor sich zu gehen:

$$C_8H_{17}N + 2HH = C_8H_{18} + H_3N.$$

Digitized by Google

Das Octan braucht man nur abzuheben und über Natrium zu destilliren, um es alsbald rein zu erhalten. Es riecht täuschend ähnlich wie Petroleum. Der Siedepunkt liegt bei 118—120°. Prüfung mit Brom ergab, dass es kein Octen enthielt.

Der Formel

$$C_8H_{18}$$

entsprechen folgende Werthe:

		Theorie.		
C_8	96	84.21	83.51	83.99
H_{18}	18	15.79	15.57	15.42
	114	100.00	99.08	99.41

Das Gasvolumgewicht, im Wasserdampf genommen, wurde zu 57.51 auf Wasserstoff und zu 3.97 auf Luft bezogen gefunden. Die Theorie verlangt $\frac{114}{2} = 57$ auf Wasserstoff und 3.94 auf Luft bezogen. Im flüssigen Zustande hat das Octan bei 11° das Volumgewicht 0.712.

Ist der bei der Reduction des Coniins auftretende Kohlenwasserstoff das normale Octan? Angesichts der abweichenden Angaben über den Siedepunkt dieses Octans lässt sich diese Frage kaum mit voller Sicherheit beantworten. PELOUZE und CAHOURS[1] gaben für das aus dem Petroleum isolirte Octan den Siedepunkt 115—118°, SCHORLEMMER,[2] fand für das derselben Quelle entstammende 119—125°, für das aus Wigan Cannel[3] gewonnene 119—120°, GREVILLE WILLIAMS[4] endlich für das aus Boghead Cannel dargestellte 116—121°. Das Mittel dieser Siedepunktangaben (119°) weicht von dem Siedepunkt des aus Coniin durch Reduction erzielten Octans kaum ab. Anders verhalten sich die Angaben über den Siedepunkt des synthetisch dargestellten Octans, denen man doch geneigt ist, grösseres Vertrauen zu schenken. Synthetisch ist das Octan von ZINCKE[5] aus dem normalen Octyljodid durch Behandlung mit Natriumamalgam, von SCHORLEMMER[6] aus dem nämlichen Jodid (aus Petroleum durch Umwandlung in Chlorid und Alkohol bereitet) mit Zink und Salzsäure, von demselben Forscher[7] endlich aus normalem Butyljodid (aus Buttersäure stammend) durch Einwirkung von Natrium gewonnen worden. Das so erhaltene Octan zeigte beziehungsweise die Siedepunkte 124—125°, 124°, 123—125°. Es bleibt hier im günstigsten Falle immer noch eine Differenz von 4°, welche nicht ohne Weiteres

[1] PELOUZE und CAHOURS, Ann. de Chim. et de Phys. [4] I. 5.
[2] SCHORLEMMER, LIEB. Ann. CLII. 153.
[3] Derselbe, Chem. Soc. J. XV. 425.
[4] GREVILLE WILLIAMS, Phil. Trans. 1857. 455.
[5] ZINCKE, LIEB. Ann. CLII. 15.
[6] SCHORLEMMER, LIEB. Ann. CLII. 155.
[7] Derselbe, LIEB. Ann. CLXI. 280.

Digitized by Google

vernachlässigt werden kann, und da die Theorie nicht weniger als 18 verschiedene Octane in Aussicht stellt, so würde es voreilig sein, diese Frage im Augenblick entscheiden zu wollen.

Zwischen dem Coniin und dem Octan lässt sich als Zwischenproduct noch ein primäres Amin, ein Octylamin, annehmen.

$$C_8H_{16}NH \quad C_8H_{17}NH_2 \quad C_8H_{18}$$

Man durfte wohl vermuthen, dass sich unter glücklich gewählten Verhältnissen die Reduction des Coniins auf halbem Wege würde aufhalten lassen. Es ist dies aber nur sehr unvollständig gelungen, und es bedurfte eines umständlichen Verfahrens, um die Anwesenheit eines primären Amins unter den Reductionsproducten festzustellen.

Wird das Coniin mit concentrirter Jodwasserstoffsäure und Phosphor acht Stunden lang einer Temperatur von etwa 280° ausgesetzt, so ist die Base nicht vollständig in Octan übergegangen, und neben viel unangegriffenem Coniin ist in der Jodwasserstoffsäure eine sehr kleine Menge einer Base enthalten, welche sich als ein Octylamin erweisen dürfte. Ihre Gegenwart gab sich zu erkennen, als man nach Entfernung des Octans die saure Lösung mit Alkali neutralisirte und die mit Wasserdampf übergetriebenen Basen in Chlorhydrate verwandelte. Indem man das trockene Gemisch der salzsauren Salze mit Aether-Alkohol übergoss, löste sich das gesuchte Salz, während das Chlorhydrat des Coniins mit dem von der Octanbildung herrührenden Salmiak zurückblieb. Durch Verdampfen der Lösung und wiederholte Behandlung mit Äther-Alkohol, erhielt man endlich einen Rückstand, welcher mit Platinchlorid ein schmutzig gelbes, schwer lösliches Platinsalz lieferte. Aus diesem wurde durch Schwefelwasserstoff eine kleine, zur Analyse leider nicht ausreichende Menge salzsauren Salzes gewonnen. Dass aber die in dem Chlorhydrat enthaltene Base eine primäre war, liess sich leicht mittelst der Chloroformreaction erkennen. Es bedarf weiterer Versuche, um diese primäre Base als Octylamin zu charakterisiren.

Reductionsversuche mit Tropidin, Collidin und Pyridin.

Im Anhang an das hier Mitgetheilte sei mir gestattet, noch kurz einige fragmentarische Beobachtungen zu erwähnen, welche gelegentlich der Reductionsversuche mit dem Coniin gemacht wurden. α-Coniceïn zeigt in seinen physikalischen Eigenschaften eine grosse Ähnlichkeit mit dem von Ladenburg[1] entdeckten Tropidin. Letzteres ist eine

[1] Ladenburg, Ber. chem. Ges. XII, 945.

Digitized by Google

tertiäre Base wie das α-Coniceïn und zeichnet sich zumal auch durch Bildung eines äusserst schwer löslichen, gut krystallisirenden Pikrats aus. Auch die Siedepunkte beider Basen liegen nur um wenige Grade auseinander. Allerdings enthält das Tropidin 2 At. Wasserstoff weniger als das α-Coniceïn, indessen konnte bei Einwirkung einer alkalischen Bromlösung auf Coniin und subsequenter Behandlung des gebildeten Bromderivats mit Säuren statt der Base $C_8H_{15}N$ wohl auch ein Amin von der Formel $C_8H_{13}N$ entstehen. Zu einer Zeit, in welcher die Identität der aus dem Coniin und Conydrin gewonnenen Basen noch nicht endgültig festgestellt war, schien es immerhin wünschenswerth, das pikratgebende Coniinderivat mit dem Tropidin zu vergleichen. Hr. Prof. KRAUT und Hr. Dr. MERLING hatten die Güte, mir kleine Proben von Tropin und Tropidin zu senden, wofür ich denselben zu bestem Danke verpflichtet bin. Bei der Vergleichung des Tropidins mit dem α-Coniceïn zeigten sich aber bemerkenswerthe Verschiedenheiten, namentlich wurde bei der Einwirkung von Jodwasserstoffsäure und Phosphor statt des bei 120° siedenden Octans ein anderer, bei 95° siedender Kohlenwasserstoff erhalten. Auch liess sich in der sauren Flüssigkeit kein Coniin nachweisen. Dagegen war eine Base vorhanden, welche ein schönes, in feinen Nadeln krystallisirendes Platinsalz bildete. Eine Platinbestimmung in diesem Salze gab 30.97 Procent Platin, ein Platingehalt, welcher einem Homologon des Tropidins in der Siebenkohlenstoffreihe (31.26 Procent Platin) entsprechen würde. Wird diese Annahme durch weitere Versuche bestätigt, so darf man wohl den gleichzeitig auftretenden Kohlenwasserstoff als eins der Septane ansprechen, deren Siedepunkte zwischen 90 und 100° angegeben werden. Die Abspaltung von einer Methylgruppe hat eine gewisse Wahrscheinlichkeit, da sowohl KRAUT[1] wie LADENBURG[2] unter den Zersetzungsproducten des Tropins Methylamin nachgewiesen haben. Ich habe diese Versuche nicht weiter verfolgt, weil sie mich auf ein von Hrn. LADENBURG angebautes Gebiet geführt haben würden, immerhin zeigen sie mit Bestimmtheit, dass das α-Coniceïn von dem Tropidin völlig verschieden ist.

Ferner will ich noch bemerken, dass auch das Collidin, wie sich erwarten liess, von der Jodwasserstoffsäure reducirt wird. Es entsteht ein Kohlenwasserstoff, der sich, dem Siedepunkte nach (117°), noch etwas weiter von dem normalen Octan entfernt. Dem unverändert gebliebenen Collidin war noch eine zweite Base beigemischt, deren Natur bis jetzt nicht hat festgestellt werden können.

---

[1] KRAUT, Lieb. Ann. CXXXIII, 91.
[2] LADENBURG, Ber. chem. Ges. XIV, 2126.

Digitized by Google

Schliesslich sind auch noch einige Reductionsversuche mit dem Pyridin angestellt worden. Diese Base wird von concentrirter Jodwasserstoffsäure bei Temperaturen über 300° lebhaft angegriffen. Auf der wässerigen Flüssigkeit in den Digestionsröhren schwamm ein farblos durchsichtiger Kohlenwasserstoff, welcher, mit dem Scheidetrichter abgehoben und über Natrium entwässert, sich durch den Siedepunkt von 35° als normales Quintan zu erkennen gab. Neben dem gebildeten Ammoniak liess sich noch etwas unzersetztes Pyridin nachweisen. Nach Piperidin wurde vergeblich mit der Schwefelkohlenstoffreaction geforscht, auch liess sich mittelst der Chloroformreaction eine primäre Base nicht nachweisen.

Ganz andere Ergebnisse aber werden erhalten, wenn man bei etwas niedrigerer Temperatur, etwa bei 280° arbeitete. In diesem Falle bildet sich nur eine sehr geringe Menge Kohlenwasserstoff, während reichliche Mengen von Piperidin entstehen. Man braucht die saure Lösung nur nahezu zu neutralisiren und mit Wasserdampf zu behandeln; alsdann geht das unveränderte Pyridin über. Mit Alkali übersättigt und von Neuem der Destillation unterworfen, liefert die Flüssigkeit nunmehr reines Piperidin, welches mit Schwefelkohlenstoff alsbald zu der schönen, von Cahours entdeckten, krystallinischen Verbindung erstarrt.

Die hier angedeutete Methode der Trennung beruht auf der leichten Zersetzbarkeit der Salze des Pyridins und seiner Homologen. Aus schwach saurer Lösung werden diese Basen durch Wasserdampf nahezu vollständig abgeschieden, während die Salze des Piperidins unter diesen Verhältnissen nicht zerlegt werden. Diese Methode hat bei den hier beschriebenen Versuchen vielfach vortreffliche Dienste geleistet.

Basen, welche bei der Zerlegung des Conydrins neben α-Conicein gebildet werden.

Im Vorhergehenden (vergl. S. 1211) ist erwähnt worden, dass die Spaltung des Conydrins mittelst Salzsäure ein Gemenge von Basen lieferte, aus welchem sich das α-Coniceïn in der Form eines schwerlöslichen Pikrats abscheiden liess. Wird die alkoholische Mutterlauge des Pikrats, aus welcher man das schwerlösliche Salz nach Möglichkeit entfernt hat, abgedampft und mit Wasser versetzt, so scheidet sich ein öliges Pikrat von braungelber Farbe ab, welches nicht mehr erstarrt. Durch Alkali werden die in dieser Verbindung vorhandenen Basen in Freiheit gesetzt. Es ist aus dem schon (vergl. S. 1212) oben

Digitized by Google

angegebenen Grunde nicht rathsam, sie mit Wasserdampf überzutreiben. Bei einem Versuche, sie auf diese Weise zu gewinnen, wurden sehr beträchtliche Verluste erlitten. Mit den überdestillirenden Basen gingen reichliche Mengen von Ammoniak über; die alkalische Flüssigkeit in der Retorte, auf welcher nicht unerhebliche Mengen eines braunen Harzes schwammen, lieferte bei der Übersättigung mit Schwefelsäure höhere Glieder der Fettsäurereihe, während sich gleichzeitig salpetrige Säure entwickelte.

Weit vortheihafter ist es, das mit einem Überschuss von Alkali zersetzte Pikrat mit Äther auszuschütteln.

Die bei der Verdunstung des Äthers zurückbleibenden und mit Kalihydrat entwässerten Basen stellen eine farblose Flüssigkeit von stark coniinartigem Geruch dar, welche zwischen 165° und 170°, also erheblich höher als das α-Conicein (Siedepunkt 158—159°), siedet.

Die aus dem öligen Pikrate abgeschiedene basische Flüssigkeit ist, wie schon der steigende Siedepunkt andeutet, kein einheitlicher Körper. Dies erhellt auch unzweideutig bei der weiteren Untersuchung derselben. Denn, löst man die Flüssigkeit in Salzsäure, so wird beim Abdampfen eine weisse krystallinische Masse erhalten, welche aus luftbeständigen und zerfliesslichen Salzen besteht.

Der Untersuchung dieses Salzgemisches haben sich recht erhebliche Schwierigkeiten in den Weg gestellt, und ich bin weit entfernt, behaupten zu wollen, dass sie vollständig überwunden worden seien.

Der Hauptbestandtheil des in dem öligen Pikrate vorhandenen Basengemenges ist eine bei gewöhnlicher Temperatur starre Base, welche ich, da sie mit dem α-Conicein isomer ist, mit dem Namen β-Conicein bezeichnen will. Ihre Abscheidung im reinen Zustande wird durch die Gegenwart flüssiger Basen sehr erschwert. Diese flüssigen Basen bestehen zum Theil aus α-Conicein, welches sich mittelst der angeführten Methoden, der Natur der Sache nach, nicht vollständig entfernen lässt. Aber neben dem α-Conicein ist noch ein anderer flüssiger basischer Körper vorhanden. Möglich, dass dieses dritte Spaltungsproduct des Conydrins dieselbe Zusammensetzung besitzt, wie das α- und β-Conicein. Neben dieser noch nicht hinreichend definirten Base scheinen auch noch kleine Mengen eines sauerstoffhaltigen basischen Körpers vorhanden zu sein.

β-Conicein. Die Abscheidung dieser Base aus dem gemischten Öle schien sich am leichtesten durch Überführung desselben in das Chlorhydrat bewerkstelligen zu lassen. Durch mehrfaches Umkrystallisiren, theilweise aus Wasser, theilweise aus Alkohol, liess sich in der That schnell ein vollkommen luftbeständiges Salz erhalten, welches einen einheitlichen Eindruck machte. Dieses Salz ist aus Gründen,

Digitized by Google

welche ein Blick auf die Versuchszahlen erkennen lässt, des Öfteren analysirt worden. Für die Analysen I—IV war das Salz aus Wasser, für die Analysen V—VII aus Alkohol umkrystallisirt worden. Analyse VII wurde im Sauerstoffstrom ausgeführt. Die Salze, von verschiedener Darstellung, waren theilweise bei 100°, theilweise bei 120° getrocknet worden.

Bei diesen Versuchen wurden folgende Werthe[1] erhalten:

	I	II	III	IV	V	VI	VII
Kohlenstoff	58.04	58.18	58.15	58.00	58.21	58.23	58.25
Wasserstoff	10.05	10.15	10.06	10.28	9.74	9.82	9.85

Diese Zahlen deuten unter Mitberücksichtigung der Bildungsweise der Basen aus dem Conydrin unzweideutig auf eine oder mehrere Basen von der Formel

$$C_8H_{15}N$$

hin, deren Chlorhydrat folgende Werthe verlangt:

C_8	96	59.44
H_{16}	16	9.90
N	14	8.68
Cl	35.5	21.98
	161.5	100.00

Allerdings lässt der constant auftretende Verlust von etwa 1 Procent Kohlenstoff bei diesen Analysen die Gegenwart einer fremden Substanz in dem Salze nicht verkennen. Man konnte einen Augenblick an Verunreinigung mit Salmiak denken, allein besonders angestellte Versuche schliessen die Anwesenheit jeder Spur von Ammoniak aus. Die Natur der fremden Beimischung, vielleicht einer sauerstoffhaltigen Base, muss vor der Hand dahingestellt bleiben.

Als die Lösung des analysirten Chlorhydrats mit Goldchlorid versetzt wurde, schied sich ein öliges Goldsalz aus, welches aber schnell zu tafelförmigen Krystallen erstarrte. Diese Krystalle schmelzen in heissem Wasser, in dem sie sich reichlich lösen. Wenn man die Lösungen verdünnt mit einander mischt, lässt sich das Goldsalz in gut ausgebildeten Krystallen erhalten.

---

[1] Ganz ähnliche Zahlen sind von Wertheim (Lieb. Ann. C, 336) bei der Analyse des Salzes erhalten worden, welches er durch Sättigen der bei der Einwirkung des Phosphorsäureanhydrids auf das Conydrin entstehenden Basen mit Salzsäure gewonnen und aus Alkohol umkrystallisirt hatte. Die Analyse ergab:

Kohlenstoff	58.86
Wasserstoff	10.05
Chlor	21.52

Aus diesen Zahlen leitete Wertheim ganz naturgemäss die damals für das Coniin geltende Formel $C_8H_{15}N$ ab.

Digitized by Google

Die Analyse, für welche das Salz *in vacuo* getrocknet wurde, führte zu der durch die Untersuchung des Chlorhydrats angedeuteten Formel

$$C_8H_{15}N.HCl.AuCl_3,$$

welche folgende Werthe fordert:

	Theorie		Versuch		
C_8	96	20.64	19.97	—	—
H_{16}	16	3.45	3.45	—	—
N	14	3.01	—	—	—
Au	197	42.36	—	42.39	42.47
Cl_4	142	30.54	—	—	—
	465	100.00			

Die Analyse auch des Goldsalzes zeigt einen Verlust an Kohlenstoff: man durfte gleichwohl hoffen, dass man aus diesem gut krystallisirten Salze die Base im Zustande der Reinheit gewinnen werde. Zu dem Ende wurde eine grössere Menge des Goldsalzes mit Schwefelwasserstoff zersetzt. Das beim Abdampfen der entgoldeten Lösung zurückbleibende, gut krystallisirte Salz wurde alsdann mit Alkali zersetzt, und die mit Wasserdampf übergetriebene Base zunächst mit Kalihydrat entwässert und schliesslich noch etwa drei Stunden bei 200° mit Natrium in Berührung gelassen. Die klare, stark nach Coniin riechende Flüssigkeit siedete nunmehr bei 167—169°. Einer Temperatur von — 5 bis — 10°, wie man sie durch rasches Verdampfen von Äther leicht hervorbringt, ausgesetzt, erstarrte diese Flüssigkeit zu einer aus weissen Nadeln bestehenden Krystallmasse, welche aber bei 20° schon wieder zerfloss. Die in der Kälte ausgeschiedenen Krystalle enthielten noch immer kleine Mengen einer flüssigen Materie, welche erst durch starkes Pressen bei möglichst niedriger Temperatur entfernt werden konnte. Die zurückbleibenden Krystalle zeigten nunmehr den Schmelzpunkt 41°, und dieser Schmelzpunkt änderte sich auch nicht mehr, als der ganze Vorrath geschmolzen und nach dem Erstarren von Neuem zwischen Fliesspapier gepresst wurde. Es ist diese starre, bei 41° schmelzende Base, welche ich mit dem Namen β-Conicein bezeichne.

Die beschriebenen Versuche zeigen, dass sowohl in dem analysirten Chlorhydrat als auch in dem daraus dargestellten Goldsalze dem krystallinischen β-Conicein noch eine basische Flüssigkeit beigesellt war, vielleicht von gleicher, jedenfalls von sehr ähnlicher Zusammensetzung. Dass dem so sei, ergab sich auch aus weiteren Versuchen. Als man das salzsaure Salz direct, ohne dass es in Goldsalz übergeführt worden wäre, mit Alkali behandelte und die frei gewordene und mit

Digitized by Google

Kalihydrat und Natrium getrocknete ölige Base einer Kältemischung aussetzte, schieden sich alsbald Krystalle der bei 41° schmelzenden starren Base ab, allein in verhältnissmässig geringer Menge, — aus 15^g des Gemenges wurde nicht mehr als 1.5^g reiner Krystalle erhalten, — ein Beweis, dass durch die Umwandlung des Chlorhydrats in Goldsalz eine erhebliche Anreicherung der starren Base stattgefunden hatte.

Über die Natur der neben der starren Base auftretenden flüssigen Base von wahrscheinlich gleicher Zusammensetzung kann ich im Augenblick nichts Bestimmteres mittheilen. Weiter unten wird eine dritte Base von der Zusammensetzung der Coniceïne beschrieben werden, welche aus dem Coniin entsteht, und der ich den Namen γ-Coniceïn gegeben habe. Ich habe es längere Zeit für wahrscheinlich gehalten, dass die neben der pikratbildenden und starren Base unter den Spaltungsproducten des Conydrins auftretende flüssige Base mit dem γ-Coniceïn identisch sei, bin aber später, wie weiter unten näher dargelegt werden soll, von dieser Ansicht wieder abgekommen.

Das β-Coniceïn lässt sich nicht nur durch die Einwirkung der Salzsäure auf das Conydrin gewinnen; es entsteht auch bei der Behandlung desselben mit Jodwasserstoffsäure. In letzter Reaction gebildete, sehr charakteristische und daher leicht fassbare Zwischenproducte werfen ein willkommenes Streiflicht auf die Natur der starren Base. Ich komme auf diesen Process weiter unten eingehend zurück. Hier soll nur noch bemerkt werden, dass für die zunächst zu beschreibenden weiteren Versuche das β-Coniceïn mit Hülfe theils der Salzsäure, theils der Jodwasserstoffsäure erhalten worden war.

Das β-Coniceïn, ob auf die eine, ob auf die andere Weise gewonnen, schiesst in nadelförmigen, den eigenthümlichen Geruch des Coniins besitzenden Krystallen an, welche in Wasser wenig, in Alkohol und Äther leicht löslich sind. Die wässerige Lösung besitzt eine stark alkalische Reaction.

Angesichts der nahen Beziehung, in welcher das β-Coniceïn zu dem Coniin, besonders aber zu dem α-Coniceïn steht, war die Erforschung seiner physiologischen Eigenschaften von besonderem Interesse. Einige Versuche, welche Hr. Prof. Hugo Kronecker über seine Wirkungen begonnen hat, sind noch nicht zum Abschlusse gelangt. Derselbe theilt mir jedoch schon heute mit, dass das β-Coniceïn jedenfalls weit schwächer wirkt, als das α-Coniceïn. Kaninchen erholten sich wieder, selbst wenn die Dose des β-Coniceïns bis zum vierfachen derjenigen Menge gesteigert ward, in welcher das α-Coniceïn eine tödtliche Wirkung geübt hatte.

Die Krystalle des β-Coniceïns, welche sich seit Monaten vollkommen unverändert erhalten haben, schmelzen bei 41°. Der Siede-

Digitized by Google

punkt der krystallisirten Base liegt bei 168°, also fast genau bei derselben Temperatur, bei welcher das Coniin siedet. Trotz dieses hohen Siedepunktes ist sie ausserordentlich flüchtig. Bei einem Versuche, die Base für die Analyse *in vacuo* zu trocknen, verflüchtigten sich in zehn Minuten nicht weniger als 25^{mg}. Angesichts des geringen Vorraths von β-Coniceïn, welcher mir zur Verfügung stand, musste ich mich entschliessen, die zwischen Fliesspapier getrocknete Base zu verbrennen, obwohl ich nach den Erfahrungen, welche bei der Untersuchung des α-Coniceïns gesammelt worden waren, kaum erwarten durfte, dass die so erhaltene Base absolut wasserfrei sei.

In der That zeigte sich ein erheblicher Verlust an Kohlenstoff. Ich stelle die gefundenen mit den berechneten Werthen zusammen.

	$C_8H_{15}N$	Versuch	$C_8H_{15}N$ mit 1 Procent Wasser
Kohlenstoff	76.80	75.71	76.03
Wasserstoff	12.00	11.67	11.99
Stickstoff	11.20	11.34	10.98
	100.00	98.72	99.00

Das *salzsaure β-Coniceïn* wird leicht erhalten durch Auflösen der krystallisirten Base in Chlorwasserstoffsäure; die Lösung erfolgt unter Erwärmung. Beim Abdampfen der neutralen Flüssigkeit werden farblose Prismen gewonnen, welche sehr löslich, aber vollkommen luftbeständig sind. Analysen eines Chlorhydrats, welches aber noch nicht ganz rein war, sind bereits im Vorstehenden angeführt worden (vergl. S. 1222). Die Analyse des aus der starren Base dargestellten, bei 100° getrockneten salzsauren Salzes lieferte Werthe, welche der Formel

$$C_8H_{15}N.HCl$$

entsprechen.

	Theorie		Versuch		
C_8	96	59.44	58.79	59.42	—
H_{16}	16	9.90	10.04	10.27	—
N	14	8.68	—	—	—
Cl	35.5	21.98	—	—	21.79
	161.5	100.00			

Das *Goldsalz* fällt als Öl, welches aber bald krystallinisch erstarrt. Seine Eigenschaften stimmen im Wesentlichen mit denen des noch nicht ganz reinen Salzes überein, dessen Analyse bereits früher gegeben worden ist (vergl. S. 1223). Das aus dem Chlorhydrat der starren Base gewonnene Goldsalz zeigte *in vacuo* getrocknet die Zusammensetzung

$$C_8H_{15}N.HCl.AuCl_3,$$

welcher 42.36 Procent Gold entsprechen; gefunden wurden 42.40 Procent.

Digitized by Google

Das β-Coniceïn liefert auch ein krystallinisches *Platinsalz*, allein es ist so ausserordentlich löslich, dass es sich nur mit der grössten Schwierigkeit erhalten lässt; für die Analyse ist es jedenfalls nur wenig geeignet. Wenn sich die Base mit Zinnchlorid vereinigt, so ist die Verbindung jedenfalls eine äusserst lösliche; ich habe sie nicht krystallisirt erhalten.

Noch erschien es von Wichtigkeit, festzustellen, zu welcher Classe von Basen das β-Coniceïn gehört. Dass dasselbe nicht wie das α-Coniceïn eine tertiäre Base sei, liess sich alsbald durch die starke Wärmeentwickelung erkennen, welche beim Vermischen der Base mit Essigsäureanhydrid erfolgte; es war aber auch keine primäre, denn mit Alkali und Chloroform wurde kein Isonitril gebildet; das β-Coniceïn musste also eine secundäre sein. Diese Schlussfolgerung wurde überdies durch das Studium seines Verhaltens zum Jodmethyl bestätigt. Es bot kein Interesse, die in erster Linie zu erwartende tertiäre Methylbase zu isoliren. Man liess daher das Jodmethyl alsbald in Gegenwart eines kleinen Überschusses von Natron in alkoholischer Lösung auf die starre Base einwirken. Die Reaction war ziemlich heftig; die Lösung enthielt das Jodid der dimethylirten Ammoniumbase, welches, obschon sehr löslich in Wasser, gleichwohl in guten Krystallen erhalten werden konnte. Um die Ammoniumbase zu identificiren, wurde die Lösung mit Salzsäure und Chlorsilber behandelt, das Kochsalz zum grösseren Theile durch Behandlung des Abdampfrückstandes mit absolutem Alkohol entfernt, und das in Alkohol lösliche Chlorid nach Entfernung des Alkohols mit Platinchlorid gefällt. Das *Platinsalz* bildet leichtlösliche Prismen, welche sich umkrystallisiren lassen. Bei 200° getrocknet lieferte das Salz 27.45 Procent Platin. Die Verbindung

$$2(C_8H_{14}NCH_3.CH_3Cl)PtCl_4$$

verlangt 27.43 Procent.

Das *Goldsalz* ist schwerer löslich, lässt sich aber gleichfalls umkrystallisiren. Die Analyse des bei 100° getrockneten Salzes führte zu der Formel

$$C_8H_{14}NCH_3.CH_3Cl.AuCl_3.$$

Theorie: 39.95 Procent. Gold. Versuch 40.11.

Einwirkung der Jodwasserstoffsäure auf das Conydrin.

Wird das Conydrin mit dem vierfachen Gewicht Jodwasserstoffsäure und etwas Phosphor 3 bis 4 Stunden lang einer Temperatur ausgesetzt, welche 150° nicht übersteigt, so enthält die Digestionsröhre

Digitized by Google

nach dem Erkalten eine Menge farbloser, prismatischer Krystalle. Wird die angegebene Temperatur erheblich überschritten, so vermindert sich die Ausbeute an Krystallen; bei 300° entsteht gerade wie bei dem Coniin (vergl. S. 1216) fast nur Octan. Die Krystalle sind in kaltem Wasser mässig, in heissem leicht löslich und lassen sich daher aus letzterem mit Vortheil umkrystallisiren; sie können unverändert bei 100° getrocknet werden. Die Analyse zeigte, dass hier das Jodhydrat eines jodirten Coniins

$$C_8H_{16}IN.HI$$

vorlag, aus dem Conydrin durch Substitution von 2 At. Jod für 1 At. Sauerstoff gebildet.

$$C_8H_{17}NO + 2HI = C_8H_{16}IN.HI + H_2O.$$

Es ist dieses das Salz, dessen schon im Vorhergehenden als einer Quelle für die Gewinnung von α-Coniceïn (vergl. S. 1215) gedacht worden ist.

Beim Kochen des Salzes mit Silbernitrat wird der ganze Jodgehalt desselben als Jodsilber ausgeschieden; auf diese Weise wurden 66.37 Procent Jod gefunden. Die Theorie verlangt 66.71 Procent.

Wird die Lösung des Jodids in der Kälte mit Silberchlorid so lange digerirt, als sich letzteres noch in Jodsilber verwandelt, so wird nur die Hälfte des in den Krystallen enthaltenen Jods entfernt, indem sich ein Chlorhydrat von der Formel

$$C_8H_{16}IN.HCl$$

bildet. Beim Abdampfen schiesst dieses Chlorid in Krystallen an, die, obwohl immer noch schwer löslich, sich doch viel leichter lösen, als das entsprechende Jodhydrat. Mit Platinchlorid versetzt liefert dieses Chlorhydrat ein schwer lösliches, krystallinisches Platinsalz von der Formel

$$2\,(C_8H_{16}IN.HCl)\,PtCl_4,$$

welchem 21.46 Procent Platin entsprechen. Gefunden wurden 22.05 und 21.83 Procent. Der etwas zu hoch gefundene Platingehalt ist wahrscheinlich durch den Umstand bedingt, dass sich schon etwas von dem Platinsalze der gleich zu erwähnenden chlorhaltigen Base gebildet hatte.

Wird das Jodhydrat der jodirten Base eine viertel Stunde lang mit einem Überschusse von Chlorsilber gekocht, so wird auch das zweite Jodatom durch Chlor ersetzt, indem sich ein in blätterigen Krystallen anschiessendes Chlorhydrat einer chlorirten Base bildet, dessen Zusammensetzung

$$C_8H_{16}ClN.HCl$$

Digitized by Google

durch die Analyse des entsprechenden Platinsalzes festgestellt ward. Letzteres krystallisirt in schönen, gelben, ziemlich leicht löslichen Nadeln, welche bei 100° getrocknet 26.95 Procent Platin liefern. Der Formel

$$2\,(C_8H_{16}ClN\,.\,HCl)\,PtCl_4$$

entsprechen 26.80 Procent.

Die im Vorstehenden beschriebenen Versuche lassen unzweifelhaft erkennen, dass in den durch die Einwirkung der Jodwasserstoffsäure auf das Conydrin gebildeten Krystallen das Jodhydrat eines Jodconiins vorliegt. Ein weiterer Beweis für diese Auffassung ergab sich bei der Einwirkung von Reductionsmitteln auf die Lösung des Salzes. Wird dieselbe kurze Zeit mit Zinn und Salzsäure gekocht, so ist die jodirte Base glatt in Coniin übergegangen. Übersättigt man nunmehr mit Alkali, so geht bei der Destillation mit Wasserdampf reines Coniin über, welches zumal durch das Studium des charakteristischen luftbeständigen Chlorhydrats identificirt wurde.

Die Überführung des Conydrins in Coniin, welche man früher durch Anwendung von Entwässerungsmitteln irrthümlich geglaubt hatte bewerkstelligt zu haben, lässt sich also unter Zuhülfenahme von Jodwasserstoffsäure ohne Schwierigkeit ausführen.

Das Jodid des Jodconiins bietet nach verschiedenen Richtungen hin Interesse. Versetzt man die Lösung desselben in der Kälte vorsichtig mit Alkali, so scheidet sich die freie Base

$$C_8H_{16}IN$$

als schweres Öl aus, welches von dem gleichzeitig gebildeten Jodkalium durch Äther getrennt werden kann. Verdampft man den Äther, — durch Abblasen auf einem Uhrglase z. B, — so bleibt die Base zurück. Bei gewöhnlicher Temperatur hält sie sich längere Zeit unverändert; erhitzt man sie aber auf eine Temperatur, die nur wenige Grade über dem Siedepunkt des Wassers liegt, so erfolgt eine Umbildung, indem sie nach der Gleichung

$$C_8H_{16}IN = C_8H_{15}N\,.\,HI$$

in ein Jodhydrat übergeht.

Das Bemerkenswerthe dieser Umbildung ist jedenfalls, dass sich in einigen Fällen das flüssige α-Coniceïn, in anderen das starre β-Coniceïn bildet. Vielleicht ist es richtiger, zu sagen, dass stets beide Basen neben einander entstehen, dass aber in einigen Fällen vorzugsweise die flüssige, in anderen vorwaltend die starre Base auftritt. Jedenfalls war das starre β-Coniceïn stets von flüssigem α-Coniceïn begleitet, welches sich durch Bildung des charakteristischen Pikrates leicht nachweisen liess. Es muss dahingestellt bleiben, ob nicht das in anderen

Digitized by Google

Fällen beobachtete flüssige α-Coniceïn, welches selbst in einer starken Kältemischung keine Krystalle mehr absetzte, gleichwohl noch erhebliche Mengen der starren Base enthalten habe, da schon die Gegenwart kleiner Mengen flüssiger Base die Ausscheidung des starren Coniceïns zu hindern vermag. Es hat begreiflich nicht an Versuchen gefehlt, die Bedingungen festzustellen, unter denen sich die aus dem Jodhydrat ausgeschiedene Jodbase geradezu, sei es in α-Coniceïn, sei es in β-Coniceïn, verwandele: diese Versuche sind jedoch alle gescheitert. Dagegen ist es einigermaassen gelungen, die directe Zerlegung des Jodhydrats so zu leiten, dass nach Wunsch vorwaltend die eine oder die andere der beiden Coniceïnbasen gebildet wird.

Versetzt man das Jodhydrat mit einem Überschusse von Natronhydrat und leitet durch die Mischung einen Strom von Wasserdampf, so geht eine basische Flüssigkeit über, welche entweder ganz oder vorwiegend aus α-Coniceïn besteht, wenigstens setzt sie auch bei stärkster Abkühlung keine Krystalle ab.

Wird dagegen das trockene Jodhydrat, mit wasserfreiem Kalk gemischt, der Destillation unterworfen, so ist das Destillat ebenfalls flüssig und enthält stets erhebliche Mengen von α-Coniceïn, allein bei der Abkühlung zeigen sich alsbald Krystalle von β-Coniceïn.

Angesichts der Beständigkeit, welche das im freien Zustande so veränderliche Jodconiin in seinen Verbindungen mit Säuren zeigt, — das jodwasserstoffsaure Salz lässt sich wochenlang ohne Zersetzung aufbewahren, — lag der Gedanke nahe, dass sich die durch Jodwasserstoffabspaltung aus demselben entstehenden Basen $C_8H_{15}N$ unter dem Einflusse eines Überschusses von Jodwasserstoffsäure wieder in das Jodhydrat des Jodconiins würden zurück verwandeln lassen. Der Versuch ist zumal mit dem α-Coniceïn wiederholt angestellt worden, ohne dass etwas anderes als jodwasserstoffsaures Coniceïn gebildet worden wäre.[1]

---

[1] Bei dieser Gelegenheit sind einige Versuche über das Verhalten des Allylamins zur Jodwasserstoffsäure gemacht worden, welche, obwohl sie mit dem Studium der Coniinkörper nicht eigentlich in Verbindung stehen, gleichwohl anhangsweise hier erwähnt werden mögen.

Das jodwasserstoffsaure Allylamin addirt in der That noch 1 Mol. Jodwasserstoffsäure und verwandelt sich in ein *jodwasserstoffsaures Jodpropylamin*

$$CH_2 = CH - CH_2NH_2.HI + HI = CH_2I - CH_2 - CH_2NH_2.HI.$$

Wird eine Lösung von Allylamin in einem Überschusse von Jodwasserstoffsäure bei mässiger Temperatur eingedampft, so bleibt eine Krystallmasse zurück, welche sowohl in Wasser, als auch in Alkohol löslich ist. Aus letzterem lässt sich die Verbindung umkrystallisiren und wird alsdann in farblosen Nadeln erhalten; man darf indessen nicht zu lange erwärmen, weil sich die Lösung leicht bräunt.

Digitized by Google

Schliesslich verdient hier noch bemerkt zu werden, dass Phosphortribromid bei hoher Temperatur in ganz ähnlicher Weise auf das Conydrin einwirkt wie Jodwasserstoffsäure. Es entsteht ein schön krystallisirtes, ziemlich schwerlösliches Salz, welches nicht analysirt worden ist, welches aber, ich zweifle nicht daran, die dem beschriebenen Jodkörper entsprechende Bromverbindung

$$C_8H_{16}BrN.HBr$$

darstellt. Die durch Alkali aus der Verbindung in Freiheit gesetzte Base liefert beim Sättigen mit Bromwasserstoffsäure das ursprüngliche, schön krystallisirte Salz nicht mehr.

Es wäre von Interesse, zu versuchen, ob sich bei der Einwirkung von Phosphortrichlorid auf das Conydrin nicht auch ein analoges chlorwasserstoffsaures Chlorconiin bildet.

Bei der nach der Carius'schen Methode ausgeführten Jodbestimmung wurden in dem bei 100° getrockneten Salze 81.10 Procent Jod erhalten. Der Formel

$$C_3H_9NI = (C_3H_6I)H_2N.HI$$

entsprechen 81.15 Procent.

Wird die wässerige Lösung des Salzes bei gewöhnlicher Temperatur mit Chlorsilber behandelt, so wird die salzbildende Jodwasserstoffsäure gegen Salzsäure ausgetauscht. Auf Zusatz von Platinchlorid zu der Lösung fällt ein schönes, mässig lösliches, in sechsseitigen Tafeln krystallisirendes *Platinsalz*, welches ohne Zersetzung eine Temperatur von 100° verträgt. Die Analyse ergab 25.32 Procent Platin; die Formel

$$2[(C_3H_6I)H_2N.HCl]PtCl_4$$

erheischt 25.12 Procent.

Wird die Lösung des jodwasserstoffsauren Salzes längere Zeit hindurch mit Chlorsilber gekocht, so hat man schliesslich nichts anderes, als chlorwasserstoffsaures Allylamin in Lösung. Dieselbe Umbildung erfolgt, wenn man das Jodhydrat mit Natronlauge zum Sieden erhitzt.

Bei gewöhnlicher Temperatur lässt sich jedoch das Jodpropylamin durch Behandlung des Jodhydrats mit Natronlauge in Freiheit setzen. Es ist ein schweres Öl, welches mittels eines Scheidetrichters vom Jodnatrium getrennt wird.

Die freie Jodbase ist aber eine höchst ephemere Verbindung; schon nach kurzer Frist — 5 bis 10 Minuten — tritt eine Reaction ein, die Temperatur steigt über den Siedepunkt des Wassers und das Jod hat wieder die Form der Jodwasserstoffsäure angenommen. Es sind in Wasser lösliche Krystalle entstanden, aus denen sich durch Alkalien basische Öle ausscheiden. Diese Öle enthalten, wie man nicht anders erwarten konnte, erhebliche Mengen von Allylamin; aber neben demselben treten hochsiedende Basen auf, deren Geruch auffallend an den der Äthylenbasen erinnert. Es ist mir nicht gelungen, diese Körper in krystallinische Verbindungen überzuführen. Ihre Untersuchung ist daher nicht weiter geführt worden.

Digitized by Google

55. Beiträge zur Kenntniss der Coniin-Gruppe.

Von A. W. Hofmann.

(Zweiter Theil. Vorgetragen am 6. November: — gedruckt im Bericht vom 18. December [St. LII]; — ausgegeben am 29. December.)

Einwirkung des Broms in alkalischer Lösung auf das Coniin.

Ausgangspunkt dieses Theils meiner Arbeit ist die Untersuchung des Verhaltens, welches die Amide unter dem Einflusse einer alkalischen Bromlösung zeigen; die Ergebnisse derselben sind der Akademie schon vor etwa zwei Jahren vorgelegt worden.[1]

Die Producte, welche unter dem Einflusse des Broms aus dem Coniin hervorgehen, sind sehr mannichfaltig und werden zumeist durch die Gewichtsverhältnisse bedingt, in denen beide Substanzen auf einander wirken. Es ist daher nothwendig, bei diesen Versuchen die Wage stets zur Hand zu haben. Die im Folgenden verzeichneten Gewichtsverhältnisse sind das Ergebniss zahlreicher Versuche; es soll nicht behauptet werden, dass es die vortheilhaftesten seien, wohl aber, dass wesentliche Abweichungen von denselben oft ganz andere als die beschriebenen Erscheinungen hervorrufen.

Im Vorhergehenden ist der Wechselwirkung zwischen Coniin und Brom bereits flüchtig gedacht worden (vergl. S. 1215). Versetzt man Coniin mit Brom, so tritt eine heftige Reaction ein, deren Producte ich nicht weiter verfolgt habe; auch bei Gegenwart von Wasser erfolgt eine, wie es scheint, complexe Umbildung. Einfacher gestalten sich die Verhältnisse, wenn man Brom auf ein Coniinsalz einwirken lässt. Übergiesst man trockenes salzsaures oder bromwasserstoffsaures Coniin mit Brom, so lösen sich die Salze auf und bei längerem Stehen an der Luft scheiden sich unter Abdunsten von etwas Brom dunkel gefärbte, ziemlich beständige Krystalle aus. Hat man die Salze in Lösung angewendet, so schlägt sich dieses Product in Gestalt eines dunkelen, schweren Öles nieder. Weder das starre noch das flüssige Product, welches je nach der Menge des angewendeten Broms gewiss eine verschiedene Zusammensetzung hat, ist der Analyse unter-

[1] Hofmann, Sitzungsberichte, Math.-naturw. Mitth. 1882. 223.

Digitized by Google

worfen worden. Man hat es hier offenbar mit Additionsproducten zu thun, und wenn Salz und Brom im Verhältnisse von 1 Mol. : 1 Mol. angewendet worden sind, so wird man nicht fehlgehen, wenn man die sich ausscheidende Verbindung als

$$C_8H_{17}N.HBr.BrBr$$

auffasst. Fügt man alsdann dem so gebildeten Additionsproducte Natronlauge hinzu, bis die Farbe des Broms verschwunden ist, so bildet sich eine fast farblose, schwere Flüssigkeit von durchdringendem Geruch, welche ich nach ihrem allgemeinen Verhalten als ein das Brom in der Imidgruppe enthaltendes Substitutionsproduct anspreche

$$C_8H_{17}N.HBr.BrBr + 2NaHO = C_8H_{16}NBr + 2NaBr + 2H_2O.$$

Noch zweckmässiger stellt man den Versuch so an, dass man 1 Mol. Brom mit 1 Mol. Natronhydrat (in 5proc. Lösung) mischt und zu der stark abgekühlten Flüssigkeit 1 Mol. Coniin hinzufügt.

Aus dem so gewonnenen Substitutionsproducte lässt sich 1 Mol. Bromwasserstoff abspalten, wodurch Basen gebildet werden, in welchen 2 At. Wasserstoff weniger als in dem Coniin vorhanden sind:

$$C_8H_{16}NBr = C_8H_{15}N + HBr.$$

Die Ausführung des Processes hat nun aber zu dem bemerkenswerthen Ergebniss geführt, dass die sich bildende Base $C_8H_{15}N$ eine verschiedene ist, jenachdem man zur Abspaltung der Bromwasserstoffsäure eine Säure oder ein Alkali verwendet. Wird dieselbe mittelst einer Säure (Schwefelsäure) bewerkstelligt, so entsteht, wie dies bereits in einem früheren Abschnitte dieser Arbeit (vergl. S. 1216) angeführt worden ist, die unter dem Namen α-Coniceïn beschriebene Base; nimmt man dagegen die Bromwasserstoffsäure durch ein Alkali hinweg, so entsteht ein Amin, welches weder mit dem α-Coniceïn noch mit dem β-Coniceïn identisch ist, und daher von den beiden genannten Basen durch die Bezeichnung γ-Coniceïn unterschieden werden muss.

Umwandlung des Coniins in α-Coniceïn.

Das unter den oben angegebenen Bedingungen erzeugte Bromderivat des Coniins ist eine sehr ephemere Verbindung. Schon nach wenigen Minuten erleidet es unter lebhafter Wärmeentwickelung eine stürmische Zersetzung, welche sich bis zu heftiger Explosion steigern kann. Man sollte deshalb mit verhältnissmässig kleinen Mengen und möglichst schnell operiren. Lässt man die im Scheidetrichter von

Digitized by Google

dem Bromnatrium getrennte Flüssigkeit tropfenweise in concentrirte Schwefelsäure fliessen, so löst sie sich farblos auf. Wird diese Lösung langsam auf 140° erwärmt und bei dieser Temperatur gelassen, so lange sich Brom und Bromwasserstoffsäure entwickeln, — was etwa eine Stunde in Anspruch nimmt, — so erkennt man beim Sättigen mit Alkali, dass sich unter Abspaltung von Bromwasserstoffsäure α-Coniceïn gebildet hat. Es wurde durch sorgfältige Vergleichung mit dem aus dem Conydrin gewonnenen zumal auch durch die Erzeugung des Pikrats mit dem Schmelzpunkte 225° identificirt. Bei der Verbrennung wurden folgende Werthe erhalten:

	Theorie	Versuch
Kohlenstoff	47·45	47·57
Wasserstoff	5.09	5·51

Die Ausbeute an α-Coniceïn beträgt etwa 40 Procent des ursprünglich angewendeten Coniins.

Noch verdient bemerkt zu werden, dass neben dem α-Coniceïn in dieser Reaction anderweitige Producte gebildet werden, so z. B. eine bromhaltige Base, die ein sehr schwer lösliches Sulfat und ein unlösliches, schwach krystallinisches Platinsalz bildet. Ich bin dieser Base, welche ein tribromirtes Oxyconiin darstellt, auch auf anderen Wegen begegnet; dieselbe wird weiter unten ausführlicher beschrieben werden.

Umwandlung des Coniins in γ-Conicein.

Übergiesst man das im vorigen Abschnitt erwähnte Bromsubstitutionsproduct $C_8H_{16}NBr$, statt es in Schwefelsäure fliessen zu lassen, mit Alkali, so beobachtet man je nach der Menge und Concentration des letzteren verschiedene Erscheinungen.

Wendet man einen grossen Überschuss starker Natronlauge an, so erfolgt eine lebhafte Reaction, indem sich die Flüssigkeit unter Ausscheidung harziger Producte bräunt; gleichzeitig treten neben Coniin eigenthümliche, die Schleimhaut der Nase reizende Dämpfe auf. Wird jetzt Wasserdampf durch die Flüssigkeit geleitet, so geht neben Coniin die neue Base über, welche ich mit dem Namen γ-Coniceïn bezeichnet habe. Man erkennt sie in dem Gemenge alsbald daran, dass sie mit Zinnchlorid eine krystallinische Verbindung bildet, welche Fähigkeit dem Coniin abgeht. Die Ausbeute an γ-Coniceïn nach diesem Verfahren ist indessen eine nur wenig befriedigende, da, wie aus dem Gesagten erhellt, unliebsame Nebenreactionen auftreten, welche einen erheblichen Theil des Materials verschlingen.

Digitized by Google

Viel günstiger gestalten sich die Verhältnisse, wenn man mit mässigen Quantitäten verdünnter Alkalilösung arbeitet. Allerdings wird auch in diesem Falle die Bildung von Nebenproducten nicht vermieden, aber diese Nebenproducte sind nicht mehr harzartige Substanzen, sondern wohl definirte schön krystallisirte Körper, welche man gern mit in den Kauf nimmt, zumal sie eine Reihe interessanter Umbildungen erleiden.

Die Darstellung des γ-Coniceïns nimmt hiernach folgende einfache Form an:

Man vermischt eine verdünnte Lösung von salzsaurem oder bromwasserstoffsaurem Coniin mit Brom in dem Verhältniss von 1 Mol. des ersteren auf 1 Mol. des letzteren und versetzt die Flüssigkeit, in welcher sich das ölige Additionsproduct $C_8H_{17}N.HBr.BrBr(?)$ ausgeschieden hat, mit 2 Mol. Alkali, indem man Sorge trägt, die Lösung desselben möglichst verdünnt anzuwenden. Ich habe gewöhnlich mit fünfprocentigen Lösungen gearbeitet. Die so erhaltene Flüssigkeit kann man nunmehr auf dem Wasserbade erwärmen, ohne eine lebhafte Reaction befürchten zu müssen. Nach Verlauf etwa einer halben Stunde, zumal bei öfterem Umschütteln, hat sich die wässerige Flüssigkeit entfärbt, und das schwere Öl ist vollständig verschwunden; gleichzeitig ist die anfangs alkalische Reaction in eine stark saure umgeschlagen. Die Lösung enthält nunmehr ein Salz des γ-Coniceïns, welches nach der Gleichung

$$C_8H_{17}N.HBr.BrBr + 2NaHO = C_8H_{15}N.HBr + 2NaBr + 2H_2O$$

entstanden ist. Allein es hat sich nebenbei ein anderes Product gebildet. Aus der nunmehr ganz hell gewordenen Flüssigkeit scheiden sich beim Erkalten oder nach gelindem Abdampfen farblose Nadeln ab, denen bisweilen eine kleine Menge gelben Öles anhaftet. Sie stellen das bromwasserstoffsaure Salz des tribromirten Oxyconiins dar, dessen bereits im Vorhergehenden (vergl. S. 1233) gedacht worden ist, und auf welches ich weiter unten zurückkommen werde. Die abfiltrirte Flüssigkeit enthält neben dem Salze des γ-Coniceïns noch eine reichliche Menge unveränderten Coniins. Beide Basen werden durch Alkali in Freiheit gesetzt und mit Wasserdampf übergetrieben. Wird das wässerige Destillat sammt dem obenaufschwimmenden Öl mit Salzsäure gesättigt, so schiessen beim Verdampfen schöne, strahlige Krystalle an, welche unschwer als die Mischung eines luftbeständigen und eines zerfliesslichen Salzes erkannt werden. Das luftbeständige Salz erweist sich nach dem Absaugen und Umkrystallisiren als reines salzsaures Coniin. Das zerfliessliche Salz enthält das γ-Coniceïn. Dem zerfliesslichen Salze ist begreiflich noch eine sehr erhebliche Menge von Coniin beigemischt. Eine Trennung wurde mit Hülfe der Platin-

Digitized by Google

salze versucht, jedoch mit nur theilweisem Erfolge, da das Coniceïnsalz nicht viel weniger löslich ist als das Salz des Coniins. 100 Gew. Th. Wasser lösen nämlich bei 20° 2.4 Gew. Th. γ-Coniceïn- und 5 Gew. Th. Coniin-Platinsalz.

Die Trennung beider Basen, welche die grösste Ähnlichkeit mit einander haben, wurde schliesslich in erwünschter Weise mittelst Zinnchlorid bewerkstelligt, welches, wie bereits oben bemerkt, mit dem γ-Coniceïn ein wohlcharakterisirtes, gut krystallisirendes Doppelsalz bildet, während die entsprechende Verbindung des Coniins gummiartig eintrocknet. Behufs Reindarstellung des γ-Coniceïns wird die Mischung der beiden Chlorhydrate, wie man sie nach dem oben beschriebenen Verfahren erhält, bis zur Krystallisation eingedampft und mit einer concentrirten Lösung von Zinnchlorid versetzt, wobei ein Überschuss des letzteren sorgfältig zu vermeiden ist. Nach einigen Augenblicken, zumal beim Reiben, erstarrt die Flüssigkeit zu einem Krystallbrei, welcher, mit der Pumpe abgesaugt, einige Mal aus heissem Wasser und schliesslich aus siedendem Alkohol umkrystallisirt wird. Auf diese Weise erhält man wohlausgebildete Krystalle, welche durch Behandlung mit Schwefelwasserstoff das reine salzsaure Salz des γ-Coniceïns liefern, aus diesem wird die Base mit Alkali in Freiheit setzt. Oder aber man zerlegt das Zinndoppelsalz direct mit Alkali und treibt das γ-Coniceïn mit Wasserdampf über. Man erhält auf diese Weise etwa 30 Procent des angewendeten Coniins an völlig γ-Coniceïn. Die Menge des wirklich gebildeten γ-Coniceïns ist aber wesentlich grösser, dieselbe lässt sich aber nicht gewinnen, weil das Zinnsalz in Gegenwart von viel Coniin nicht mehr auskrystallisirt. Man benutzt die Mischung von γ-Coniceïn und Coniin am zweckmässigsten für neue Coniceïndarstellungen.

γ-Coniceïn. Zunächst mit Ätzkali und schliesslich mit Natrium entwässert, stellt das γ-Coniceïn eine farblos-durchsichtige, flüssige Base dar, welche leichter als Wasser ist. Letzterem, in dem sie nur wenig löslich ist, ertheilt sie eine stark alkalische Reaction. Sie besitzt in auffallendem Grade den charakteristischen Geruch des Coniins, jedoch nicht ohne einen eigenthümlichen stechenden Beigeruch.

Wie das Coniin, ist auch das γ-Coniceïn ein kräftiges Gift. Nach Versuchen, welche Hr. Prof. HUGO KRONECKER angestellt hat, wirkt von allen Coniinbasen das γ-Coniceïn in kleinster Dose. γ-Coniceïn tödtete Kaninchen, selbst wenn sie nicht mehr als ein Zwölftel der Dose erhalten hatten, in welcher das Coniin eine tödtliche Wirkung übt.[1]

[1] Hr. Prof. H. KRONECKER experimentirte mit wässerigen Lösungen, welche 10 Procent der Basen, in Form ihrer neutralen salzsauren Salze, enthielten. Auf 1 Kilo Kaninchen

Digitized by Google

Das γ-Coniceïn ist bisher im starren Zustande nicht beobachtet worden. In einem Kohlensäure-Ätherbad, dessen Temperatur weit unter — 50° war, erhielt sich die Base unverändert flüssig; in dieser Beziehung unterscheidet sie sich sehr wesentlich von dem α-Coniceïn, welches bei starker Abkühlung mit Leichtigkeit erstarrt (vergl. S. 1213).

Das γ-Coniceïn siedet vollkommen constant bei 173°, also einige Grade höher als das Coniin. Mit den Säuren bildet es krystallisirbare neutrale Salze, welche aber sehr zerfliesslich sind; untersucht wurden in dieser Beziehung ausser dem Chlorhydrat noch das Bromhydrat, das Sulfat und das Nitrat. Durch ihre Zerfliesslichkeit unterscheiden sich die Salze des γ-Coniceïns alsbald unverkennbar von denen des Coniins.

Beim Schmelzen zeigen die γ-Coniceïnsalze, zumal das salzsaure Salz, eine eigenthümliche grüne Färbung, welche an die Tinte des Kaliummanganats erinnert; beim Stehen an der Luft zerfliessen die grün gewordenen Krystalle zu einer rothen Flüssigkeit, deren Farbe derjenigen einer verdünnten Permanganatlösung gleicht.

Die Zusammensetzung des γ-Coniceïns ist durch die Analyse der Base sowohl als des Platinsalzes festgestellt worden. Der Formel

$$C_8H_{15}N$$

entsprechen folgende Werthe:

	Theorie.		Versuch.		
C_8	96	76.80	76.80	76.73	76.55
H_{15}	15	12.00	12.21	12.32	12.24
N	14	11.20	—	—	—
	125	100.00			

Das *Platinsalz* krystallisirt in grossen, wohlausgebildeten Krystallen, welche häufig tafelförmig gestaltet sind. Es lässt sich ebenso wie das Platinsalz des Coniins ohne irgend welche Zersetzung umkrystallisiren. Die bei 100° getrocknete Substanz lieferte Zahlen, welche der Formel

$$2\,[C_8H_{15}N.HCl]\,PtCl_4$$

entsprechen.

---

berechnet, betrug die tödtliche Dose von

Coniin ..... 0.080—0.100g
α-Coniceïn ..... 0.010—0.020g
γ-Coniceïn ..... 0.006—0.007g

Bei β-Coniceïn und Conydrin blieben 0.040g ohne Wirkung; als man aber bei letzterem die Dose verzehnfachte (0.400g), erfolgte der Tod unter Krämpfen nach 9 Minuten. Octylamin, in einer Dose von 0.060g gegeben, brachte keine Wirkung hervor.

Digitized by Google

	Theorie.		Versuch.			
C_{16}	192	29.00	29.01	28.83	—	—
H_{32}	32	4.83	4.97	4.91	—	—
N_2	28	4.23	—	—	—	—
Pt	197	29.76	—	—	29.65	29.64
Cl_6	213	32.18	—	--	—	—
	662	100.00				

Das *Goldsalz* ist schwer löslich. Es fällt wie das Coniinsalz zunächst als Öl, welches aber schon nach wenigen Augenblicken krystallisirt. Das Coniin-Goldsalz kann oft Tage lang stehen ohne zu erstarren.

Der Formel

$$C_8H_{15}N.HCl.AuCl_3$$

entsprechen 42.36 Procent Gold. Das *in vacuo* getrocknete Salz enthält 42.39 Procent.

Sehr charakteristisch für das γ-Coniceïn ist das bei der Darstellung verwerthete *Zinn-Doppelsalz*, dessen Zusammensetzung derjenigen des Platinsalzes entspricht. Bei der Analyse des bei 100° getrockneten Salzes wurde das mit Schwefelwasserstoff gefällte Zinnsulfid an der Luft geglüht und als Zinnoxyd gewogen. Die Formel

$$2[C_8H_{15}N.HCl]SnCl_4$$

verlangt 20.24 Procent Zinn. Gefunden wurden 20.36 Procent.

Das Zinnchlorid dürfte vielleicht bei der Untersuchung der flüchtigen Basen nicht selten mit Vortheil Verwerthung finden.

Das γ-Coniceïn, obschon der α- und β-Base ausserordentlich ähnlich, unterscheidet sich von denselben gleichwohl durch den höheren Siedepunkt, von dem α-Coniceïn überdies durch seine Unfähigkeit, schwer lösliche krystallisirbare Verbindungen mit Pikrinsäure und Quecksilberchlorid zu bilden, und von dem β-Coniceïn, ganz abgesehen von der Verschiedenheit des Aggregatzustandes, durch die Zerfliesslichkeit seiner Salze. Die Salze des β-Coniceïns sind, wie bereits erwähnt wurde, gleich denjenigen des Coniins selber, vollkommen luftbeständig. Von dem α- und β-Coniceïn unterscheidet es sich ferner durch die Bildung des eben erwähnten Zinndoppelsalzes, von dem β-Coniceïn endlich noch durch die weit geringere Löslichkeit seines Platinsalzes.

Versuche, die drei isomeren Coniceïne in einander überzuführen, sind bis jetzt ohne Erfolg geblieben. Angesichts der Bildung des α-Coniceïns aus dem Bromconiin durch Einwirkung der Schwefelsäure lag der Gedanke nahe, das γ-Coniceïn längere Zeit bei erhöhter Tem-

Digitized by Google

peratur mit concentrirter Schwefelsäure in Berührung zu lassen. Beide Substanzen wurden Stunden lang bei 140° digerirt; schliesslich wurde die Lösung zum Sieden erhitzt. Das γ-Coniceïn hatte sich völlig unverändert erhalten.

In einem früheren Abschnitte dieser Abhandlung (vergl. S. 1224) ist bereits bemerkt worden, dass ich die neben der α- und β-Verbindung unter den Spaltungsproducten des Conydrins auftretende Base längere Zeit für γ-Coniceïn gehalten habe. Angesichts der wohlcharakterisirten Eigenschaften des γ-Coniceïns könnte es befremdlich erscheinen, dass diese Frage nicht alsbald durch Versuche entschieden worden sei. Es soll deshalb nicht unerwähnt bleiben, dass zur Zeit, als ich mit dem γ-Coniceïn genauer bekannt geworden war, der ganze Vorrath von Conydrin, welchen ich Hrn. Merck verdankte, erschöpft war, und neue Quantitäten nicht unmittelbar in Aussicht standen[1], so dass ich auf ein erneutes Studium seiner Spaltungsproducte zur endgültigen Lösung der Frage vor der Hand verzichten musste. Unter diesen Umständen war es mir sehr erfreulich noch im letzten Augenblick, ehe diese Blätter zum Abdruck gelangen, von Hrn. Wilh. Merck eine kleine Sendung Conydrin zu erhalten. Durch neue Versuche gelangte ich nunmehr zu dem bestimmten Schlusse, dass bei der Spaltung des Conydrins, — unter den Bedingungen, unter denen ich gearbeitet habe, — kein γ-Coniceïn auftritt. Aus dem erhaltenen Basengemenge konnte keine Spur des charakteristischen Zinndoppelsalzes gewonnen werden; auch liess sich beim Eindampfen der salzsauren Salze die eigenthümliche Grün- und Rothfärbung nicht wahrnehmen, welche für das γ-Coniceïn so bezeichnend sind.

Es blieb noch zu untersuchen übrig, ob das γ-Coniceïn wie das α-Coniceïn ein tertiäres, oder wie das β-Coniceïn ein secundäres Amin sei. Bei dieser Untersuchung, über die, ihrer eigenthümlichen Ergebnisse halber, etwas eingehender berichtet werden muss, haben sich weitere höchst charakteristische Verschiedenheiten des γ-Coniceïns von den beiden ihm isomeren Basen herausgestellt.

Dass das γ-Coniceïn keine tertiäre Base sei, ergiebt sich alsbald

---

[1] Bei den in letzter Zeit in der Merck'schen Fabrik in Darmstadt ausgeführten Coniindarstellungen sind nur ganz kleine Mengen von Conydrin erhalten worden. In einem Briefe des Hrn. Wilh. Merck vom 14 Januar d. J. sind einige Bemerkungen enthalten, welche in dieser Beziehung von Interesse sind. »Was die Grösse der Ausbeute an Conydrin betrifft«, schreibt Hr. Merck, »so ist diese eine stets variirende. Ich habe Schierlingsamen verarbeitet, der relativ eine geringe Ausbeute an Coniin, dagegen eine das gewöhnliche Maass überschreitende an Conydrin ergab. Dagegen habe ich auch wieder beobachtet, dass bei schlechten Ausbeuten an Coniin das Conydrin gleichfalls nur in verschwindend kleiner Menge auftrat. Ob hier das Reifestadium oder der Standort der Pflanze von Einfluss war, vermag ich zunächst nicht zu entscheiden.«

Digitized by Google

bei der Einwirkung des Essigsäureanhydrids, welches unter beträchtlicher Wärmeentwickelung eine Acetylverbindung erzeugt. Diese flüssige Verbindung ist unlöslich in Wasser und Salzsäure; sie siedet bei 252—255°. Die Formel

$$C_8H_{14}N.C_2H_3O$$

verlangt Kohlenstoff 71.85, Wasserstoff 10.19, gefunden wurde Kohlenstoff 70.42, Wasserstoff 10.12. Die Versuchsprocente weichen von den theoretischen erheblich ab, fixiren aber gleichwohl die Zusammensetzung der Acetylverbindung, so dass von einer Wiederholung der Analyse Abstand genommen wurde.

Das γ-Coniceïn ist aber auch keine primäre Base, wie sich bei Anwendung der Chloroformreaction alsbald unzweideutig ergab.

Die Bildung einer Acetylverbindung und die Unfähigkeit, sich in ein Isonitril zu verwandeln, charakterisiren das γ-Coniceïn als eine secundäre Base. Hiermit stimmt auch das Verhalten der Base gegen Jodmethyl, obwohl in dieser Reaction ganz unerwartete Erscheinungen auftreten.

Jodmethyl und γ-Coniceïn mischen sich unter beträchtlicher Wärmeentwickelung. Beim Erkalten scheiden sich Krystalle aus, offenbar das Jodhydrat einer tertiären Base. Um alsbald das letzte Product der Einwirkung zu erhalten, wurde eine alkoholische Lösung von γ-Coniceïn einige Stunden lang mit einem Überschusse von Jodmethyl und Natriumhydrat am Rückflusskühler digerirt. Beim Verdampfen des Alkohols zeigte sich, dass die Flüssigkeit, wie erwartet wurde, das Jodid einer Ammoniumbase enthielt, welches ausserordentlich löslich ist und deshalb nur schwierig in sehr zerfliesslichen Krystallen erhalten werden konnte. Das Alkali wurde nunmehr mit Salzsäure gesättigt und die in der Mischung befindlichen Jodide durch Chlorsilber in Chloride verwandelt. Durch Ausziehen der zur Trockne verdampften Chloride mit absolutem Alkohol wurde das Kochsalz entfernt. Das so erhaltene Chlorid der Ammoniumbase bildete mit Platinchlorid ein schönes, in mässig löslichen, sechsseitigen Tafeln anschiessendes *Platinsalz*, welches sich aus heissem Wasser ohne Zersetzung umkrystallisiren liess. Die Analyse des bei 100° getrockneten Salzes lieferte Zahlen, welche zunächst ganz befremdlich erschienen; sie ist deshalb des Öfteren wiederholt worden. Während man die der Formel

$$2\,[C_8H_{14}NCH_3CH_3Cl]PtCl_4$$

entsprechenden Werthe erwartete, wurden Zahlen erhalten, welche auf das Methylammoniumsalz eines dimethylirten Oxyconiins hinwiesen. Die Formel

Digitized by Google

$$2\,[C_{11}H_{24}NOCl]PtCl_4 = 2\,[C_8H_{15}(CH_3)_2NOCH_3Cl]PtCl_4$$

erheischt folgende Werthe:

	Theorie.		Versuch.							
C_{22}	264	33.76	33.52	34.23	—	—	—	—	—	—
H_{48}	48	6.14	6.11	6.22	—	—	—	—	—	—
N_2	28	3.58	—	—	—	—	—	—	—	—
O_2	32	4.09	—	—	—	—	—	—	—	—
Pt	197	25.19	—	—	25.23	25.22	25.32	25.03	25.13	25.02
Cl_6	213	27.24								
	782	100.00								

Die Ammoniumbase bildet auch ein krystallinisches schwerlösliches *Golddoppelsalz*.

Die Werthe, welche der Formel

$$C_{11}H_{24}NOCl.AuCl_3 = C_8H_{15}(CH_3)_2NOCH_3Cl.AuCl_3$$

angehören, sind:

	Theorie.		Versuch.		
C_{11}	132	25.14	25.49		
H_{24}	24	4.57	4.57	—	—
N	14	2.67	—	—	—
O	16	3.05	—	—	—
Au	197	37.52	—	37.68	37.23
Cl_4	142	27.05	—	—	—
	525	100.00			

Fragt man sich, auf welche Weise eine derartige Verbindung aus dem γ-Coniceïn zu Stande kommt, so darf man wohl annehmen, dass die Base bei der Einwirkung des Jodmethyls in Gegenwart von Alkali in einem Zuge die Veränderungen erleidet, welche bei dem Coniin in verschiedenen aufeinanderfolgenden Operationen beobachtet worden sind, dass sich aber in irgend einem Stadium der Reaction dem Producte noch 1 Mol. Wasser hinzuaddirt. Es werden also nach einander gebildet:

Coniin-Reihe.	γ-Coniceïn-Reihe.
$C_8H_{16}NCH_3.HI$	$C_8H_{14}NCH_3.HI$
$C_8H_{16}NCH_3CH_3I$	$C_8H_{14}NCH_3CH_3I$
$C_8H_{15}(CH_3)NCH_3.HI$	$C_8H_{13}(CH_3)NCH_3.HI$
$C_8H_{15}(CH_3)NCH_3CH_3I$	$C_8H_{13}(CH_3)NCH_3CH_3I$
	$C_8H_{15}(CH_3)NOCH_3CH_3I$.

Die Ähnlichkeit, welche das Endproduct der Einwirkung des Jodmethyls auf das Coniceïn mit dem unter ähnlichen Bedingungen aus

Digitized by Google

dem Coniin erhaltenen zeigt, ist Veranlassung gewesen, auch noch die Destillationsproducte der entsprechenden Hydroxydverbindung zu studiren, welche mit Leichtigkeit durch Behandlung des Chlorids mit Silberoxyd als stark alkalische Flüssigkeit erhalten wird. Man konnte im Hinblick auf das, was ich bei dem Piperidin und dem Coniin[1] beobachtet habe, mit einiger Sicherheit erwarten, dass sich zwei neben einander herlaufende Reactionen vollziehen würden, und es blieb nur zweifelhaft, ob sich das während des Bildungsprocesses aufgenommene Wassermolecul bei der Spaltung der Verbindung durch die Einwirkung der Wärme wieder ablösen werde oder nicht. Der Versuch hat gezeigt, dass die Elemente des Wassers den Spaltungsproducten verbleiben.

Wurde das Hydroxyd der Ammoniumbase in einer Retorte über freiem Feuer erhitzt, so trat unter starkem Aufschäumen vollständige Verflüchtigung ein. Das Destillat von eigenthümlichem, aromatischem Geruch war eine wässerige Flüssigkeit, auf welcher ein gelbes Öl schwamm. Zusatz von Salzsäure zu dem Destillate löste einen Theil dieses Öles; der unlösliche Theil desselben wurde durch einen Scheidetrichter entfernt und die saure wässerige Flüssigkeit der Destillation unterworfen. In den ersten Antheilen, welche übergingen, konnten reichliche Mengen von Methylalkohol nachgewiesen werden.

Dimethyloxyconiin. Auf Zusatz eines Alkalis zu der sauren wässerigen Flüssigkeit schied sich eine ölige Base ab, welche mit dem Scheidetrichter abgehoben wurde. Zur Entwässerung wurde die Base mit Kalihydrat zum Sieden erhitzt; Natrium liess sich für diesen Zweck nicht anwenden, weil es sich in der Base unter Wasserstoffentwicklung und Bildung einer krystallinischen Verbindung auflöst, welche sich beim Erhitzen unter Ausscheidung von Kohle zerlegt. Auf Zusatz von Wasser zu dieser Verbindung wird die Base regenerirt[2]. Mit Kalihydrat entwässert und von Neuem destillirt stellt die Base ein farblos-durchsichtiges Liquidum von eigenthümlichem Geruch dar, welches in Wasser nur spärlich löslich ist, demselben aber eine stark alkalische Reaction ertheilt. Der Siedepunkt der Base liegt bei 225—226°. Sie bildet sehr lösliche, nicht leicht krystallisirbare Salze, auch das Platindoppelsalz ist sehr löslich; dagegen bildet die Base ein schwer lösliches *Golddoppelsalz*, welches sich zunächst ölig ausscheidet, aber schon nach wenigen Augenblicken krystallinisch erstarrt. Die Zusammensetzung der Base, welche sich als ein *dimethylirtes Oxyconiin* erwies, wurde durch die Verbrennung festgestellt.

---

[1] HOFMANN, Monatsberichte, 1881, 288 u. 363.

[2] Es verdient bemerkt zu werden, dass das Conydrin zum Natrium ein ganz ähnliches Verhalten zeigt.

Digitized by Google

Die Formel

$$C_{10}H_{21}NO = C_8H_{15}(CH_3)_2NO$$

verlangt:

		Theorie.	Versuch.
C_{10}	120	70.17	69.63
H_{21}	21	12.28	12.05
N	14	8.19	—
O	16	9.36	—
	171	100.00	

Ferner gab das oben erwähnte Goldsalz, *in vacuo* getrocknet, 38.46 und 38.54 Procent Gold. Die Formel

$$C_{10}H_{21}NO.HCl.AuCl_3$$

erheischt 38.55 Procent Gold.

Der Formel nach lässt sich die methylirte Base als ein Dimethylconydrin

$$C_8H_{17}.NO$$
$$C_8H_{15}(CH_3)_2NO$$

betrachten. Die angedeutete Beziehung ist aber bis jetzt in keinerlei Weise durch Versuche nachgewiesen; der Siedepunkt eines dimethylirten Conydrins würde wohl höher liegen.

In der einen der bei der Einwirkung der Wärme auf die Ammoniumbase sich abspielenden Reactionen entsteht demnach Dimethyloxyconiin und Methylalkohol,

$$C_8H_{15}(CH_3)_2NO\,CH_3OH = C_8H_{15}(CH_3)_2NO + CH_3OH, \qquad (I)$$

und man durfte erwarten, dass sich in der anderen neben einer sauerstoffhaltigen Materie $C_8H_{14}O$ Trimethylamin erzeugen würde nach der Gleichung

$$C_8H_{15}(CH_3)_2NO\,CH_3OH = C_8H_{14}O + H_2O + (CH_3)_3N, \qquad (II).$$

Was zunächst das Trimethylamin angeht, so war seine Gegenwart in der alkalischen Lösung, von welcher das Dimethyloxyconiin abgehoben worden war, schon durch den Geruch ganz unverkennbar angedeutet. Als diese Flüssigkeit bei gelinder Wärme destillirt wurde, gingen in der That reichliche Mengen von Trimethylamin über. Zum Überflusse wurde das in schönen Octaëdern krystallisirende Platinsalz der Analyse unterworfen. Es wurden 36.97 Procent Platin gefunden; die Theorie verlangt 37.17.

Nicht ganz so glücklich bin ich bei dem Versuche gewesen, die sauerstoffhaltige Substanz zu charakterisiren. Diese Substanz war bei der Behandlung der Destillationsproducte der Ammoniumbase mit Salz-

Digitized by Google

säure als unlösliche Flüssigkeit zurückgeblieben. Mit Wasser, in dem sie unlöslich ist, von der anhängenden Salzsäure befreit und zur Entwässerung über Ätzbaryt destillirt, stellte diese Substanz eine farblos durchsichtige, ölige Flüssigkeit dar, welche leichter als Wasser ist und constant bei 165—166° siedet. Bemerkenswerth ist der durchdringende Geruch der Verbindung, welcher an den des Pfeffermünzöls erinnert. Die Analyse zeigt, dass der hier vorliegende Körper sauerstoffhaltig ist; auch weisen die gefundenen Werthe unzweideutig auf den in der obigen Gleichung (II) verzeichneten Körper hin; indessen wurde in der Analyse ein nicht ganz unerheblicher Verlust an Kohlenstoff erlitten.

Folgendes sind die für die Formel

$$C_8H_{14}O$$

berechneten und gefundenen Werthe:

	Theorie		Versuch
C_8	96	76.19	75.52
H_{14}	14	11.11	11.12
O	16	12.70	—
	126	100.00	

Dieser Körper liegt schon ziemlich weit ab von dem Ausgangspunkte der Untersuchung, dem Coniin. Es ist fraglich, ob Zeit und Kraft ausreichen wird, die lange Reihe von Operationen nochmals auszuführen, um die Natur dieser Materie, welche in mehr als einer Beziehung Interesse bietet, zu enthüllen. Der Formel nach erscheint der Körper als ein Homologon des Propargylalkohols oder des Borneols; ich bin aber weit davon entfernt, irgend welche Beziehung desselben zu einer der genannten Materien behaupten zu wollen. Indem ich ungern von der sauerstoffhaltigen Verbindung Abschied nehme, will ich nur noch bemerken, dass sich Natrium unter Wasserstoffentwickelung in derselben auflöst, und dass sie bei der Oxydation mit Kaliumpermanganat eine Säure liefert, welche sich auf Zusatz von Schwefelsäure zu dem gebildeten Kalisalze als ölige Flüssigkeit ausscheidet und auffallend den Geruch der Valeriansäure oder Capronsäure zeigt.

Weitere Umbildungsproducte des Coniins unter dem Einflusse des Broms in alkalischer Lösung.

Tribromoxyconiin. In dem vorstehenden der Beschreibung meiner Versuche über die Umwandlung des Coniins in Coniceïn gewidmeten Abschnitte ist bereits mehrfach (vergl. S. 1233 und S. 1234) einer schön krystallisirten bromreichen Verbindung gedacht worden, welche sich

Digitized by Google

bei der Analyse als das Bromhydrat eines tribromirten Oxyconiins ausgewiesen hat. Sie bildet sich jedesmal als Nebenproduct bei der Darstellung des γ-Coniceïns nach dem oben angegebenen Verfahren. Sie wird Hauptproduct, wenn man den Process genau so leitet, wie dort angegeben ist, nur mit dem Unterschiede, dass man das Brom in grösserer Menge in Anwendung bringt. Gute Ausbeute — in der Regel übersteigt das Gewicht der gewonnenen Bromverbindung dasjenige des angewendeten Coniins — erhält man, wenn man zu 1 Mol. salzsaurem oder bromwasserstoffsaurem Coniin nicht weniger als 3 Mol. Brom hinzufügt. In diesem Falle ist die auf Zusatz von 2 Mol. Alkali zunächst sich bildende ölige Verbindung wahrscheinlich nach der Formel

$$C_8H_{16}NBr.2\,BrBr$$

zusammengesetzt. Man wird also 1 Gew. Th. Coniin in Salzsäure lösen, die Flüssigkeit mit etwa 4 Gew. Th. Brom versetzen und eine Lösung von 0.66 Gew. Th. Natronhydrat hinzufügen. Für das Gelingen der Operation ist es wünschenswerth, mit möglichst verdünnten Lösungen zu arbeiten. Man bringt zweckmässig eine fünfprocentige Natronlösung in Anwendung. Erwärmt man die verdünnte alkalische Flüssigkeit auf dem Wasserbade unter starkem Umschütteln, bis sich das Öl aufgelöst hat — was in der Regel eine halbe Stunde in Anspruch nimmt —, so erstarrt die allmählich sauer gewordene Lösung beim Erkalten zu einer verfilzten Masse von Nadeln, welchen gewöhnlich kleine Mengen eines aromatischen, gelbgefärbten Öles anhaften. Durch Behandlung mit Äther lässt sich dieses Öl mit Leichtigkeit entfernen. Werden die mit Äther behandelten Krystalle noch mit Wasser gewaschen, um unorganische Bromide zu entfernen, so hat man es alsbald mit einer reinen Substanz zu thun. Die Krystalle sind sehr schwer in kaltem, leicht in heissem Wasser löslich. Sie lassen sich aus Wasser umkrystallisiren. Die wässerige Lösung, ursprünglich neutral, nimmt jedoch bei längerem Kochen eine saure Reaction an.

Zur Analyse wurde die nicht umkrystallisirte Substanz verwendet, welche man für diesen Zweck *in vacuo* getrocknet hatte. Die Brombestimmung wurde nach der Methode von Carius ausgeführt. Die Formel

$$C_8H_{15}Br_4ON = C_8H_{14}Br_3ON.HBr$$

erheischt folgende Werthe:

	Theorie.		Versuch.				
C_8	96	20.84	21.00	20.40	—	—	—
H_{15}	15	3.26	3.42	3.41	—	—	—
Br_4	320	69.41	—	—	69.41	69.32	69.40
O	16	3.47	—	—	—	—	—
N	14	3.04	—	—	—	—	—
	461	100.00					

Digitized by Google

Die vorstehenden Versuchszahlen lassen die Krystalle als das bromwasserstoffsaure Salz eines tribromirten Oxyconiins erscheinen, dessen Bildung nach der Gleichung

$$C_8H_{17}N + 4BrBr + H_2O = C_8H_{14}Br_3NO.HBr + 4HBr$$

erfolgen würde. In dieser Gleichung figuriren 4 Mol. Brom auf 1 Mol. Coniin, und es braucht wohl nicht gesagt zu werden, dass Versuche, die beiden Substanzen in dem angegebenen Verhältnisse auf einander wirken zu lassen, des Öfteren gemacht worden sind. Die Ausbeuten wurden aber auf diese Weise keineswegs erhöht, sondern eher vermindert, und man fand es rathsam, bei der Darstellung immer wieder auf die oben angeführten Verhältnisse (3 Mol. Brom auf 1 Mol. Coniin) zurückzugehen. Der Versuch hat nämlich gezeigt, dass sich bei einer Steigerung des Broms über das letztgenannte Verhältniss hinaus stets bromreiche flüssige Verbindungen erzeugen, welche die Reindarstellung der Krystalle wesentlich erschweren. Es verdient bemerkt zu werden, dass die Mutterlauge der Krystalle stets erhebliche Mengen von γ-Coniceïn, dessen Bildung nur 1 Mol. Brom erheischt, und selbst eine gewisse Menge unangegriffenen Coniins enthält. Man wird es in der That nicht unterlassen, diese Mutterlauge mit Alkali zu destilliren und die Mischung der beiden Basen nach dem oben angegebenen Verfahren mit Zinnchlorid (vergl. S. 1237) auf Coniin und γ-Coniceïn zu verarbeiten. Jedenfalls zeigt das gleichzeitige Auftreten von γ-Coniceïn und unangegriffenem Coniin in der Mutterlauge des Bromhydrats des Tribromoxyconiins, dass, obwohl in dem Processe nur 3 Mol. Brom auf 1 Mol. Coniin in Anwendung kommen, für den in die Tribrombase umgewandelten Theil des Coniins die erforderliche Menge Brom reichlich vorhanden ist.

Für die oben gegebene Formel sind weitere Anhaltspunkte durch die Analyse des *Platin-* und *Goldsalzes* gewonnen worden.

Behandelt man die Lösung des Bromhydrats mit Silberchlorid, so wird 1 At. Brom gegen Chlor ausgetauscht, indem sich das Chlorhydrat des Tribromoxyconiins bildet. Dieses ist in Wasser löslicher als das Bromhydrat, zeigt aber im Übrigen ähnliche Eigenschaften.

Die Lösung des Chlorhydrats liefert mit Platinchlorid einen hellgelben, schwach krystallinischen Niederschlag, welcher in Wasser nahezu unlöslich ist. Die Verbindung

$$2[C_8H_{14}Br_3NO.HCl]PtCl_4$$

enthält 16.80 Procent Platin; in dem bei 100° getrockneten Salze wurden 17.10 Procent gefunden.

Auf Zusatz von Goldchlorid zu dem Chlorhydrat scheidet sich das Goldsalz zunächst als Öl aus, welches aber bald zu Krystallen

Digitized by Google

erstarrt. In dem bei 100° getrockneten Salze wurden 26.99 und 27.28 Procent Gold gefunden. Die Verbindung

$$C_8H_{14}Br_3NO.HCl.AuCl_3$$

enthält 27.36 Procent.

Aus dem krystallisirten Bromhydrat lässt sich die Base durch Natriumcarbonat in Freiheit setzen und dann in Äther aufnehmen. Beim Verdunsten des Äthers bleibt das tribromirte Oxyconiin als ein schweres Öl von durchdringendem Geruch zurück.

Auf Zusatz von Bromwasserstoffsäure zu diesem Öle entsteht alsbald wieder das Salz, aus dem die Base abgeschieden wurde. Salzsäure, Schwefelsäure, Salpetersäure verwandeln die Base in die entsprechenden Salze, welche sämmtlich gut krystallisirt sind und sich durch ihre Schwerlöslichkeit auszeichnen. Besonders schwerlöslich ist das Nitrat. Es entsteht schon, wenn man die Lösung des Bromhydrats mit Salpetersäure versetzt. Versucht man das austauschbare Bromatom in dem Bromhydrat durch Zusatz von Silbernitrat zu bestimmen, so erhält man neben Silberbromid einen krystallinischen Niederschlag des Nitrats der Base.

Das tribromirte Oxyconiin ist im freien Zustande von nur ephemerer Existenz. Schon nach wenigen Augenblicken trübt sich das nach dem Abdunsten des Aethers zunächst klare Öl durch Ausscheidung von Krystallen, welche nichts anderes sind als das ursprüngliche Bromhydrat; es ist gleichzeitig eine Base entstanden, welche 1 Mol. Bromwasserstoffsäure weniger enthält, auf welche ich sogleich weiter unten zurückkommen werde.

Noch war es von Interesse, die Reductionsproducte der tribromirten Oxybase zu studiren.

Die gebromte Base lässt sich in der That als ein Derivat des Conydrins betrachten

Conydrin..... $C_8H_{17}NO$
Bromirte Oxybase ... $C_8H_{14}Br_3NO$,

und es schien die Möglichkeit gegeben, durch einen Reductionsprocess von diesem Körper, mithin auch von dem Coniin, zum Conydrin zu gelangen. Diese Hoffnung ist indess nicht in Erfüllung gegangen. Unter den Reductionsproducten ist mit Sorgfalt nach Conydrin gespäht worden; es wurde nicht gefunden.

Übergiesst man das krystallisirte Bromhydrat mit Salzsäure, so geräth die Flüssigkeit auf Zusatz von Zinn in's Sieden. Nach kurzer Frist ist der Process zu Ende. Wird das Reductionsproduct mit Alkali destillirt, so gehen flüchtige Basen über, die wesentlich aus γ-Coniceïn bestehen. Es wird aber auch stets eine nicht ganz unerhebliche Menge

Digitized by Google

von Coniin zurückgebildet. Bei der Siedepunktsbestimmung destillirten die Basen zwischen 168 und 173°; jenseits 300° ging noch eine kleine Menge basischen Öles über, welches indessen keine krystallisirbaren Salze mehr gab. Die zwischen 168 und 173° destillirende Base wurde in ein salzsaures Salz verwandelt. Es entstand das unschwer erkenntliche, zerfliessliche, salzsaure γ-Conicein, in welchem sich luftbeständige Nadeln von Coniinchlorhydrat längere Zeit unverändert erhielten. Das γ-Conicein wurde überdies noch durch Darstellung des charakteristischen Zinndoppelsalzes (vergl. S. 1237) identificirt. Bei der Analyse wurden in diesem Salze 20.45 Procent Zinn gefunden; die Theorie verlangt 20.24.

Aus dem Gesagten erhellt, dass sich das γ-Conicein als Übergangsproduct zwischen dem Coniin und dem tribromirten Oxyconiin betrachten lässt. In der That geht auch das γ-Conicein, mit Brom und Alkali behandelt, leicht in das Bromhydrat des tribromirten Oxyconiins über.

Es verdient hier daran erinnert zu werden, dass auch das α-Conicein bei der Behandlung mit Brom und Alkali in eine krystallisirte Bromverbindung übergeht (vergl. S. 1214). Dieselbe ist, wie loc. cit. bemerkt ist, nicht analysirt worden. Sie unterscheidet sich aber durch ihre Eigenschaften wesentlich von dem aus dem γ-Conicein erhaltenen.

Dibromoxyconicein. Schon oben (vergl. S. 1246) ist der eigenthümlichen Umsetzung gedacht worden, welche das tribromirte Oxyconiin bald nach seiner Abscheidung erleidet. Die Hälfte der freien Base wird auf Kosten der anderen Hälfte in das Bromhydrat zurückverwandelt, indem letztere in eine bromwasserstoffärmere Base übergeht, welche sich von einem Oxyconicein ableitet

$$2\,C_8H_{14}Br_3NO = C_8H_{14}Br_3NO.HBr + C_8H_{13}Br_2NO.$$

Man erhält diese Base leicht in grösserer Menge, wenn man das Bromhydrat der Tribrombase kurze Zeit mit Natronlauge und Äther schüttelt. Die bromwasserstoffärmere Base geht in den Äther über und bleibt nach dem Verdunsten desselben als ein schweres Öl zurück, welches nicht mehr den durchdringenden Geruch der tribromirten Verbindung besitzt, sondern mehr nach Coniin riecht. Von der tribromirten unterscheidet sich die neue Base alsbald dadurch, dass sie auf Zusatz von Salzsäure kein krystallinisches Salz mehr bildet. Etwas stabiler als die tribromirte Base erleidet die dibromirte gleichwohl ebenfalls nachgrade eine Umsetzung, indem sich bromwasserstoffsaure Salze bilden. In saurer Lösung dagegen hält sie sich unverändert. Da sich einfache Salze im krystallisirten Zustande nicht erhalten

Digitized by Google

liessen, wurde das schwerlösliche *Platinsalz* der Base zur Analyse benutzt. Das *in vacuo* getrocknete Salz hat die Zusammensetzung

$$2[C_8H_{13}Br_2NO.HCl]PtCl_4.$$

	Theorie.		Versuch.				
C_{16}	192	19.00	18.63	18,79	—	—	—
H_{28}	28	2.78	3.22	3.12	—	—	—
Br_4	320	31.68	—	—	—	—	—
N_2	28	2.78	—	—	—	—	—
O_2	32	3.17	—	—	—	—	—
Pt	197	19.50	—	—	19.46	19.38	19.21
Cl_6	213	21.09	—	—	—	—	—
	1010	100.00					

Mit besonderem Interesse habe ich die Reductionsproducte des dibromirten Oxyconiceïns studirt. Im Hinblick auf das, was bei der entsprechenden Behandlung des tribromirten Oxyconiins beobachtet worden war, hätte man neben Coniin und Coniceïn noch eine wasserstoffärmere Base als letztere erwarten dürfen. In Wirklichkeit wird aber in diesem Reductionsprocesse nur das Brom durch Wasserstoff ersetzt, es entsteht eine sauerstoffhaltige Base, das Oxyconiceïn, und es vollzieht sich also bei der Reduction der Dibrombase eine Umbildung, welche der bei der tribromirten Verbindung vergeblich angestrebten analog ist (vergl. S. 1246), d. h. es wird in diesem Processe eine Base erzeugt, welche zu dem Coniceïn in derselben Beziehung steht, wie das Conydrin zum Coniin.

Oxyconiceïn. Bei der Einwirkung von Zinn und Salzsäure auf dibromirtes Oxyconiceïn wiederholen sich die Erscheinungen, welche bei der Reduction des tribromirten Oxyconiins beobachtet wurden. Aus dem mit Alkali übersättigten Reductionsproducte treibt Wasserdampf eine Base über, welche, frei von Brom, nahezu vollständig in dem mit übergegangenen Wasser gelöst ist. Wird das Destillat, welches eine stark alkalische Reaction besitzt, mit Salzsäure gesättigt, so erhält man eine krystallinische Masse, aus welcher die Base durch Alkali in Freiheit gesetzt werden kann. Die auf diese Weise gewonnene farblose Flüssigkeit, deren Geruch dem des Conydrins etwas ähnlich ist, wurde, mit Kalihydrat entwässert, der Destillation unterworfen; sie destillirte zwischen 210 und 220°. Ein kleiner Theil, auf den ich weiter unten zurückkommen werde, verblieb im Siedekolben. (Vergl. S. 1249.)

Die zwischen 210 und 220° siedende Flüssigkeit lieferte, in Salzsäure gelöst, beim Eindampfen ein in farblosen Nadeln krystallisirendes *Chlorhydrat*, dessen Krystallform und Löslichkeitsverhältniss dem

Digitized by Google

Wasser gegenüber an das salzsaure Coniin erinnern. In Alkohol dagegen ist es weit schwieriger löslich als das Coniinsalz und konnte deshalb auch durch Umkrystallisiren aus diesem Lösungsmittel leicht gereinigt werden.

Die Analyse des bei 100° getrockneten Chlorhydrats führte zu Werthen, welche der Formel

$$C_8H_{15}NO.HCl$$

entsprechen.

	Theorie.		Versuch.				
C_8	96	54.09	54.27	54.52	54.16	—	—
H_{16}	16	9.01	9.09	9.36	9.47	—	—
N	14	7.89	—	—	—	8.17	—
O	16	9.01	—	—	—	—	—
Cl	35.5	20.00	—	—	—	—	20.01
	177.5	100.00					

Das Goldsalz des Oxyconiceïns bildet ziemlich leicht lösliche, derbe Nadeln von der Zusammensetzung

$$C_8H_{15}NO.HCl.AuCl_3.$$

Die Theorie verlangt 40.95 Procent Gold. In dem *in vacuo* getrockneten Salze wurden 40.91 Procent gefunden.

Das Platinsalz ist so löslich, dass es in Krystallen nicht hat erhalten werden können. Dagegen bildet die Base ein schwer lösliches Salz mit Zinnchlorid.

Coniceïdin. Im Vorstehenden wurde bereits erwähnt, dass bei der Destillation des getrockneten Oxyconiceïns ein schwer flüchtiger Rückstand in der Retorte verbleibt, welcher erst jenseits 360° ohne wesentliche Zersetzung destillirt. Die schwer flüchtige Substanz hat noch immer bestimmt ausgesprochene basische Eigenschaften; es mag ihr bis auf weiteres der Name Coniceïdin ertheilt werden. Mit Salzsäure bildet sie kleine tafelförmige Krystalle, welche in Wasser so schwer löslich sind, dass sie sich damit waschen lassen, in Salzsäure dagegen lösen sie sich leicht. Auch in Alkohol ist das Chlorhydrat sehr löslich; aus dieser Lösung kann es durch Äther gefällt werden.

Wie die weiter unten zu erwähnende Analyse dieses schönen salzsauren Salzes gezeigt hat, unterscheidet sich die in ihm enthaltene Base von dem eben beschriebenen Oxyconiceïn durch einen Mindergehalt von 1 Mol. Wasser.

Der Gedanke lag nahe, die sauerstofffreie Base aus dem letztgenannten Körper durch Wasserabspaltung zu gewinnen. Diese Um-

Digitized by Google

wandlung bietet in der That keine Schwierigkeit. Man braucht nur das Oxyconiceïn vier bis fünf Stunden lang am Rückflusskühler mit alkoholischem Kali zu kochen. Destillirt man nunmehr den grösseren Theil des Alkohols ab, so scheidet sich auf Zusatz von Wasser die sauerstofffreie Base in flüssiger Form ab. Mit dem Scheidetrichter von der alkalischen Flüssigkeit getrennt und mit Salzsäure gesättigt, liefert die Base alsbald das bereits erwähnte, charakteristische *Chlorhydrat.*

Die Analyse dieses bei 100° getrockneten Salzes lieferte Zahlen, welche zu der Formel

$$C_{16}H_{26}N_2.HCl$$

führen.

	Theorie.		Versuch.		
C_{16}	192	67.96	68.28	67.52	—
H_{27}	27	9.56	9.77	9.73	—
N_2	28	9.92	—	—	—
Cl	35.5	12.56	—	—	12.19
	282.5	100.00			

Die Lösung des salzsauren Salzes liefert mit Platinchlorid ein in sternförmig gruppirten Nadeln krystallisirendes, fast unlösliches Platinsalz. Der Formel

$$C_{16}H_{26}N_2.2HCl.PtCl_4$$

entsprechen 29.93 Procent Platin. Gefunden wurden in zwei Praeparaten von ganz verschiedener Darstellung 29.58 und 30.01 Procent Platin.

Die angeführten Analysen dürften über die Zusammensetzung dieses eigenthümlichen Körpers keinen Zweifel lassen. Auffallend bleibt es immer, dass bei Abspaltung des Wassers aus dem Oxyconiceïn zwei der bleibenden Reste zu einem Molecul zusammentreten:

$$2C_8H_{15}NO = C_{16}H_{26}N_2 + 2H_2O.$$

Man hat es hier offenbar mit einer zweisäurigen Base zu thun. Das analysirte Salz ist die Verbindung mit 1 Mol. Salzsäure; dass auch eine Verbindung mit 2 Mol. existirt, ergiebt sich schon aus der Leichtigkeit, mit welcher sich das einsäurige in Salzsäure auflöst. Auch der hohe Siedepunkt spricht unzweideutig für die oben angenommene Molecularformel.

Aus dem schön krystallisirten Chlorhydrat lässt sich die Base mit Natriumcarbonat in Freiheit setzen. Mit Äther aufgenommen, bleibt sie nach dem Verdunsten des Äthers als krystallinische Masse zurück, welche durch Umkrystallisiren aus Alkohol in feinen farblosen Nadeln vom Schmelzpunkte 55—56° erhalten wird. Der Siedepunkt der Base liegt über 300; sie ist aber nicht ohne erhebliche Zersetzung flüchtig.

Digitized by Google

Bei der Berührung mit Wasser erleidet die Base eine Veränderung; unter Wasseraufnahme werden sauerstoffhaltige Basen gebildet. Eine ähnliche Umbildung wird durch Kochen mit Alkohol bewirkt. Es entsteht eine flüchtige Base, welche sich mit Wasserdampf übertreiben lässt, sich im Wasser aber nicht löst. Mit Salzsäure eingedampft, liefert das Destillat einen intensiv grünen, amorphen Rückstand, der sich in Wasser leicht löst. Auf Zusatz von Eisenchlorid zu dieser Lösung bildet sich ein violetter Farbstoff, welcher in Flocken ausgeschieden wird. Daneben zeigt sich ein farbloser, krystallinischer Körper, der aber nicht mehr gefasst werden konnte. Material und Geduld waren in der That erschöpft, und die Ferien vor der Thüre, als dieser Punkt erreicht war.

Es sollen daher auch nur noch ganz kurz einige Reactionen des salzsauren Salzes angeführt werden. Die Lösung des Chlorhydrats trübt sich beim Erhitzen mit Wasser; leitet man Wasserdampf in die trübe Flüssigkeit, so geht mit den Dämpfen ein neutrales aromatisches Öl über. Wird die Lösung des Chlorhydrats mit Eisenchlorid versetzt, so färbt sie sich intensiv roth. Das beim Eindampfen bleibende Chlorhydrat schmilzt beim Erhitzen unter Entwickelung eines eigenthümlichen aromatischen Geruchs, der an den des Xylidins und Cumidins erinnert. Der amorphe Rückstand, in Wasser gelöst, liefert mit Eisenchlorid eine intensiv blaue Färbung: Platinchlorid und Goldchlorid veranlassen ähnliche Erscheinungen.

Noch mag schliesslich hervorgehoben werden, dass die beschriebene zweisäurige Base der Formel nach ein Homologon des Nicotins ist.

Nicotin ..... $C_{10}H_{14}N_2$.
Neue Base..... $C_{16}H_{26}N_2$.

Hier sind, wie man sieht, mehrfache Ausgangspunkte für neue Untersuchungen gegeben.

In den vorhergehenden Abschnitten sind die Versuche, welche ich über die Spaltung des Conydrins einerseits und über die Einwirkung des Broms auf das Coniin andererseits angestellt habe, eingehend beschrieben.

Es empfiehlt sich hier nochmals kurz auf die Ergebnisse dieser Versuche näher zurückzukommen.

Durch die Überführung des Coniins in das Conyrin, eine unzweifelhafte Pyridinbase, und die Zurückverwandlung derselben in Coniin, über welche ich der Akademie an einer anderen Stelle Mittheilung gemacht habe,[1] hatte die schon von WISCHNEGRADSKI[2] und später

[1] HOFMANN, Sitzungsberichte 1884. S. 313 u. 327.
[2] Vergl. KRAKAU, Ber. chem. Ges. XIII 2316.

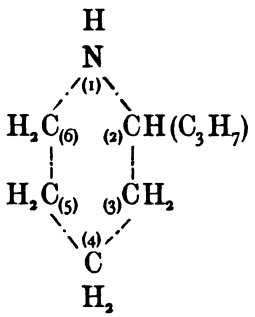
Digitized by Google

von Königs[1] ausgesprochene Vermuthung, dass das Coniin ein Pyridinabkömmling sei, eine thatsächliche Grundlage gewonnen, und es war überdies, durch den Abbau des Conyrins zu Picolinsäure, die Stellung der Propylgruppe zu dem Stickstoff unzweifelhaft geworden. Vergleicht man aber die Formeln des Conyrins und Coniins, indem man gleichzeitig die Reactionen erwägt, durch welche diese beiden Basen in auf- und absteigender Linie in einander übergehen, so lässt es sich nicht verkennen, dass zwischen beiden mehrere Zwischenglieder angedeutet sind:

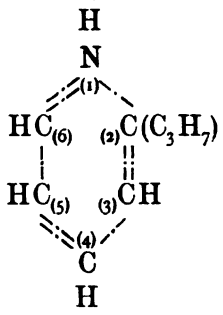
Coniin			Conyrin
$C_8H_{17}N$	$C_8H_{15}N$	$C_8H_{13}N$	$C_8H_{11}N$.

Über die Mannigfaltigkeit dieser Zwischenglieder erhalten wir am besten Aufschluss, wenn wir die Zusammensetzung der beiden Basen durch graphische Formeln veranschaulichen.

Coniin.



Conyrin.



Man erkennt unschwer, dass unsern heutigen Auffassungen entsprechend das Zwischenproduct $C_8H_{15}N$ in nicht weniger als sechs verschiedenen Isomeren existiren muss, denn das Wasserstoffmolecul kann entweder bei 1 und 2, 2 und 3, 3 und 4, 4 und 5, 5 und 6 oder endlich bei 6 und 1 aus dem Molecul des Coniins austreten. In dem ersten und letzten der genannten Fälle wird die gebildete Base ein tertiäres, in allen übrigen Fällen ein secundäres Amin sein.

Von den sechs Aminen $C_8H_{15}N$, welche die Theorie in Aussicht stellt, sind durch die vorliegenden Untersuchungen drei, und zwar ein tertiäres — das α-Coniceïn — und zwei secundäre — das β-Coniceïn und das γ-Coniceïn — zu unserer Kenntniss gelangt. Möglich, dass die neben dem α- und β-Coniceïn auftretenden Basen, deren Klarlegung bis jetzt noch nicht gelungen ist, eins oder mehrere von den noch fehlenden Gliedern darstellen. An welcher Stelle des Coniins die Wasserstoffmolecule ausgetreten sind, um die drei Coniceïne zu erzeugen, darüber lässt sich vor der Hand keine Ansicht aussprechen. Man wird aber durch weiter fortgesetzte Versuche ohne Zweifel auch diese Frage lösen.

[1] Königs, Ber. chem. Ges. XIV. 1857.

Digitized by Google

Noch mannichfaltiger ist offenbar die Anzahl von Isomeren, in denen die wasserstoffärmere Base $C_8H_{13}N$ auftreten kann. Es würde kein Interesse bieten, die verschiedenen theoretisch möglichen Fälle näher zu besprechen, da von den zahlreichen Isomerien, die auch hier angedeutet sind, bisher nur eine einzige zu Tage getreten ist, und auch diese, das Coniceïdin, nicht mehr in einfachster Form, sondern in Gestalt einer durch Verschmelzung zweier Molecule entstandenen zweisäurigen Base; ebensowenig kann man bei der unvollkommenen Kenntniss dieser Base schon heute die Frage erörtern wollen, wie etwa und wo diese Verschmelzung zu Stande gekommen sei.

Dagegen verlohnt es sich, noch einen Augenblick bei der Beziehung des Coniins zu dem Conydrin zu verweilen.

Im Hinblick auf das thatsächlich Festgestellte wird man nicht umhin können, das Conydrin als ein hydroxylirtes Coniin aufzufassen. Hierfür spricht die Umwandlung desselben in eine jodirte Base, welche durch Reductionsmittel leicht in Coniin verwandelt wird

Conydrin	$C_8H_{15}(OH)NH$
Jodconiin	$C_8H_{15}INH$
Coniin	$C_8H_{15}HNH$

Auch die Abspaltung von 1 Mol. Wasser spricht für diese Auffassung. Auffallend erscheint allerdings auf den ersten Blick die Unlöslichkeit des Conydrins in Alkalien, allein das Tropin, welches im Übrigen viel Ähnlichkeit mit dem Conydrin zeigt, erweist sich nach den Untersuchungen von KRAUT[1] und LOSSEN[2] ebenfalls als in Alkalien unlöslich, andererseits darf daran erinnert werden, dass sich Natrium in Conydrin unter Entwickelung von Wasserstoff auflöst (vergl. S. 1241, Note). Was die Stellung der Hydroxylgruppe in dem Molecul anlangt, so lässt sich im Augenblick auch nur eine Vermuthung aussprechen. Dafür, dass sich Stickstoff und Hydroxylgruppe in einer der beiden Orthostellungen zu einander verbinden, spricht vielleicht der Umstand, dass die wesentlichen Producte, welche durch Wasserabspaltung entstehen, eine secundäre und eine tertiäre Base sind. Bei Bildung der ersteren würde sich die Hydroxylgruppe mit 1 At. Wasserstoff der benachbarten Kohlenstoffatome, bei Bildung letzterer mit dem noch am Stickstoff vorhandenen Wasserstoff vereinigen. Wäre dem so, so würde, wenn wir das umstehend gegebene Schema festhalten, in den secundären Aminen (β- und γ-Coniceïn) die Wasserstoffabspaltung bei 2 und 3 oder bei 5 und 6, in dem tertiären Amin (α-Coniceïn) bei 1 und 2 oder bei 1 und 6 erfolgen.

[1] KRAUT, LIEB. Ann. CVIII, 280.
[2] LOSSEN, LIEB. Ann. CXXXI, 43.

Digitized by Google

Wenn wir aber das Conydrin als eine Hydroxylverbindung auffassen, so wird man dieselbe Annahme auch für die sauerstoffhaltigen Basen gelten lassen, welche theilweise bromhaltig, theilweise bromfrei, bei der Einwirkung von Brom in alkalischer Lösung auf das Coniin entstehen. In diesen scheint jedoch die Hydroxylgruppe an einer anderen Stelle zu haften. Wenigstens habe ich mich bisher vergeblich bemüht, aus denselben wieder Conydrin zu erzeugen (vergl. S. 1246).

Man erkennt unschwer, dass die vorliegende Arbeit mehr neue Fragen aufwirft, als sie Antworten auf alte gebracht hat. Ich kann nicht wissen, ob es vergönnt sein wird, diese Untersuchung zu Ende zu führen. Einige Fragen liegen jedoch so nahe, dass ich, sobald ich mich wieder im Besitze einer grösseren Menge von Conydrin befinde, zu ihrer Lösung weitere Versuche anstellen werde.

Die auf den vorstehenden Blättern beschriebenen Versuche haben längere Zeit in Anspruch genommen, denn sie sind, obwohl mir Hr. Wilhelm Merck die ganze Menge des in der Coniinfabrication als Nebenproduct auftretenden Conydrins zur Verfügung gestellt hatte, gleichwohl, weil das Material ausgegangen war, mehrfach unterbrochen worden. Bei Ausführung der Versuche habe ich mich der ebenso unermüdlichen wie einsichtsvollen Hülfe des Hrn. Dr. Franz Mylius zu erfreuen gehabt, für welche ich ihm, wie für seine Mitwirkung bei so mancher anderen Arbeit, zu aufrichtigem Danke verpflichtet bin. Seit Übersiedelung des Hrn. Mylius nach Freiburg ist Hr. Paul Ehestädt an seine Stelle getreten. Auch ihm möchte ich schliesslich für seine thatkräftige und sachkundige Unterstützung bis zur Vollendung der Arbeit meinen besten Dank aussprechen.

Digitized by Google

Anhang.

Kaffeesäure im Schierling.

Angesichts der unverkennbaren Ähnlichkeit in der Zusammensetzung und auch im chemischen Verhalten, welche die Forschung zwischen dem Conydrin und dem Tropin nachgewiesen hat, warf sich die Frage auf, ob nicht ersteres, gerade so wie letzteres, im Organismus der Pflanze mit einer Säure verbunden vorkomme. Es war zu untersuchen, ob im Schierling eine dem Atropin der Tollkirsche entsprechende Verbindung vorhanden sei, welche mit den Elementen des Wassers auf der einen Seite Conydrin, auf der anderen Seite eine Säure liefert, gerade wie das Atropin unter ähnlichen Bedingungen in Tropin und Tropasäure übergeht.

Im Sinne dieser Betrachtung habe ich Hrn. WILH. MERCK gebeten, nach einer solchen Materie in den Laugen zu fahnden, aus welchen in seinen Werkstätten Coniin und Conydrin gewonnen werden.

Dieser Bitte hat Hr. MERCK mit einer Bereitwilligkeit, für die ich ihm nicht dankbar genug sein kann, entsprochen. Schon nach wenigen Wochen erhielt ich von ihm einen noch stark gefärbten und mit harzigen Substanzen vermischten krystallinischen Körper von sauren Eigenschaften. Derselbe war auf die Weise gewonnen worden, dass man nach dem Übertreiben des Coniins und Conydrins die alkalischen Laugen mit Säure übersättigt und mit Äther behandelt hatte. Aus der ätherischen Lösung hatte sich beim Verdunsten der Körper ausgeschieden.

Die Säure liess sich durch mehrfaches Umkrystallisiren aus heissem Wasser, schliesslich unter Zusatz von etwas Thierkohle, leicht reinigen. Auf diese Weise wurden Blättchen von gelblicher Farbe erhalten, welche in der Nähe von 213° unter Bräunung und beginnender Zersetzung schmolzen. Die Säure löst sich leicht in Wasser und Alkohol; diese Lösungen nehmen, mit Eisenchlorid versetzt, eine grasgrüne Färbung an, welche auf Zusatz von etwas Natriumcarbonat in rothviolett umschlägt. Die Lösungen der Säure in Alkalien besitzen eine gelbe Farbe; mit den Alkalien geschmolzen liefert die Säure zunächst Protocatechusäure und dann Brenzcatechin.

Digitized by Google

Diese Eigenschaften charakterisiren die aus dem Schierling gewonnene Säure als Kaffeesäure,

$$C_6H_3(CH=CH-COOH)(OH)_2 = C_9H_8O_4,$$

welche zuerst von Hlasiwetz[1] als Zersetzungsproduct der Kaffeegerbsäure beobachtet, später von Tiemann und Nagai[2] aus dem Aldehyd der Protocatechusäure dargestellt worden ist.

Die Identität ist überdies durch die Analyse festgestellt worden.

	Theorie.		Versuch.	
C_9	108	60.00	59.65	59.58
H_8	8	4.45	4.84	4.78
O_4	64	35.55	—	—
	180	100.00.		

[1] Hlasiwetz, Lieb. Ann. CXLII, 358.
[2] Tiemann und Nagai, Berichte der chem. Ges. XI, 657.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

Digitized by Google

NAMENREGISTER.

ARNING, Dr. ED., Reise nach Hawaii zur Erforschung der Lepra. 151—152.

AUWERS, Antwort auf die Antrittsrede des Hrn. FUCHS. 366—367.

BEHRMANN, A., in Berlin, und HOFMANN, A. W., Umwandlungen der Citronensäure in Pyridin-Verbindungen. 577—595.

DU BOIS-REYMOND, E., Antwort auf die Antrittsrede des Hrn. WALDEYER. 360—362.

———————— ———, Lebende Zitterrochen in Berlin. 87—148.

BÜCKING, H., Prof. in Strassburg i. E., über die Lagerungsverhältnisse der älteren Schichten in Attika. 485—500.

CHRISTIANI, ARTHUR, Prof. in Berlin, zur Kenntniss der Functionen des Grosshirns beim Kaninchen. 313—318.

CLAUSIUS, R., über die zur Erklärung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie dienenden mechanischen Gleichungen. 333—340.

EICHLER, A. W., über den Blüthenbau der Zingiberaceen. 295—310.

FIEDLER, W., Prof. in Zürich, erhält den Preis der STEINER'schen Stiftung. 371.

FINSCH, OTTO, Dr. in Bremen, Bearbeitung seiner Reiseergebnisse und Sammlungen. 149—150.

FRITSCH, GUSTAV, Prof. in Berlin, über den Angelapparat des Lophius piscatorius. 617—623.

————, Ergebnisse der Vergleichungen an den elektrischen Organen der Torpedineen. 195—206.

FUCHS, LAZARUS, Antrittsrede. 363—365.

———, über Differentialgleichungen, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen. 341—352.

———, über eine Form, in welche sich das allgemeine Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung bringen lässt, wenn dasselbe algebraisch ist. 641—647.

GOLDSTEIN, E., Dr. in Berlin, über elektrische Leitung im Vacuum. 15—25.

GÜSSFELDT, PAUL, Dr. in Berlin, Reise in den centralen chileno-argentinischen Andes. 149—151. 443—484.

HELMHOLTZ, H. VON, Studien zur Statik monocyklischer Systeme. 67—85. 153 bis 160. 375—379.

————, Verallgemeinerung der Sätze über die Statik der monocyklischen Systeme. 693—697.

HOFMANN, A. W., Beiträge zur Kenntniss der Coniingruppe. 703—752.

————, Untersuchungen über das Coniin. 161—166.

————, zur Constitution des Coniins. 167—168.

————, Umwandlung der Citronensäure in Pyridin-Verbindungen s. BEHRMANN, A.

JOHOW, FRIEDRICH, Dr. in Bonn, über westindische Hymenolichenen. 31—46.

KAYSER, H., Dr. in Berlin, über Blitzphotographien. 611—615.

KIRCHHOFF, G., über einige Anwendungen der Theorie der Formänderung, welche ein Körper erfährt, wenn er magnetisch oder diëlektrisch polarisirt wird. 625—640.

KIRCHHOFF, G., über die Formänderung, die ein fester elastischer Körper erfährt, wenn er magnetisch oder diëlektrisch polarisirt wird. 47—66.

Digitized by Google

König, Dr. Arthur, und Richarz, Dr. Franz, in Berlin, eine neue Methode zur Bestimmung der Gravitationsconstante. 699—701.

Kohlrausch, Friedrich, Prof. in Würzburg, die elektrische Leitungsfähigkeit des im Vacuum destillirten Wassers. 501—504.

Kossmann, Prof. R., in Heidelberg, neueres über Cryptonisciden. 207—223.

Kronecker, H., Prof. und Schmey, F., Cand. med. in Berlin, das Coordinationscentrum der Herzkammerbewegungen. 27—29.

Kronecker, L., Beweis einer Jacobi'schen Integralformel. 267—268.

———, Beweis des Puisseux'schen Satzes. 269—274.

——— —, Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste. 247—265.

———, über den dritten Gauss'schen Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste. 319—321.

———, näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen. 649—692.

——— ——, die Periodensysteme von Functionen reeller Variabeln. 567—576.

Kundt, A., die elektromagnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes durch Eisen, Cobalt und Nickel. 381—402.

Lipschitz, R., Bemerkung zu der Abhandlung: Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenem Ausdruck des Linearelements. 323—324.

Mendel, Dr. E., in Berlin, über paralytischen Blödsinn bei Hunden. 191—193.

Munk, Hermann, zur Kenntniss der Functionen des Grosshirns beim Kaninchen. 325—330.

———, die centralen Organe für das Sehen und das Hören bei den Wirbelthieren. 275—294.

Quincke, G., über die Messung magnetischer Kräfte durch hydrostatischen Druck. 1—12.

Rammelsberg, über die essigsauren Doppelsalze des Urans. 411—441.

Richarz, Franz, Dr. in Berlin, eine neue Methode zur Bestimmung der Gravitationsconstante (vgl. König). 699—701.

Schwendener, S., zur Lehre von der Festigkeit der Gewächse. 541—566.

Siemens, Werner, Beiträge zur Theorie des Magnetismus. 505—523.

———, über eine Einrichtung zur Darstellung der von der Pariser Conferenz zur Bestimmung der elektrischen Einheit angenommenen Lichteinheit. 311—312.

Spörer, G., Prof. in Potsdam, über die Ermittelung der Knotenlänge und Neigung bei Bestimmung der Rotationselemente der Sonne. 185—190.

Voigt, W., Prof. in Göttingen, neue Bestimmungen der Elasticitäts-Constanten von Steinsalz und Flussspath. 525—540.

Waldeyer, W., Prof. in Berlin, Antrittsrede. 355—359.

Websky, Mart., über die Ein- und Mehrdeutigkeit der Fundamental-Bogen-Complexe für die Elemente monoklinischer Krystall-Gattungen. 169—184.

———, über Idunium, ein neues Element. 331—332.

Westermaier, M., Dr. in Berlin, Untersuchungen über die Bedeutung todter Röhren und lebender Zellen für die Wasserbewegung in der Pflanze. 597—609.

Wiebe, H. F., Assistent der Normal-Aichungscommission in Berlin, über den Einfluss der Zusammensetzung des Glases auf die Nachwirkungs-Erscheinungen bei Thermometern. 403—409.

Wolff, Julius, Dr. in Berlin, über das Gesetz der Transformation der inneren Architektur der Knochen bei pathologischen Veränderungen der äusseren Knochenform. 225—246.

Wroblewski, S. von, in Krakau, über die Verflüssigung des Wasserstoffs. 13.

Digitized by Google

SACHREGISTER.

Anatomie. — Wolff, über das Gesetz der Transformation der inneren Architektur der Knochen bei pathologischen Veränderungen der äusseren Knochenform. 225—246.

Andes, chileno-argentinische. Bericht über eine Reise in denselben, von Güssfeldt. 443—484.

Antrittsreden. — des Hrn. Fuchs. 363—365. — des Hrn. Waldeyer. 355—359.

Astronomie. — Spörer, über die Ermittelung der Knotenlänge und Neigung bei Bestimmung der Rotationselemente der Sonne. 185—190.

Attika, über die Lagerungsverhältnisse der älteren Schichten dortselbst, von Bücking. 485—500.

Berichte über das Cothenius'sche Legat. 372—373. — über die Humboldt-Stiftung. 149—152. — über die Steiner'sche Stiftung. 369—371.

Berichtigungen. 353.

Blitzphotographien, von Kayser. 611—615.

Botanik. — Eichler, über den Blüthenbau der Zingiberaceen. 295—310. — Johow, über westindische Hymenolichenen. 31—46. — Schwendener, zur Lehre von der Festigkeit der Gewächse. 541—566. — Westermaier, über die Bedeutung todter Röhren und lebender Zellen für die Wasserbewegung in der Pflanze. 597—609.

Chamaceen s. Rudisten.

Chemie. — Behrmann und Hofmann, Umwandlung der Citronensäure in Pyridin-Verbindungen. 577—595. — Hofmann, Beiträge zur Kenntniss der Coniingruppe. 703—752. — Derselbe, Untersuchungen über das Coniin. 161—166. — Derselbe, zur Constitution des Coniins. 167—168. — Rammelsberg, über die essigsauren Doppelsalze des Urans. 411—441. — Websky, über Idunium. 331—332.

Citronensäure, Umwandlung derselben in Pyridin-Verbindungen, von Behrmann und Hofmann. 577—595.

Coniin, zur Constitution desselben, von Hofmann. 167—168.

———, Untersuchungen über dasselbe, von Hofmann. 161—166.

Coniingruppe, Beiträge zur Kenntniss derselben, von Hofmann. 703—752.

Cothenius'sches Legat, Preis desselben. 372—373.

Cryptonisciden, neueres über dieselben, von Kossmann. 207—223.

Differentialgleichungen, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen, von Fuchs. 341—352.

Elasticitäts-Constanten von Steinsalz und Flussspath, neue Bestimmungen derselben, von Voigt. 525—540.

Elektrische Leitung im Vacuum, von E. Goldstein. 15—25.

Digitized by Google

Elektrische Leitungsfähigkeit des im Vacuum destillirten Wassers, von Kohlrausch. 501—504.

Epicaridien, Studien über dieselben, von Kossmann. 207—223.

Festigkeit der Gewächse, zur Lehre von derselben, von Schwendener. 541—566.

Flussspath, neue Bestimmung der Elasticitäts-Constanten desselben, von Voigt. 525—540.

Formänderung, die ein fester elastischer Körper erfährt, wenn er magnetisch oder dielektrisch polarisirt wird, von G. Kirchhoff. 47—66. — über einige Anwendungen ihrer Theorie, von Demselben, 625—640.

Functionen reeller Variabeln, die Periodensysteme derselben, von Kronecker. 567—576.

Gauss'sche Beweis, dritter, des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste, von Kronecker. 247—265.

Gleichungen, lineare, näherungsweise ganzzahlige Auflösung derselben, von Kronecker. 649—692.

Gravitationsconstante, eine neue Methode zur Bestimmung derselben, von König und Richarz. 699—701.

Grosshirn beim Kaninchen, zur Kenntniss der Functionen desselben, von Christiani. 313—318. —, von Munk. 325—330.

Herzkammerbewegungen, das Coordinationscentrum derselben, von H. Kronecker und Schmey. 27—29.

Humboldt-Stiftung, Bericht des Curatoriums für das Jahr 1883. 149—152. — Reise des Dr. Ed. Arning nach Hawaii zur Erforschung der Lepra. 151—152.

Hymenolichenen, über westindische, von Johow. 31—46.

Jacobi'sche Integralformel, Beweis derselben, von Kronecker. 267—268.

Idunium, ein neues Element, von Websky. 331—332.

Integral, allgemeines, einer Differentialgleichung erster Ordnung, über eine Form, in welche sich dasselbe bringen lässt, wenn es algebraisch ist, von Fuchs. 641—647.

Knochen, Transformation der inneren Architektur derselben bei pathologischen Veränderungen der äusseren Knochenform, über das Gesetz derselben, von Wolff. 225—246.

Krystallographie. — WebSky, über die Ein- und Mehrdeutigkeit der Fundamental-Bogen-Complexe für die Elemente monoklinischer Krystall-Gattungen. 169—184.

Lagerungsverhältnisse der älteren Schichten in Attika, von Bücking. 485—500.

Lepra, Erforschung derselben durch Dr. Eduard Arning. 151—152.

Lichteinheit, Apparat zur Darstellung derselben, von Siemens. 311—312.

Lophius piscatorius, über den Angelapparat desselben, von Fritsch. 617—623.

Magnetismus, Beiträge zur Theorie desselben, von Siemens. 505—523.

Mathematik. — Fuchs, über Differentialgleichungen, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen. 341—352. — Derselbe, über eine Form, in welche sich das allgemeine Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung bringen lässt, wenn dasselbe algebraisch ist. 641—647. — Kronecker, näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen. 649—692. — Derselbe, Beweis einer Jacobi'schen Integralformel. 267—268. — Derselbe, die Periodensysteme von Functionen reeller Variabeln. 567—576. — Derselbe, Beweis des Puiseux'schen Satzes. 269—274. — Derselbe, Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste. 247—265. — Derselbe, über den dritten Gauss'schen Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste. 319 bis 321. — Lipschitz, Bemerkung zu der Abhandlung: Untersuchungen über die

Digitized by Google

Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenem Ausdruck des Linearelements. 323—324.

Mechanische Gleichungen, über die zur Erklärung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie dienenden, von Clausius. 333—340.

Messung magnetischer Kräfte durch hydrostatischen Druck, von G. Quincke. 1—12.

Monocyklische Systeme, Studien zur Statik derselben, von H. von Helmholtz. 67—85. 153—160. 375—379. — Verallgemeinerung der Sätze über die Statik derselben, von Demselben. 693—697.

Monoklinische Krystall-Gattungen, über die Ein- und Mehrdeutigkeit der Fundamental-Bogencomplexe derselben, von Webesky. 169—184.

Oberflächen mit vorgeschriebenem Ausdruck des Linearelements, Bemerkung zu den Untersuchungen über die Bestimmung derselben, von Lipschitz. 323—324.

Organe, die centralen, für das Sehen und das Hören bei den Wirbelthieren, von Munk. 275—294.

Paralytischer Blödsinn bei Hunden, von Mendel. 191—193.

Periodensysteme von Functionen reeller Variabeln s. Functionen.

Physik. — Clausius, über die zur Erklärung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie dienenden mechanischen Gleichungen. 333—340. — Goldstein, über elektrische Leitung im Vacuum. 15—25. — von Helmholtz, Studien zur Statik monocyklischer Systeme. 67—85. 153—160. 375—379. — Derselbe, Verallgemeinerung der Sätze über die Statik der monocyklischen Systeme. 693—697. — Kayser, über Blitzphotographien. 611—615. — G. Kirchhoff, über die Formänderung, die ein fester elastischer Körper erfährt, wenn er magnetisch oder dielektrisch polarisirt wird, und über einige Anwendungen dieser Theorie. 47—66. 625—640. — König und Richarz, eine neue Methode zur Bestimmung der Gravitationsconstante. 699—701. — Kohlrausch, die elektrische Leitungsfähigkeit des im Vacuum destillirten Wassers. 501—504. — Kundt, die elektromagnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes durch Eisen, Cobalt und Nickel. 381—402. — Quincke, über die Messung magnetischer Kräfte durch hydrostatischen Druck. 1—12. — Siemens, Beiträge zur Theorie des Magnetismus. 505—523. — Derselbe, über eine Einrichtung zur Darstellung der von der Pariser Conferenz zur Bestimmung der elektrischen Einheit angenommenen Lichteinheit. 311—312. — Voigt, neue Bestimmungen der Elasticitäts-Constanten von Steinsalz und Flussspath. 525—540. — Wiebe, über den Einfluss der Zusammensetzung des Glases auf die Nachwirkungs-Erscheinungen bei Thermometern. 403—409. — Wroblewski, die Verflüssigung des Wasserstoffs. 13.

Physiologie. — du Bois-Reymond, lebende Zitterrochen in Berlin. 87—148. — Christiani, zur Kenntniss der Functionen des Grosshirns beim Kaninchen. 313—318. — Fritsch, über den Angelapparat des Lophius piscatorius. 617—623. — Derselbe, Ergebnisse der Vergleichungen an den elektrischen Organen der Torpedineen. 195—206. — Kronecker und Schmey, das Coordinationscentrum der Herzkammerbewegungen. 27—29. — Mendel, über paralytischen Blödsinn bei Hunden. 191—193. — Munk, zur Kenntniss der Functionen des Grosshirns beim Kaninchen. 325—330. — Derselbe, die centralen Organe für das Sehen und das Hören bei den Wirbelthieren. 275—294.

Polarisationsebene des Lichtes, die elektro-magnetische Drehung derselben durch Eisen, Cobalt und Nickel, von Kundt. 381—402.

Preisertheilung. — aus dem Cothenius'schen Legat. 372—373. — aus der Steiner'schen Stiftung. 369—371.

Puiseux'scher Satz, Beweis desselben, von Kronecker. 269—274.

Digitized by Google

Reciprocitätsgesetz für die quadratischen Reste, Beweis desselben, von Kronecker. 247—265.

———————— — — — —, über den dritten Gauss'schen Beweis desselben, von Kronecker. 319—321.

Reisen. — Arning, Reise nach Hawaii zur Erforschung der Lepra. 151—152. — Güssfeldt, Reise in den centralen chileno-argentinischen Andes. 149—151. — 443—483.

Rotationselemente der Sonne, über die Ermittelung der Knotenlänge und Neigung bei Bestimmung derselben, von Spörer. 185—190.

Steiner'sche Stiftung, Bericht über dieselbe. 369—371.

Steinsalz, neue Bestimmungen der Elasticitäts-Constanten desselben, von Voigt. 525—540.

Thermometer, über den Einfluss der Zusammensetzung des Glases auf die Nachwirkungs-Erscheinungen bei denselben, von Wiebe. 403—409.

Torpedineen, Ergebnisse der Vergleichungen an den elektrischen Organen derselben, von Fritsch. 195—206.

Uran, über die essigsauren Doppelsalze desselben, von Rammelsberg. 411—441.

Wasserbewegung in der Pflanze, Untersuchungen über die Bedeutung todter Röhren und lebender Zellen für dieselbe, von Westermaier. 597—609.

Wasserstoff, über die Verflüssigung desselben, von S. von Wroblewski. 13.

Zingiberaceen, über den Blüthenbau derselben, von Eichler. 295—310.

Zitterrochen, lebende in Berlin, von du Bois-Reymond. 87—148.

Zoologie. — Kossmann, neueres über Cryptonisciden. 207—223.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google